This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Politische Arithmetik.

Anleitung zur Kenntniß und Uebung

aller im

Staatswesen vorkommenden Berechnungen.

Ein Handbuch

für

Staatsbeamte und Geschäftsmänner.

Von

L. C. Bleibtreu,

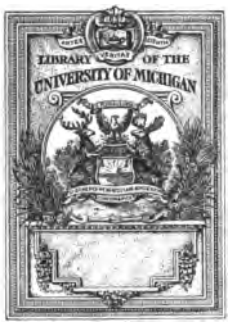
Professor an der polytechnischen Schule in Karlsruhe.

Erste Abtheilung.

Heidelberg,

Akademische Verlagshandlung von C. F. Winter.

1845.



FROM THE LIBRARY OF
Professor Karl Heinrich Rau
OF THE UNIVERSITY OF HEIDELBERG
PRESENTED TO THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
BY
Mr. Philo Parsons
OF DETROIT
1871

HJ
9717
.B646

Politische Arithmetik.

Druck von Creuzbauer und Hasper in Carlsruhe.

10829

Politische Arithmetik.

PARSONS LIBRARY
University of
MICHIGAN

Anleitung

zur

Kenntniß und Uebung

aller im

Staatswesen vorkommenden Berechnungen.

Ein Handbuch

für

Staatsbeamte und Geschäftsmänner.

Von

L. C. Bleibtreu,

Professor an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Heidelberg.

C. F. Winter, akademische Verlagsbuchhandlung.

1845.

Vorwort.

Die Herausgabe dieses Handbuchs ist zunächst durch die individuelle Verpflichtung des Verfassers, seinen Vorträgen über politische Arithmetik an der hiesigen polytechnischen Schule einen Leitfaden zu Grunde zu legen, veranlaßt worden. Seit Tetens, Florencourt, Duvillard und andern gleichzeitigen Bearbeitern dieses Theils der angewandten Mathematik hat sich das Gebiet desselben sehr erweitert. Selbst die Anwendung des Systems der Anwartschaften, mit welchen sich die ältern Schriftsteller vorzugsweise beschäftigt haben, hat eine so vielseitige Richtung genommen, daß Letztere nicht mehr genügen; und wenn auch Baily und einige neuere Mathematiker einerseits die Theorie der Lebensversicherung praktischer behandelt haben, so hat es andererseits doch an einer vollständigen Darstellung der nicht minder wichtigen und damit verwandten Theorie der Rentenanstalten bisher gefehlt. Es kam daher nicht blos darauf an, die Resultate neuerer Forschungen zu sammeln, sondern es mußte auch alles Dasjenige, was seitdem unmittelbar aus der Praxis hervorgegangen ist, theoretisch begründet, auf allgemeine Prinzipien zurückgeführt und mit den bereits vorhandenen Lehren in einen systematischen

Zusammenhang gebracht werden. Bei dem Streben nach Vollständigkeit hat übrigens der Verfasser den Grundsatz nicht außer Acht gelassen, überall vom praktischen Gesichtspunkte auszugehen, und sich nicht in Theorien zu versteigen, die keine Anwendungen zulassen. Dahin würden z. B. Amortisationsrechnungen gehören, die auf Voraussetzungen beruhen, wie sie wohl in manchen mathematischen Lehrbüchern, aber nicht in der Praxis vorkommen. Aus demselben Grunde mußte auch die mathematische Theorie der Wahlen, Zeugenaussagen und Rechtsentscheidungen, welche zum speculativen Theil der politischen Arithmetik gehört, vom Gebiete dieses Handbuchs ausgeschlossen bleiben.

Was endlich den kurzen Abschnitt über öffentliche Glücksspiele betrifft, so ist wohl die Zeit nicht mehr ferne, wo derselbe nur noch als Einleitung zu den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Gegenstände der politischen Arithmetik hier seine Stelle finden kann.

Inhaltsverzeichniß.

Seite.

Einleitung 1

I.

Maaß- und Gewichtswesen.

Specifisches und absolutes Gewicht 3
Wagen 4
Dimensionsmaaße 8
Normal- oder Muttermaaße 8
Vergleichung der Maaße und Gewichte durch Berechnung . . . 12
Approximative Maaß- und Gewichtsverhältnisse 13
Vergleichung der Maaße und Gewichte durch Messen und Abwägen 14
Vom Eichen der Verkehrsmaaße und Gewichte 19
Inhaltsbestimmung der Fässer durch Eichen 27
Inhaltsbestimmung der Fässer durch Visiren 28
Diagonalstab 30

Seite
Tiefstab 31
Maaßbestimmung der Abweinung 32
Beschränkte Anwendung des Visirstabs 33

II.

Finanzwesen.

I. Geldwesen.

Erste Abtheilung.

Münzen.

Erster Abschnitt.

Silbermünze.

Münzgewichtseinheit 37
Korn, Feingehalt, Schrot 38
Remedium 38
Münzfuß 39
Prägschatz 40
Scheidemünze 41

Zweiter Abschnitt.

Goldmünze.

Werthsverhältniß des Silbers zum Golde 45
Nominalwerth der Goldmünze 45

Dritter Abschnitt.

Platinamünze.

Gesetzliches Werthsverhältniß und Handelswerthsverhältniß des Silbers zum Platin. Kosten der Ausprägung 49

Vierter Abschnitt.

Kupfermünze.

Seite.
Unterschied zwischen dem wirklichen Werthe und dem Nominalwerthe der Kupfermünze 50

Fünfter Abschnitt.

Handelswerth der Münzen.

Agio. Disagio oder Verlust 52
Preisnotirung der Münzen nach der Mark 53
Geldarbitrage 54

Sechster Abschnitt.

Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuße . 55

Siebenter Abschnitt.

Valvation der Münzen 59
Devalvation 60

Zweite Abtheilung.

Gold und Silber in Barren.

Goldbarren. Silberbarren. Güldische Barren 61
Berechnung des Gehalts der Barren an Gold und Silber . . . 62
Berechnung des Werths der Barren nach den Gold- und Silberpreisen 63
Berechnung der güldischen Barren 64
Legirrechnung 64

II. Von den Wechseloperationen.

Wechsel. Anweisungen 67
Wechselcurs. Feste Valuta. Veränderliche Valuta 69
Wechselcurszettel 70
Wechselpari 71
Wechselarbitrage 71
Wechselparität 72
Wechselspeculation 76

III. Vom einfachen Zins.

Seite.
Zinsfuß 83
Einfache Zinsrechnung 83
Gegenwärtiger Werth eines später zahlbaren Kapitals 86
Discont 87
Mittlerer Zahlungstermin 87
Conto-Corrent mit Zinsen 91

IV. Von der Staatsschuldentilgung.

Verschiedene Arten der Staatsanleihen 113
Art und Weise Anleihen zu negociren 115
Staatsschuldscheine 118
Verzinsung der Schuldkapitalien 120
Zinszinsrechnung 120
Tilgungsfonds 130
Planmäßige Tilgung 132
Freie Tilgungsweise 134
Controle für die Tilgung einer Schuld 134
Tilgungsarten 137
Zurückführung eines, einem gegebenen Zinsfuße und Tilgungsplane entsprechenden Anleihens auf ein anderes, welches einem andern Zinsfuße, aber dem nämlichen Tilgungsplane entspricht . . . 137
Parität der Curse für Anleihen von verschiedenem Zinsfuße . . . 141
Anwendung der Berechnung der Cursparität 143
Lotterieanleihen 170
Abkürzung der Ziehungen 171
Verloosungsplan 174
Anleihen durch Zeitrenten und Leibrenten 177
Anleihen durch Tontinen 184

V. Vom Verkehr mit Staatspapieren.

Cursnotirung der Staatspapiere 185
Vergütung der Zinsen beim Verkauf der Papiere 186
Kaufgeschäft in Staatspapieren 187
Vom Prolongationsgeschäft und vom Gebrauche der Staatspapiere zu Discontgeschäften 189
Versatzgeschäft 191

Seite
Börsenoperationen in Staatspapieren 191
Heuergeschäft 197
Berechnung des Spielwerths der Promessen 198
Versicherungsgeschäft 201
Berechnung der natürlichen Versicherungsprämie 202

VI. Oeffentliche Glücksspiele.

Rechtmäßige Wette 204
Mathematische Wahrscheinlichkeit 202
Berechnung der Spielwerthe 208
Mathematische Hoffnung 217

III.

Zahlenverhältnisse der Bevölkerung.

Specifische Bevölkerung 221
Bewegung der Bevölkerung 223

IV.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens.

Sterblichkeitstabellen 231
Mortalitätscurve und Formulirung des Sterblichkeitsgesetzes . . . 238
Wahrscheinlichkeit der fernern Lebensdauer für jedes Alter . . . 239
Die wahrscheinliche künftige Lebensdauer 241
Die mittlere Lebensdauer 242
Anwendung der Sterblichkeitstabellen zur Volkszählung nach Altersklassen 245

V.

Anstalten, welche auf die menschliche Sterblichkeit gegründet sind.

I. Leibrenten- und Lebens-Versicherungs-Anstalten.

Seite.

Leibrentenvertrag 248
Leibrente auf einen Kopf 248
Leibrente auf zwei Köpfe 252
Lebensversicherungsvertrag 257
Prämienberechnung für Versicherung auf einzelnes Leben für ein Jahr 259
Prämienberechnung für Versicherung auf einzelnes Leben für mehrere Jahre 260
Prämienberechnung für lebenslängliche Versicherung auf einzelnes Leben 263
Sterbkassen 267
Prämienberechnung für Versicherung auf Ueberlebung 267
Prämienberechnung für Versicherung auf verbundenes Leben . . . 273
Prämienberechnung für Versicherung auf Ueberlebung mit lebenslänglichen Renten 280
Wittwen- und Waisenkassen 284
Aufgeschobene Lebensversicherung 284
Berechnung der Leistungen der Versicherungsanstalt und des Versicherten für aufgeschobene Lebensversicherung 284
Von der unterschiedlichen Anwendung der Sterblichkeitstabellen auf Leibrenten, und Lebensversicherungsanstalten 291
Verbindlichkeiten der Versicherungsanstalt und des Versicherten bei der freiwilligen Aufhebung des Vertrags von Seiten des Letztern 291
Von den verschiedenen Arten von Lebensversicherungsanstalten . . . 292

II. Rentenanstalten.

Theorie der Kapitalauflösung 298
Jahresgesellschaften 350
Altersklassen 351

Seite.
Normalsterblichkeitstabelle 353
Volle Einlagen 359
Theileinlagen 359
Anlegung des Activvermögens der Anstalt 359
Nachzahlungen 359
Eintrittsgeld 359
Normalzinsfuß 359
Rentengutschrift 360
Erstmalige Rentenzahlung 361
Einlagekapital 362
Rentenkapital 362
Zinsrente 362
Bruchkreuzerfonds 363
Rückvergütung beim Abgang eines Mitgliedes 363
Gleichstellung zwischen den Theileinlagen und den vollen Einlagen . 364
Maximum der Theileinlagen 367
Reservefonds 368
Verwaltungsfonds 368
Vertheilung der Verwaltungsüberschüsse 369
Uebekschüsse des Reservefonds 369
Jahresrente und Rentenmaximum 370
Verbindung von Depositenkassen u. Creditinstituten mit Rentenanstalten 381
Schlußbemerkung 381

VI.

Allgemeine Theorie der Zeitrenten, Leibrenten und Anwartschaften.

Erste Abtheilung.

Zeitrenten.

Unveränderliche Zeitrente 382
Anwendung der Zeitrentenrechnung auf die Ablösung von Feudallasten und Baulasten und auf die Arbitrage für öffentliche Arbeiten . 383
Veränderliche Zeitrente 390

Zweite Abtheilung.

Leibrenten.

Erster Abschnitt.

Verschiedene Methoden zur Berechnung der Leibrenten.

Seite.
Unveränderliche und veränderliche Leibrenten 401
Berechnung der unveränderlichen Leibrenten vermittelst der Decremente 402
Berechnung der unveränderlichen Leibrenten vermittelst der Differenzen der Decremente 404
Berechnung der Leibrenten nach der Hypothese von Moivre . . . 406
Von besondern Bedingungen des Leibrentenvertrags 414
Vom Werth der halbjährlich, vierteljährlich ꝛc. zahlbaren Leibrente 417
Berechnung der veränderlichen Leibrenten 424

Zweiter Abschnitt.

Von den aufgeschobenen, temporären und aufgesparten Leibrenten.

Aufgeschobene Leibrenten 427
Temporäre Leibrenten 429
Aufgesparte Leibrenten 430

Dritter Abschnitt.

Von den Leibrenten auf das kürzeste Leben mehrerer Personen. . . . 431

Vierter Abschnitt.

Von den Leibrenten auf das längste Leben mehrerer Personen . . . 436

Fünfter Abschnitt.

Von der Werthsbestimmung der getheilten Leibrente in Beziehung auf die gemeinschaftlichen Besitzer derselben 439

Dritte Abtheilung.

Anwartschaften.

Erster Abschnitt.

Von den Ueberlebungsrenten.

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben mehrerer Personen lautet, und deren Auszahlung nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen beginnt 450

Seite.

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben mehrerer Personen lautet, und deren Auszahlung von dem Aussterben bestimmter anderer Personen abhängt 451

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das längste Leben mehrerer Personen lautet, und deren Auszahlung nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen beginnt 452

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das längste Leben mehrerer Personen lautet, und nach dem Aussterben einer Verbindung anderer Personen zahlbar ist 453

Werthsbestimmung der Leibrente, deren Auszahlung von einer bestimmten Ordnung des Ueberlebens in Beziehung auf andere Personen abhängt 456

Zweiter Abschnitt.

Von der Lebensversicherung.

Erster Unterabschnitt.

Von derjenigen Lebensversicherung, welche, abgesehen von Zeitbestimmungen, ohne weitere Bedingung auf dem Ableben mehrerer Personen beruht.

Berechnung des Werths eines versicherten Kapitals 463

Von den halbjährlich, vierteljährlich u. s. w. zahlbaren Lebensversicherungen 464

Aufgeschobene Lebensversicherung 467

Temporäre Lebensversicherung 467

Berechnung des Werths einer versicherten Leibrente 468

Zweiter Unterabschnitt.

Von denjenigen Lebensversicherungen, welche auf einer besondern Ordnung des Ueberlebens beruhen 475

VII.

Assecuranzwesen.

Gegenseitige Assecuranz 476

Assecuranz durch Unternehmer 481

Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen 482

Seite.
Seeassecuranz 490
Hauptgegenstände der Versicherung gegen Seegefahr 491
Taxirte und offene Police der Seeassecuranz 494
Bestimmung des vom Versicherer zu ersetzenden Seeschadens . . . 496
Vertragsgemäße Befreiungen von der Gefahr 506
Assecuranz gegen Feuerschaden 506
Assecuranz gegen Hagelschaden 509
Assecuranz des Viehstandes 513

VIII.

Creditanstalten 515

IX.

Sparkassen 523

Tabellen 526

Einleitung.

Unter politischer Arithmetik oder Staatsrechenkunst versteht man denjenigen Theil der angewandten Mathematik, welcher sich mit der Lösung der bei der Staatsverwaltung vorkommenden Rechnungsaufgaben beschäftigt. Anlaß zu derartigen Rechnungen geben sowohl Verfügungen, welche von der Regierung selbst ausgehen, wie z. B. Gesetze oder Verordnungen über Maaß- und Gewichtswesen, Münzwesen ꝛc., als auch die staatspolizeiliche Prüfung und Beaufsichtigung, welcher öffentliche oder auf Gesellschaftsrecht gegründete Unternehmungen oder Anstalten, z. B. Versicherungsanstalten, Rentenanstalten ꝛc. unterworfen sind.

Bei der großen Mannigfaltigkeit solcher Aufgaben möchte es schwer fallen, ohne häufige und störende Wiederholungen sie unter die Einheit eines, alles umfassenden und doch streng logischen Systems zu bringen. Uns scheint es, von dem Gesichtspunkte des natürlichen Zusammenhangs der einzelnen Materien ausgehend (welchen Zusammenhang die Bearbeitung nachweist), zweckmäßig, unsern Stoff unter folgenden Abtheilungen zu behandeln:

1) Maaß- und Gewichtswesen,
2) Finanzwesen,
3) Zahlenverhältnisse der Bevölkerung,

4) Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens,
5) Anstalten, welche auf die menschliche Sterblichkeit gegründet sind,
6) allgemeine Theorie der Zeitrenten, Leibrenten und Anwartschaften,
7) Assecuranzwesen,
8) Creditanstalten,
9) Sparkassen.

Obgleich die mathematischen Ausführungen nach dem Zweck unseres Werkes auf die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Anwendungen zu beschränken wären, so mußten wir doch hiervon einzelne Ausnahmen machen, und die vorkommenden Fragen vom theoretischen Standpunkte aus weiter beleuchten. Insbesondere schien es uns angemessen, dem Abschnitt über die auf die menschliche Sterblichkeit gegründeten Anstalten die allgemeine Theorie der Zeitrenten, Leibrenten und Anwartschaften folgen zu lassen, wobei wir Gelegenheit fanden, noch verschiedene andere Anwendungen zu berühren, die in den früheren Abschnitten ohne Störung des Zusammenhangs nicht besprochen werden konnten.

I.

Maaß- und Gewichtswesen.

1. Die Maaße dienen zur Quantitätsbestimmung in Beziehung auf den Raum, welchen ein Körper einnimmt, und vermittelst der Gewichte wird die Quantität in Beziehung auf die Ausfüllung des Raumes nach der Masse, d. h. der Gesammtmenge der materiellen Theile eines Körpers, bestimmt.

2. Die Menge der in einem bestimmten Volumen enthaltenen materiellen Theile bestimmt die Dichtigkeit des Körpers. Den Raum, welchen die Körper einnehmen, erfüllen sie nicht ganz, d. h. sie schließen Zwischenräume ein, welche man Poren nennt, und diese Eigenschaft, welche alle Körper haben, heißt Porosität. Je nachdem ein Körper mehr oder weniger Poren als ein anderer hat, ist er lockerer oder dichter als der andere.

Specifisches und absolutes Gewicht.

3. Wenn zwei Körper von gleichem Rauminhalte gleich dicht sind, so müssen sie gleiches Gewicht haben, weil ihre Massen gleich sind. Sind aber die Körper nicht gleich dicht, so wird, wenn sie gleichen Rauminhalt haben, der dichtere mehr Masse und also auch mehr Gewicht haben, als der weniger dichte Körper. Aus den Gewichtsverhältnissen der Körper von einem bestimmten Rauminhalte läßt sich daher der Grad der Dichtigkeit derselben bestimmen; jedoch nur vergleichsweise, und es muß also irgend ein Körper als Einheit angenommen werden. Für feste und tropfbar flüssige Körper hat man hierzu ein Raumtheil reinen, destillirten Wassers von einer bestimmten Temperatur, und für luftförmige Körper ein Raumtheil trockner atmosphärischer Luft von einer bestimmten Temperatur gewählt. Hat man z. B. gefunden, daß 1 neubadischer Kubikfuß destillirtes Wasser bei $14\frac{2}{5}$° Reaumur 53,892 neubadische Pf., 1 Kubikfuß Tannenholz 29,9 Pf., und 1 Kubikfuß gegossenes Eisen 388,4 Pf. wiegen, so weiß man, wie sich diese Körper hinsichtlich ihrer Dich-

tigkeit zu einander verhalten, und die Zahlen, welche das einem Rauminhalt von 1 Kubikfuß entsprechende Gewicht jener Körper ausdrücken, nennt man die specifischen Gewichte derselben. Weil es aber hierbei nur auf die Verhältnisse der Gewichte ankommt, so kann man zur Vereinfachung alle Zahlen durch 53,892, als dem Gewichte von 1 Kubikfuß Wasser, dividiren, woraus sich, in Beziehung auf Obiges, folgende specifische Gewichte ergeben: für Wasser $\frac{53,892}{53,892} = 1$; für Tannenholz $\frac{29,9}{53,892} = 0,55$; für gegossenes Eisen $\frac{388,4}{53,892} = 7,2$.

Der Druck, welchen jeder Körper, vermöge der Schwere, auf seine Unterlage ausübt, heißt, im Gegensatze des specifischen Gewichts, absolutes Gewicht.

Wagen. 4. Die mechanischen Vorrichtungen zur Bestimmung des absoluten Gewichts der Körper nennt man Wagen, und ihre Construction und Wirkung beruht auf den Gesetzen des Hebels. Die gebräuchlichsten Wagen für den gewöhnlichen Verkehr sind die Krämerwage und die Schnellwage.

Die Krämerwage besteht aus einem gleicharmigen Hebel, an dessen Enden vermittelst Schnüren oder Ketten die Wagschalen befestigt sind. In der Mitte des Wagbalkens befinden sich Zapfen in senkrechter Richtung auf denselben; sie spielen in den Löchern der Schere, welche lothrecht herabhängt, wenn man sie an ihrem beweglichen Ringe hält. Macht nun der Wagbalken rechte Winkel mit der Schere, so steht er horizontal oder im Gleichgewicht. Damit man dies aber besser wahrnehmen könne, so sitzt in der Mitte des Wagbalkens genau über den Zapfen ein dünnes Stängelchen, die sogenannte Zunge fest, und macht mit dem Wagbalken rechte Winkel. Spielt nun die Zunge mitten in der Schere, so steht der Wagbalken im Gleichgewicht; macht aber die Zunge einen Winkel mit der Schere, so macht auch der Wagbalken einen eben so großen Winkel mit einer durch den Ruhepunkt gehenden horizontalen Linie; er steht alsdann nicht im Gleichgewicht und die Abweichung der Zunge von der lothrechten Lage, nachdem der Balken zu schwingen aufgehört hat, nennt man den Ausschlag. Die Wage ist empfindlich, wenn schon ein sehr kleines Gewicht ihr Gleichgewicht stört. Soll man aber einen sehr kleinen Ausschlag

wahrnehmen können, so muß die Zunge und Schere von gehöriger Länge seyn. Auch muß der Schwerpunkt des Wagbalkens etwas unterhalb der Zapfen liegen. Je tiefer der Schwerpunkt unter derselben liegt, desto geringer ist die Empfindlichkeit der Wage. Säßen aber die Zapfen gerade im Schwerpunkt, so würde sich bei der geringsten Ueberwucht eines Arms der Wagbalken gleich lothrecht stellen. Die Wage ist auch, unter übrigens gleichen Umständen, desto empfindlicher, je geringer die Reibung der Zapfen in ihren Löchern oder Pfannen ist. Probir- und Goldwagen müssen sehr empfindlich seyn; bei der gewöhnlichen Krämerwage wäre aber eine so große Empfindlichkeit begreiflicherweise ein Fehler. Die Arme des Wagbalkens müssen genau von gleicher Länge und von gleichem Gewichte seyn; die Wagschalen sammt Seilen oder Ketten müssen ebenfalls gleiches Gewicht haben, und gleichweit von den Zapfen aufgehängt seyn, und die Aufhängepunkte müssen mit dem Schwerpunkt des Wagbalkens in gerader Linie liegen. Ist der Wagbalken nicht beschwert, oder auch gleich stark beschwert, so muß er genau horizontal stehen. Wenn die Arme einer Krämerwage von ungleicher Länge sind, und wenn sich der Wagbalken gleichwohl horizontal stellt, weil an dem kürzern Arme eine verhältnißmäßig schwerere Schale als an dem längern Arme hängt, so heißt die Wage falsch. Dieß läßt sich erkennen, wenn man, nachdem man einen Körper gewogen hat, die Wagschalen verwechselt, wornach der Wagbalken sich nicht horizontal stellt, wenn die Wage falsch ist. Vermittelst einer falschen Wage kann man aber dennoch das Gewicht eines Körpers bestimmen, und zwar auf folgende Weise. Man wägt den Körper am längern Arme und am kürzern Arme, multiplicirt die gefundenen Gewichte mit einander, und zieht aus dem Produkt die Quadratwurzel. Bezeichnet nämlich a die Länge des längern Arms, und b diejenige des kürzern Arms, ist g das falsche Gewicht am längern Arme, h das falsche Gewicht am kürzern Arme, und x das wahre Gewicht (wornach also x kleiner als g und größer als h ist), so hat man folgende Proportionen:

$$g : x = b : a$$
$$h : x = a : b$$

wonach $x^2 = gh$ und $x = \sqrt{gh}$.

Es können aber nicht nur

1) die Arme der Wage ungleich, und

2) die eine Wagschale schwerer als die andere seyn, sondern es kann auch

3) der eine Arm schwerer als der andere seyn, und alle diese Fehler können sich wechselseitig aufheben und die unbeschwerten Wagschalen das vollkommene Gleichgewicht halten.

Man muß daher zuvörderst untersuchen, ob die beiden Arme der Wage ohne angehängte Schalen das Gleichgewicht halten. Wäre in diesem Falle das Gleichgewicht dadurch hervorgebracht, daß der eine längere oder kürzere Arm des Wagbalkens etwas leichter oder schwerer als der andere ist, so wird sich dieser Fehler durch das Anhängen gleich schwerer Wagschalen offenbaren. Da aber das Gewicht der letzteren ungleich seyn kann, so würde der Fehler, wenn die schwerere Schale an dem kürzeren Arm angehängt wird, verborgen bleiben können; daher müßen die Schalen verwechselt werden.

Der Fehler der Ungleichheit der beiden Arme des Wagbalkens, welcher durch die ungleiche Schwere der von ihren Schalen befreiten Arme ausgeglichen wird, kann indessen bei dem Anhängen und Verwechseln gleich schwerer Schalen verborgen bleiben, wenn der Unterschied, den das angehängte Gewicht der Schalen hervorbringen sollte, nicht merklich genug ist. Wenn daher auch die Wage bei Verwechslung der Schalen das Gleichgewicht hält, so kann man einen etwaigen unbedeutenden Fehler durch Auflegung gleicher Gewichte merklicher machen. Man legt z. B. ein Pfundgewicht *a* in die Wagschale A und ein gleiches Gewichtsstück *b* in die Wagschale B. Wenn nun die Wagschale B sinkt und ein Gewicht *m*, welches dem Pfundgewicht *a* zugelegt wird, das Gleichgewicht herstellt, so lege man das Pfundgewicht *b* in die Wagschale A, und das Pfundgewicht *a* nebst dem Gewicht *m* in die Wagschale B. Kommen nun die Schalen oder die Wage in's Gleichgewicht, so liegt der Fehler in den Gewichten; kommt aber die Wage nicht in's Gleichgewicht, und wird das Gleichgewicht wieder hergestellt, wenn man das Gewicht *m* von der Schale B wegnimmt und in die Schale A legt, so kann man daraus schließen, daß die Arme der Wage ungleich sind, und zwar, daß der Arm, an welchem die Schale A hängt, zu kurz ist. Bezeichnet *p* das Pfundgewicht, und ist *m* ein bekannter Theil

des Pfundgewichts, so verhält sich die Länge des kürzern Arms zur Länge des längern Arms $= p : p + m$.

Der Grad der Empfindlichkeit der Wage wird gefunden, wenn man das höchste Gewicht, wofür sie bestimmt ist, auflegt, und nachdem sie das Gleichgewicht erlangt hat, ganz kleine Gewichtstheile hinzulegt, bis die eine Schale sich senkt. Das Verhältniß der beigelegten Gewichte zu dem größten Gewichte, welches die Wage zu tragen bestimmt ist, gibt den Grad der Empfindlichkeit an. Werden die beigelegten Gewichtstheile wieder hinweggenommen, so muß sich die Wagschale wieder erheben und die Wage wieder in's Gleichgewicht kommen. Nach der badischen Maaßordnung z. B. können die Wagen für den gewöhnlichen Gebrauch schon nicht für verwerflich gelten, wenn ihre Empfindlichkeit $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ beträgt, d. h., wenn sie mit dem höchsten Gewichte, wofür sie bestimmt ist, belastet, durch die Auflegung von einem ohngefähr $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{2000}$ Theile dieses höchsten Gewichts in Bewegung gesetzt wird.

Die Schnellwage hat einen Wagbalken, dessen Arme von ungleicher Länge sind; die Last kommt an den kürzeren Arm, und an dem längern Arme wird ein Gewicht, der sogenannte Läufer, so lange hin und her geschoben, bis derselbe mit der Last in's Gleichgewicht kommt, was sich durch die in einer Schere spielenden Zunge wie bei der Krämerwage zeigt. Denkt man sich den ungleicharmigen Hebel als eine geometrische Linie, und läßt man der am kürzern Arme angebrachten Last das Gleichgewicht durch ein am längern Arme verschiebbares, unveränderliches Gewicht, den Läufer, halten, so verhält sich das Gewicht des zu wiegenden Körpers zum Gewicht des Läufers, wie die Entfernung des Läufers vom Ruhepunkt zur Länge des kürzern Hebelarms. Ist z. B. letzterer 6 mal in der Entfernung des Läufers vom Ruhepunkt enthalten, und wiegt der Läufer 8 Pfund, so kann dieses Gewicht einer Last das Gleichgewicht halten, welche $6 \times 8 = 48$ Pfund schwer ist. Am längern Arme der Schnellwage befinden sich Einschnitte und bei jedem Einschnitt steht die Anzahl der Gewichtseinheiten (Centner, Pfund ꝛc.), mit welchen der daran geschobene Läufer

im Gleichgewicht ſteht. Die Entfernungen dieſer Stellen oder Einſchnitte können zwar berechnet werden, ſie laſſen ſich aber noch ſicherer durch Verſuche finden. Was über die Beſtimmung des Grads der Empfindlichkeit der Krämerwage geſagt worden iſt, gilt auch von der Schnellwage. Nach der badiſchen Maaßordnung z. B. ſind Schnellwagen nicht verwerflich, wenn ihre Empfindlichkeit, je nach ihrer Beſtimmung, $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{250}$ beträgt.

Dimenſionsmaaße.

5. Von dem zur Meſſung der Länge angenommenen Maaße können alle übrigen Maaße hergeleitet werden; denn das Quadrat, deſſen Seiten ſo lang wie das Längenmaaß ſind, gibt das Flächenmaaß; der Würfel, deſſen Flächen ſo groß wie das Flächenmaaß ſind, gibt das Kubikmaaß, und ſelbſt das Schwermaaß kann mit dem Längenmaaß in ſofern in Zuſammenhang ſtehen, als das Gewicht der Kubikeinheit eines hierzu tauglichen Körpers als Gewichtseinheit gebraucht werden kann.

6. Das einem Maaßſyſtem zum Grunde gelegte Längenmaaß, und die demſelben entſprechenden übrigen Maaße ſind aber nicht für alle Dinge, deren Dimenſionen oder Gewicht gemeſſen werden ſoll, tauglich; es müſſen daher von dieſen Maaßeinheiten Vervielfachungen und Unterabtheilungen angenommen werden, welche ſelbſt wieder als Maaßeinheiten für die Dinge, zu deren Größe ſie ſich ſchicken, dienen, und die Abtheilungen müſſen von der Beſchaffenheit ſeyn, daß ſie leichte Rechnung geben. Hierzu iſt das Decimalſyſtem am geeignetſten, obgleich auch das Duodecimalſyſtem ſeine Vorzüge hat, und namentlich von den untern Ständen wegen der größern Theilbarkeit der Zahl 12 vorgezogen wird.

Normal- oder Muttermaaße.

7. Die Maaße, nach welchen die für den Verkehr beſtimmten Meßgeräthe (Maaßſtäbe, Gefäße und Gewichte) geſetzlich gefertigt werden müſſen, nennt man Normal- oder Muttermaaße. Die Meßgeräthe werden aber nicht ſo genau gemacht, daß ſie ſelbſt wieder als Muttermaaße gebraucht werden könnten, wenn die Orginalmaaße im Verlaufe der Zeiten verloren gingen. Weil nun der Verluſt der Muttermaaße immer möglich bleibt, und ohnehin in den meiſten Ländern die Muttermaaße ſehr willkührlich angenommen ſind, ſo hat man in neuerer Zeit darauf Bedacht genommen, dem Maaß- und Gewichtsweſen irgend eine natürliche, keiner Veränderung

unterworfene Größe zum Grunde zu legen, so daß die Muttermaaße, falls sie zerstört würden, wieder neu verfertigt werden könnten.

Zu einer solchen Größe kann das Secundenpendel in der Länge, die es in der Hauptstadt des Landes hat, dienen. So hat man in England den Secundenpendel bei der Bestimmung des Maaß- und Gewichtsystems von 1823 in sofern angenommen, als die Länge des Grundlängenmaaßes mit dem Pendel verglichen ward. Das alte Grundmaaß (Imperial Standard-Yard) festgesetzte Yard verhält sich zur Länge des Pendels, der in der Breite von London Secunden der mittlern Zeit durch seine Schwingungen angibt, und zwar im luftleeren Raum und in gleicher Höhe mit der Oberfläche des Meeres, wie 36 : 39,1393.

Bei der Einführung des neuen Maaßsystems in Frankreich hat man sowohl auf die Annahme einer unveränderlichen Längeneinheit als auch auf eine bequemere Eintheilung der Maaße Rücksicht genommen. Sämmtliche französische Maaße sind nämlich nach den auf Befehl der Regierung vorgenommenen Meridianausmessungen von einem neuen französischen Meridian-Decimal-Grad, deren 100 auf den Quadranten und 400 auf den Meridian gehen, hergenommen. Ein solcher Grad hält 51307,4 französische Toisen, und ein Hundertthausendtheil ist die Einheit der Längenmaaße und heißt Meter. Aus dem Längenmaaße hat man die Flächenmaaße, aus diesen die Körpermaaße und aus diesen die Schwermaaße bestimmt, und endlich die sämmtlichen Eintheilungen der neuen Maaße, Gewichte und Münzen nach dem Decimalsystem festgesetzt. Damit man aber in der Folge der Zeit, wenn keine Muttermaaße mehr vorhanden wären, keine neuen Meridianmessungen zu machen habe, so hat man das Verhältniß des Meters zur Länge des Secundenpendels in Paris ausgemittelt, wonach solche 0,741887 Meter beträgt.

Die Einheit für das Flächenmaaß = 1 Quadratmeter heißt Are; die Einheit für das Körpermaaß = 1 Kubikmeter heißt Stère; die Einheit für das Hohlmaaß = 1 Kubicdecimeter heißt Litre; das Gramme ist die Einheit für das Schwermaaß, und ist gleich dem Gewichte von einem Kubikcentimeter oder Decilitre auf dem Eispunkt destillirten Wassers. In Betreff

der Benennung der Maaße und Gewichte ist zu bemerken, daß die dabei eingeführten lateinischen Wörter verkleinern, und die griechischen Wörter vergrößern. Die lateinischen Namen sind: Decem, 10; Centum, 100; Mille, 1000. Die griechischen Namen sind: Deka, 10; Dekaton, 100; Kilion, 1000; Myrias, 10000. Es bedeutet also zur Verkleinerung Deci $^1/_{10}$, Centi $^1/_{100}$, Mille $^1/_{1000}$. Zur Vergrößerung bedeutet: Deka das 10fache, Hekto das 100fache, Kilo das 1000fache, Myria das 10000fache, wie aus folgendem Schema zu ersehen:

Längenmaaße.	Meter.
Myriameter	10000
Kilometer	1000
Hektometer	100
Dekameter	10
Meter	1
Decimeter	$^1/_{10}$
Centimeter	$^1/_{100}$
Millimeter	$^1/_{1000}$
Flächenmaaße.	Are.
Myriare	10000
Kilare	1000
Hektare	100
Dekare	10
Are	1
Deciare	$^1/_{10}$
Centiare	$^1/_{100}$
Milliare	$^1/_{1000}$
Körpermaaße.	Liter.
Myrialiter	10000
Kiloliter (Holzstère)	1000
Hektoliter	100
Dekaliter	10
Liter	1
Deciliter	$^1/_{10}$
Centiliter	$^1/_{100}$
Milliliter	$^1/_{1000}$
Gewichte.	Gramm.
Myriagramm	10000
Kilogramm	1000

Gewichte.	Gramm.
Hektogramm	100
Dekagramm	10
Gramm	1
Decigramm	$^1/_{10}$
Centigramm	$^1/_{100}$
Milligramm	$^1/_{1000}$

Auch das französische Münzwesen steht mit dem metrischen Maaß- und Gewichtssystem im Zusammenhang, indem die Schwere und der Durchmesser der Goldmünzen und der größern Silbermünzen so festgesetzt sind, daß man sich dieser Münzen als Schwermaaß und Längenmaaß bedienen kann.

Es wiegen nämlich:

1 Zweifrankenstück 1 Decagramm;

4 Fünffrankenstücke } 1 Hektogramm;
oder 2 Zweifrankenstücke }

155 Zwanzigffrankenstücke } 1 Kilogramm.
oder 40 Fünffrankenstücke }

Man erhält den Meter, wenn man in gerader Linie aneinander legt:

32 Vierzigfrankenstücke und 80 Zwanzigfrankenstücke;
11 Vierzigfrankenstücke und 34 Zwanzigfrankenstücke;
19 Fünffrankenstücke und 11 Zweifrankenstücke;
20 Zweifrankenstücke und 20 Fünffrankenstücke.*)

An das metrische System haben sich, auf mehr oder weniger zweckmäßige Art, mehrere Länder angeschlossen, z. B. das Großherzogthum Baden. Die Einheit der Längenmaaße ist der Fuß von 3 Decimeter oder $^3/_{10}$ Meter, und wird zehentheilig in Zolle, Linien und Punkte getheilt. Die Elle = 2 Fuß; die Ruthe = 10 Fuß; das Klafter = 6 Fuß; die Wegstunde = 14815 Fuß; die Meile = 2 Wegstunden; 100 Quadratruthen = 1 Viertel; 4 Viertel = 1 Morgen. Die Körpermaaße sind die Kubi der Längenmaaße. Ausnahmsweise ist das Brennholzklafter 6 Fuß hoch und breit, bei einer Scheitlänge von 4 Fuß. Die Einheit der Hohlmaaße ist das Meßlein, und die

*) Dies gilt indessen genau nur von den vor 1830 geprägten Münzen, deren Randschrift vertieft ist. Die nach 1830 gefertigten Münzen haben zwar denselben Durchmesser wie die früheren, aber eine erhabene Randschrift.

Maas von $^1/_{13}$ Kubikfuß des neuen badischen oder von 1½ Kubikdecimeter oder 1½ Liter des metrischen Maaßes.

Die Maaße für sackfähige und flüßige Dinge sind in ihren zehentheiligen Abstufungen:

für sackfähige Dinge,		für flüssige Dinge,		Maas.
der Zuber	=	das Fuder	=	1000
das Malter	=	die Ohm	=	100
der Sester	=	die Stütze	=	10
das Meßlein	=	die Maas	=	1
der Becher	=	das Glas	=	$^1/_{10}$

Zum Gebrauche sind Halbsester und Doppelsester, Halbmeßlein und Doppelmeßlein, die Halbmaas, der Schoppen und Halbschoppen, als Hälfte, Viertel und Achtel der Maas gestattet.

Die Einheit der Gewichte, das Pfund, beträgt ½ Kilogramm des metrischen Systems. Die Stufen aufwärts vom Pfund geben den Stein von 10 Pfund, den Zentner von 100 Pfund. Abwärts sind sie für Rechnung zehentheilig in Zehenlinge, Centaß, Dekaß und Aß eingetheilt. Für den Verkehr aber soll das Pfund nach rein fortgesetzten Halbirungen seine Marke, Vierlinge, Halbvierlinge, Unzen, Lothe, Halblothe, Quentchen, Halbquentchen, und dann weiter vom Quentchen herab, nach Vierteln herabsteigend, seine Pfenninge, Karate, Grane, Gränchen, und Richttheile haben, so daß die Mark aus 65536, also das Pfund aus 131072 solcher Richttheile besteht. — Den Apotheken ist zur Zeit noch die Beibehaltung ihres bisherigen Medicinalgewichts erlaubt. Das Münzgewicht bleibt ebenfalls die cölnische Mark.

8. Soll bestimmt werden, wie sich die Maaße und Gewichte eines Landes zu denjenigen eines andern Landes verhalten, so geschieht dies entweder durch Berechnung, vermittelst der Verhältnisse beider Maaße und Gewichte zu einem Dritten oder aber durch unmittelbare Vergleichung der fraglichen Maaße und Gewichte.

Vergleichung der Maaße u. Gewichte durch Berechnung.

9. Mehrentheils hat man für die Längenmaaße die alt Pariser Linie (deren 443,295936 = Meter), für die Hohlmaaße den Pariser Kubikzoll und für die Gewichte das holländische Aß (deren 20812,8 = 1 Kilogramm) als Einheiten zur Vergleichung angenommen.

Weiß man z. B., daß die russische Elle = 315,4 Pariser

Linien, und daß die schwedische Elle = 263,2 Pariser Linien, so folgt hieraus, daß 1 schwedische Elle $= \frac{263,2}{315,4}$ russische Ellen oder, daß 1 russische Elle $= \frac{315,4}{263,2}$ schwedische Elle ist.

Ist 1 preußischer Fuß (sonst auch rheinischer Fuß genannt) = 139,13 Pariser Linien, und 1 Darmstädter Fuß = 110,824 Pariser Linien, so folgt, daß 1 preußischer Quadratfuß = $(139,13)^2$ Pariser Quadratlinien, und 1 Darmstädter Quadratfuß = $(110,824)^2$ Pariser Quadratlinien, so daß also 1 preußischer Quadratfuß $= \left(\frac{139,13}{110,824}\right)^2$ Darmstädter Quadratfuß.

Ist 1 Hamburger Quartier (Flüssigkeitsmaaß) = $45\frac{5}{8}$ Pariser Kubikzoll, 1 Berliner Quart = 64 preußische Kubikzoll, 1 preußischer Fuß = 139,13 Pariser Linien, so ergibt sich, da außerdem 1 preußischer Fuß = 12 preußische Zoll, und 1 Pariser Zoll = 12 Pariser Linien, das Verhältniß vom Hamburger Quartier zum Berliner Quart aus der Kette:

x Hamburger Quartier = 1 Berliner Quart
1 = 64 preuß. Kub. Zoll.
$(12)^3$ = 1 „ „ Fuß.
1 = $(139,13)^3$ Par. Kub. Lin.
$(12)^3$ = 1 „ „ Zoll.
$45\frac{5}{8}$ = 1 Hamburger Quart.

$$x = \frac{64(139,13)^3}{45\frac{5}{8}(12)^6}$$

Ist 1 Hamburger Pfund = 10080 holländische Aß, und ein preußisches Pfund = 9734,38 holländische Aß, so folgt daß 1 preußisches Pfund $= \frac{9734,38}{10080,92}$ Hamburger Pfund, oder daß 1 Hamburger Pfund $= \frac{10080,92}{9734,38}$ preußische Pfund.

Approximative Maaß- und Gewichtsverhältnisse.

10. Sollten kleinere Verhältnißzahlen ausgemittelt werden, vermittelst welcher sich die fraglichen Werthe, unbeschadet der für den gewöhnlichen Verkehr erforderlichen Genauigkeit, vergleichen lassen, so gelangt man hierzu, wenn man das auf kleinere Zahlen zurückzuführende Verhältniß in einen Kettenbruch verwandelt. — Hierzu folgendes Beispiel. Es sind 100

Zollpfund = 89,286 bayer'sche Pfund; das Verhältniß vom Zollpfund zum bayer'schen Pfund ist mithin $\frac{89,286}{100} = \frac{89286}{100000}$. Verwandelt man diesen Bruch in einen Kettenbruch, so ist

$$\frac{89286}{100000} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{445} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$$

Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind:
$\frac{8}{9'}$ $\frac{17}{19'}$ $\frac{25}{28'}$ $\frac{11142}{12479'}$ $\frac{11167}{12507}$; hält man sich an den dritten dieser Brüche, so sind 25 bayer'sche Pfund = 28 Zollpfund, in Uebereinstimmung mit dem im Tarif angenommenen Verhältniß. — Anderes Beispiel: Es sind 100 Zollpfund = 106,904 preußische Pfund; das Verhältniß ist mithin $= \frac{100}{106,904}$ $= \frac{100006}{106904}$; der Kettenbruch ist:

$$\frac{100000}{106904} = \frac{1}{1} + \frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2} + \frac{1}{13}$$

Die Näherungsbrüche sind:
$\frac{1}{1'}$ $\frac{14}{15'}$ $\frac{29}{31'}$ $\frac{449}{480'}$ $\frac{927}{991}$; hält man sich an den zweiten dieser Brüche, so sind 15 preußische Pfund = 14 Zollpfund; ebenfalls in Uebereinstimmung mit dem im Tarif angenommenen Verhältniß.

Vergleichung der Maaße und Gewichte durch Messen und Abwägen.

11. Mehrentheils gilt die ganze Länge eines Normalmaaßstabs oder Etalons als das richtige Maaß; der Maaßstab kann aber auch etwas länger als das Maaß seyn, in welchem Falle dasselbe durch feine Striche abgegränzt ist. Erstere Art von Etalons nennt man im Französischen étalons à bouts, die andere étalons à traits. Da aber jede Substanz den Temperaturveränderungen unterworfen ist, so kann eine auf einem Etalon abgetragene Länge nur bei einer bestimmten Temperatur die wahre Länge des Maaßes seyn. Es muß daher für jeden

Etalon eine Normaltemperatur festgesetzt seyn, bei welcher er seine richtige Länge hat, und wenn zwei Etalons mit einander verglichen werden sollen, so muß dabei auf die Temperatur Rücksicht genommen werden.

Nach den Versuchen von Borda ist für jeden Grad des Thermometers zwischen 0° und 100° die Ausdehnung des Platins = 0,0000056, des Eisens = 0,00001156, und des Messings = 0,00001783, d. h. um einen solchen Theil seiner Dimensionen nimmt jedes dieser Metalle zu, wenn die Temperatur sich um 1° erhöht.

Das Normalmaaß der alt französischen Längeneinheit, der Toise (die toise du Pérou, welche Condamine im Jahre 1740 bei der Gradmessung unter dem Aequator gebrauchte), ein eiserner Etalon à bouts, 17 bis 18 Pariser Linien breit, 4 Linien dick, hat seine rechte Länge bei 16°,25 (13° Reaumur). Der mit dieser Toise auf der Pariser Sternwarte aufbewahrte Meter ist ein Platinstab, und seine Normaltemperatur ist 0°. Es sey nun, in Beziehung auf Obiges, die Frage zu beantworten, wie sich diese Etalons beide auf die Temperatur 0° gebracht verhalten.

Wenn der eiserne Maaßstab von 16°,25 auf 0° erkaltet, so verkleinern sich seine Theile, und es wird also der Meter, welcher bei 0° seine rechte Länge hat, mit ihm zusammengehalten, mehr von diesen Theilen decken. So ist demnach die Länge des Meter mit der toise du Pérou bei 0° verglichen nicht mehr 443,296 (*), Pariser Linien, sondern
$443{,}296\ (1 + 16{,}25 \times 0{,}00001156) = 443{,}'''379$.

Anderes Beispiel. Ein messingener Meter soll bei 16°,3 seine normale Länge haben; um dies zu untersuchen vergleicht man ihn bei 22° Temperatur mit obigem Meter von Platin; es ist demnach die Frage zu beantworten, wie viel von diesem der erste decken müsse.

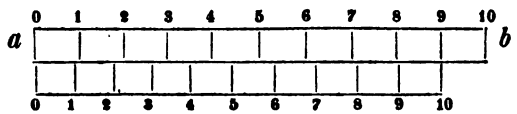
Die Länge des Platinstabs bei 22° ist $1 + 22 \times 0{,}00000856 = 1{,}00018832$, und die Länge des messingenen Meters bei 22° ist $1 + (22° - 16°{,}3)\ 0{,}00001783 = 1 + 5{,}7 \times 0{,}0001783 = 1{,}00010163$. Ist also die Länge des Platinstabs = 1, so ist

*) 1/6 Toise 1′ = 12″ = 144‴ und 1 Meter = 0,513074 Toise = 3′ 11″ = 296 = 443‴,296.

diejenige des messingenen Stabs $= \frac{1{,}00010163}{1{,}00018832} = 0{,}^{m}9999133$;

d. h. so viel von dem auf 22° gebrachten Platinameter muß der auf dieselbe Temperatur gebrachte messingene Meter decken, wenn er bei 16,°25 genau $= 1^{m}$ seyn soll.

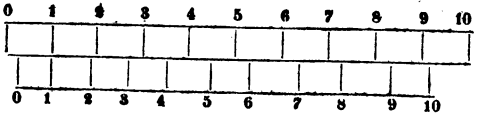
12. Zur genauen Vergleichung des landüblichen Längenmaaßes mit andern Maaßen bedarf man eines eigens hierzu gefertigten Instruments, welches Comparator genannt wird. Der Hauptheil desselben ist ein aus Metall (Eisen, Messing ꝛc.) gefertigter und mit einer hölzernen Unterlage versehener Stab, welcher etwas länger als das landübliche Maaß ist, und eine feine Eintheilung hat, welch' letztere wohl auch auf einem im Stabe eingelassenen Silberstreifen aufgetragen ist. Auf diesen Stab werden die mit dem darauf befindlichen Maaß zu vergleichenden Maaßstäbe gelegt, und vermittelst eines Verniers und Vergrößerungsglases wird abgelesen, wie groß das fragliche Maaß ist. Der Vernier oder Nonius dient dazu, Theile zu lesen, welche nicht auf der Theilung des Stabs stehen, und das Vergrößerungsglas ist erforderlich, weil die Theilstriche dem unbewaffneten Auge nicht sichtbar sind. Vermittelst des Verniers werden kleine Größen durch den Unterschied zweier kleinen Maaßstäbe gemessen. Theilt man z. B. die Länge von 9 Maaßtheilen des Maaßstabs *a b* in 10 Theile, so hat man einen Nonius, welcher die Zehntel angibt.



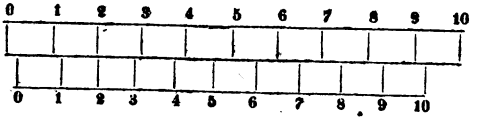
Denn da 10 Noniustheile 9 Maaßtheile ausmachen, oder 1 Noniustheil $^{9}/_{10}$ Maaßtheile macht, so ist der

1te Noniustheilstrich von dem 1. Maaßtheilstr. um 0,1 entfernt,
2te " " " 2. " " 0,2 "
3te " " " 3. " " 0,3 "
.
.
.
9te " " " 9. " " 0,9 "

Schiebt man also den Nonius um 0,1 vorwärts, wie in beistehender Figur,



so zeigt das Ende oder der Index auf 9,1 Maaßtheile, oder der Anfang auf 0,1. Schiebt man, wie in der dritten Figur,



den Nonius um 0,2 vorwärts, so fällt der 2te Theilstrich des Nonius mit dem 2ten Maaßtheil zusammen und das Ende zeigt auf 9,2, oder der Anfang auf 0,2 u. s. w.

Soll nun der Nonius Viertel, Fünftel oder überhaupt *n*tel von Maaßtheilen angeben, so theilt man 3 in 4, 4 in 5, oder allgemein, n in $n+1$ Theile. Trift es sich, daß der Index, wenn er an das Ende einer abzumessenden Linie gebracht wird, so liegt, daß kein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstrich des Maaßstabes genau zusammenfällt, so rechnet man nach demjenigen, welcher am nächsten bei einem Maaßtheile liegt, und das Fehlende wird geschätzt.

Die Eintheilung des auf der Pariser Sternwarte befindlichen Comparators gibt unmittelbar 10000 Theile der Toise, und der Nonius 100000 Theile; die Millionentheile werden im Vergrößerungsglase geschätzt.

Statt des Nonius gebraucht man auch zu obigem Zweck die Mikrometerschraube, eine sehr fein geschnittene Schraube, die so viele Umdrehungen auf einen sehr kleinen Maaßtheil hat, daß man vermittelst unterschiedlicher Vorrichtungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde, sehr feine Messungen damit vornehmen kann.

13. Zur genauen Vergleichung der Schwermaaße gebraucht man begreiflich die vollkommensten Wagen. In Beziehung auf die Genauigkeit, welche man damit zu erreichen vermag, kann man fragen, wie kleine Größen man überhaupt noch wiegen, und auf den wievielsten Theil des ganzen Gewichts man einstehen kann. Nach Dove's Angaben (über Maaß und Messen ꝛc. zweite Aufl., Berlin 1835), sind folgendes die bisher erreichten Grenzen für die Hebelwagen:

1) Gleicharmige Hebelwagen. Die von Robinson zu den neuesten englischen Gewichtsbestimmungen angefertigte Wage dürfte unter den größeren Wagen die empfindlichste seyn, denn sie gab mit 250 Troy-Pfund in jeder Schale bei 1 Grain einen Ausschlag von $\frac{1}{1750000}$ der ganzen Belastung.

Die von Ramsden für die Royal Society angefertigte gab $\frac{1}{1000000}$ bei 10 Pfund Belastung.

Die von Florenz in Wien verfertigten geben bei 4½ Belastung noch bei $\frac{1}{4718592}$ einen deutlichen Ausschlag; hingegen die von Fortin (in Paris) bei 4 Pfund Belastung $\frac{1}{1536000}$ an.

Die von Troughton verfertigte Wage gab $\frac{1}{100}$ Grain bei 16384 Troy-Grain Belastung auf jeder Seite, also $\frac{1}{1638400}$ an.

2) Schnellwagen. Der kleine Apparat, welchen Black im Jahr 1825 beschrieben hat, scheint für kleine Gewichte die empfindlichste. Er gibt bei 10 Gran Belastung $\frac{1}{1000}$ Grain.

Was nun das Abwägen selbst betrifft, so ist das beste Verfahren, den unvermeidlichen Fehlern der Wage zu entgehen, dasjenige, welches in Paris bei den Bestimmungen des Kilograms befolgt wurde.*) Es besteht darin, daß man den abzuwägenden Körper K mit irgend einem andern dazu tauglichen Körper L auf der Wage genau in's Gleichgewicht bringt, dann K von der Schale wegnimmt, und an dessen Stelle so viel Gewicht P auflegt, daß es mit dem an seiner Stelle gebliebenen L ebenfalls das Gleichgewicht herstellt. Das zu diesem zweiten Gleichgewicht erforderlich gewesene Gewicht P ist nun das wahre Gewicht von K, weil es unter ganz gleichen Umständen den gleichen Druck wie K auf der Schale ausübte.

14. Zur Vergleichung der Hohlmaaße füllt man das landübliche Hohlmaaß bis an den Rand mit dem reinsten und dichtesten Wasser und gießt es in das damit zu vergleichende Gefäß, und fährt so lange mit Auffüllen aus dem landüblichen Maaße

*) Wild, über allgemeines Maaß und Gewicht ꝛc. II. S. 42.

und ſeinen Unterabtheilungen fort, bis das Gefäß voll iſt. Hierbei hat man aber, wie weiter unten gezeigt wird, darauf zu ſehen, daß das Gefäß genau bis an den Rand angefüllt werde, und außerdem auf die Temperatur die gehörige Rückſicht zu nehmen. Man kann auch das Waſſer, mit welchem man die mit einander zu vergleichenden Gefäße angefüllt hat, abwägen, und aus den Gewichtsverhältniſſen auf den Kubikinhalt ſchließen.

Vom Eichen der Verkehrsmaaße und Gewichte.

15. Die für den Verkehr gefertigten Maaße und Gewichte müſſen in Folge polizeilicher Anordnungen von obrigkeitlich dazu ernannten Perſonen unterſucht werden, und mit einer Beglaubigung, daß dieß geſchehen ſey, verſehen ſeyn. Dieſe Unterſuchung geſchieht nach den geſetzlichen, übrigens in der Beſchaffenheit der Sache ſelbſt begründeten Verfahrungsarten, und hierunter verſteht man das ſogenannte Eichen. Die Beglaubigung der Richtigkeit des Maaßes und Gewichts geſchieht durch vorgeſchriebene, auf den Maaßen, Gefäßen und Gewichten angebrachte Zeichen. Die nach den Normalmaaßen zur Prüfung der Verkehrsmaaße gefertigten Maaße und Gewichte nennt man Eichmaaße, Eichgewichte.

16. Zum Eichen der hölzernen Hohlmaaße für trockene Dinge mit Samenkörnern wird ein nicht ſonderlich harter oder ſchwerer, rundlicher kleiner Samen genommen, welcher rein, nicht feucht, alſo nicht an einander hängend, nicht rauh, ſondern glatt ſeyn muß. Vorzüglich geeignet dazu iſt der Hirſe, der Kleeſamen und der Rübſamen. Andere Samenkörner ſind dazu nicht tauglich, namentlich nicht Linſen, Erbſen und alle zu große, rauhe Samen, wie Roggen, Kernen, Gerſte ꝛc.

Der Samen darf aber nicht eingeſchüttet werden, ſondern er muß durch einen Trichter laufen. Zur beiſpielsweiſen Darſtellung des weiteren Verfahrens, folgen hier die in der badiſchen Maaßordnung vom Jahr 1828 hierüber enthaltenen Beſtimmungen.

Der Trichter hat eine obere quadratförmige Oeffnung, welche in jeder Seite 13¾ Zoll lang iſt; die quadratförmige Auslauföffnung iſt auf jeder Seite 7 bis 8 Linien lang; die ſenkrechte Entfernung von der Aufſchüttöffnung beträgt 17 Zoll. Es können auch runde Trichter von Blech zum Eichen gebraucht werden, in welchem Falle, bei gleicher Höhe und bei gleichem

Inhalt, wie die vierkantigen Trichter, der Durchmesser der obern Oeffnung 15 Zoll 5 Linien, und der Durchmesser der Auslauföffnung 8 Linien beträgt. Ein eisernes Plättchen, welches an der Auslauföffnung des Trichters in der Seitenwand dergestalt angebracht ist, daß es sich um einen in dieselbe geschlagenen Nagel horizontal dreht, schließt und öffnet den Trichter an seiner untern Oeffnung.

Dieser Trichter wird auf einen Trichterstuhl gesteckt. Dieß ist ein, mit einer kleinen Erhöhung eingefaßtes Brett, 24 Zoll lang und 13 Zoll breit, auf vier festen oder eingeschraubten Füßen, die das Brett in einer Höhe von 2½ Fuß halten. In dessen Mitte ist ein quadratförmiges Loch, so groß, daß der Trichter bis zu ⅓ seiner Höhe hineingeht. Die Entfernung der Auslauföffnung des Trichters vom Boden der zu eichenden Gefäße soll 20 Zoll betragen. Hierzu ist noch ein gerades Lineal zum schärferen Abstreichen des Samens erforderlich.

Ein großes, auf dem Boden ausgebreitetes Tuch, oder auch eine hölzerne, mit einer Einfassung versehenen Unterlage faßt den überfallenden oder abgestrichenen Samen auf. Die Operation muß übrigens auf einem festen Boden, und mit Vermeidung jeder Erschütterung durch Gehen, Fahren, Thürschließen, starken Wind ꝛc., geschehen.

Vor allem wird nun der obere Rand des zu eichenden Gefäßes auf einem Fügbock geebnet, denn selten ist die obere Randfläche des zu eichenden Gefäßes, weder nach der Dicke des Holzes, noch nach dem Umfange desselben rund herum eben.

Nun wird der Samen in den unten geschlossenen Trichter eingeschüttet, und zwar nur etwas weniges mehr, als der Inhalt des Eichgefäßes zur Anfüllung erfordert. Man thut daher gut, den Samen in den Trichter einzumessen, da eine bedeutend stärkere Anfüllung als das Eichmaaß und das darnach zu eichende Gebrauchsmaaß erfordert, ein unrichtiges Resultat geben könnte. Daß aber etwas mehr Samen in den Trichter gelassen wird, ist zum Behufe des genauen Abstreichens des anzufüllenden Eichmaaßes erforderlich.

Damit die Körner frei und durch die ganze Oeffnung auslaufen, muß sodann das Schließloch ganz herum gedreht werden. Man läßt diese nahe in die Mitte des untergestellten Eichgefäßes laufen. Sogleich, nachdem alles ausgelaufen, ebnet und

streicht man es, theils mit dem Barte einer Feder, theils mit dem Lineal sanft ab. Den Inhalt des Eichgefäßes schüttet man vorsichtig in den Trichter auf, und läßt den Samen in das zu eichende, noch unbeschlagene Gefäß laufen, nachdem vorher ein eiserner Steg mit seiner Unterstützungsstange, oder soviel von Holz als beide Stücke dem Raum nach betragen, hineingelegt worden.

Der Raum, den jener Steg und die Unterstützungsstange einnehmen, ändert die Form der größeren hölzernen Maaße, welche damit versehen werden, nur wenig. Die Frucht wird das noch zu große Gefäß nicht ausfüllen; man schüttet daher nach und nach so viele Becher (S. 12) Frucht noch auf, und läßt sie durchlaufen, bis es davon voll wird, und zieht das, was nach dem Ebenen und Abstreichen übrig bleibt, von der Anzahl der nachgeschütteten Becher ab.

Für jeden Becher nun, den die völlige Anfüllung des Gefäßes noch zum Eichmaaß erforderte, kann man die Höhe oder Tiefe eines Sester-Gefäßes um fast ½ Linie niederer machen, weil eine Linie mehr oder weniger in der Tiefe schon 1¾ Becher ausmacht. Beim Halbsester kommt auf 1 Becher fast 1 Linie ꝛc. Hierbei ist noch zu bemerken, daß bei dem Nachschütten Bewegungen vorgehen, in Folge welcher die Frucht sich im Gefäße etwas zusammensetzen kann, daher das zur völligen Anfüllung Erforderliche in dieser Rücksicht eher etwas zu groß, als zu klein ausfallen kann.

Mit einem Streichmodel macht man nun einen Riß am Rand des Gefäßes herum, so weit von letzterem abstehend, als der gefundene Mehrgehalt erfordert, um auf dem Fügblock, oder wenn gar zu viel wegzunehmen wäre, mit der Säge das Ueberflüssige herunter zu nehmen. Hierauf wird das Gefäß wieder auf die vorige Art mit Frucht gemessen, und das bisherige Verfahren so lange wiederholt, bis es ziemlich genau seinen Inhalt hat. Nachdem es hierauf beschlagen, folglich auch mit dem Stege versehen worden, wird noch einmal auf dieselbe Weise geeicht. Hält jetzt das Gefäß zu wenig, so kann man es immer um so viel erweitern, wenn man mit einer Holzraspel innen am Rande mehr ebnet, oder auch da etwas abnimmt, wo das Holz über einander geheftet ist. Hält es zu viel, so feilt man auf dem Rande herum, folglich auch auf dem Stege, da

derselbe mit dem Rande in einer Ebene liegen soll, etwas ab.

Es kommt sehr viel darauf an, daß der Same die gleiche Zeit brauche, in das zu eichende Gefäß zu laufen, wie in das Eichmaaß selbst. Eben so nöthig ist es, die Stellung beider Gefäße so zu ordnen, daß der Boden des einen eben so weit unter der Auslauföffnung sey, als der Boden des andern, denn ein Unterschied von nur 1 Zoll kann Unterschiede in der Frucht- und Samenmenge geben, folglich das Eichen fehlerhaft machen.

Das Abstreichen muß jedesmal dicht über dem obern Rande stets nach einer Seite hin, und nicht über darauf liegende Körner geschehen; auch muß der Trichter für beide Anfüllungen immer nahe gleichviel Frucht enthalten.

Bei obiger Verfahrungsweise wird vorausgesetzt, daß ein Gefäß mit einem gleichgroßen und an Gestalt nicht sehr unähnlichem Gefäße geeicht werde. Wollte man in Ermanglung eines gleichgroßen Eichgefäßes vermittelst eines kleinern durch Wiederholungen ebenfalls mit Frucht eichen, so könnte dieß, ohne besondere Vorsicht, zu beträchtlichen Fehlern Anlaß geben. Es müssen daher die Gebrauchsgefäße mit denjenigen Eichgefäßen, welche den gleichen Inhalt haben, und wenn keine gleichgroße Eichgefäße vorhanden sind, mit solchen geeicht werden, die denselben an Größe am nächsten stehen.

17. In Beziehung auf das Eichen ist es sehr zweckmäßig, wenn die Flüssigkeitsmaaße cylindrisch sind und bis zur Randhöhe gefüllt ihren richtigen Inhalt haben sollen. Dieß schreibt auch die badische Maaßordnung vor. Zum Behufe der leichtern Anfüllung und Ausleerung, dürfen sie aber mit einer in eine Schnauze auslaufenden Stülpe versehen seyn, welche nach vollzogener Eiche an dem Gefäße befestigt werden kann. Da außerdem eine vollkommene Genauigkeit in den vorgeschriebenen Dimensionen bei der Fabrikation der Maaße nicht sogleich erreicht werden kann, so muß dabei in der Höhe etwas zugegeben werden, damit sie durch Abnehmen vom Rande auf den rechten Inhalt gebracht werden können.

Zur genauen Anfüllung der Flüssigkeitsmaaße mit Wasser, dient entweder der Gebrauch eben geschliffener Glasplatten (plateaux obturateurs), die auf den Rand des Gefäßes geschoben werden und die richtige Wassermenge einschließen, oder der Gebrauch des Zungenlineals, welches vermittelst seiner

Stützen auf den Rand gestellt wird, und dessen Zunge alsdann die Wasserfläche in der Mitte bloß berühren muß.

Da die Glasplatten, wenigstens auf derjenigen Seite, womit sie auf dem Rande des Gefäßes aufliegen, eben geschliffen seyn müssen, so kann man kein gewöhnliches Fensterglas, sondern nur etwa Stücke von Spiegeln gebrauchen; die aufliegende Fläche darf nicht die geringste sichtbare oder fühlbare Unebenheit haben. Aber auch der geschliffene Rand des Eichgefäßes muß eben und rein seyn. Denn die geringste Erhöhung, oder irgend eine Unreinigkeit erhebt die ganze Glasplatte, die dadurch den Rand verläßt, und daher ein falsches Leeres, einen zu großen Hohlraum angeben kann. Je größer übrigens der Durchmesser einer Glasplatte oder eines Gefäßes, wozu sie gebraucht wird, ist, desto dicker sollte sie seyn, damit sie sich durch das Halten und Andrücken an den Rand nicht biege.

Das Zungenlineal besteht aus einem metallnen Stäbchen von der Länge des Durchmessers des Gefäßes, zu welchem es gebraucht wird, die Breite seines Randes dazu gerechnet. Von beiden Enden gehen rechtwinklich 4 bis 8 Linien lange Stützen herab, ohngefähr so dick als das Stäbchen selbst, oder so, daß es über jeden Durchmesser des Gefäßes auf dessen Rand von selbst stehe. Aus der Mitte der Länge des Stäbchens senkt sich eine, etwa zwei Linien breite, gegen das Ende schmäler, dünner und abgerundet auslaufende Zunge herab. Das Äußerste dieser Zunge muß mit den Enden beider Stützen genau in einer geraden Linie seyn. Um sich aber der geraden Lage der Stützen und der Zunge zu versichern, stellt man das Zungenlineal auf die Schärfe oder Dicke eines guten Lineals. Auch müssen die Enden der Stützen nicht bloß mit einigen Punkten, sondern mit ihrer ganzen Fläche aufstehen; ob das Letztere geschehe, erkennt man leicht, wenn man, alles gegen die Helle haltend, zwischen durchsieht.

Der Gebrauch der Glasplatte ist folgender. Man schiebt sie trocken, und wagrecht haltend, auf den gereinigten Rand des mit Wasser gefüllten Gefäßes. Ist dieses überfüllt, so wird die Platte das, was zu viel darin ist, daran herausdrücken. Ist es nicht genug angefüllt, so wird sich eine Luftblase darunter zeigen. Arbeitet man mit einer gemessenen Flüssigkeit, von welcher nichts verloren werden darf, so kann man mit einem kleinen

sehr spitzig auslaufenden Stechheber leicht das, was an Wasser zu viel im Gefäße ist, aus demselben herausheben, oder das noch mangelnde hinein tröpfeln lassen.

Leicht und bequem und ohne etwas zu verschütten, leert man, bei einiger Uebung, ein mit Wasser gefülltes und mit der Glasplatte geschlossenes Gefäß in ein anderes aus. Drückt man die Glasplatte sanft an den Rand des Gefäßes an, so kann dieses in jeder Richtung, ohne daß etwas abläuft, also auch fast liegend gehalten und getragen werden, welch' letztere Lage zum Ausleeren erforderlich ist, damit kein Wasser am Gefäß herablaufe. Um dieses Ablaufen desto sicherer zu vermeiden, so bestreiche man die Stelle des Ablaufs am Rande ein wenig mit Unschlitt. Nun wird in dieser schiefen oder fast liegenden Haltung die immer sanft auf dem Rande angedrückte Platte von der Stelle, wo das Wasser auslaufen soll, zurückgezogen, damit zuerst eine Oeffnung entstehe, durch die das Wasser ausfließen kann. Ist ein Theil Wasser langsam abgeflossen, so schließt man das Gefäß durch Vorziehen der Platte, richtet es auf, und zieht die Platte ab, weil sich jetzt das Uebrige wie gewöhnlich ausleeren läßt, ohne daß es am Gefäß herunterläuft.

Ein Gefäß ist mit Wasser zur Prüfung mit dem Zungenlineal richtig angefüllt, wenn dasselbe mit seinen Stützen auf den ebenen und vorher rein abgewischten Rand gestellt, mit der Zunge die Wasserfläche bloß berührt, wenn man also nicht nur zwischen Wasser und Zunge nicht hindurch sehen kann, sondern auch wahrnimmt, daß kein Theil der Zunge in das Wasser hineinreicht. Der kleine Stechheber ist auch hier gut zu gebrauchen, um, was zu viel ist, herauszuheben, ohne die Wasserfläche in Unruhe zu bringen, oder auch das noch Mangelnde zuletzt nicht durch Eintröpfeln, sondern indem man die Spitze des Hebers ins Wasser steckt, so lange und bis zum Augenblick einlaufen zu lassen, wo die Wasserfläche mit der Zunge in Berührung kommt. Hierbei ist nun eine Erscheinung zu beachten, die zur Erreichung einer äußerst genauen Anfüllung sehr dienlich ist. Man sieht nämlich unter der ruhigen Wasserfläche von der Zunge des Lineals auch das Bild der Zunge in verkehrter Stellung. Wenn nun die wirkliche Zunge das Wasser noch nicht berührt, so ist der Abstand ihrer Spitze vom Bilde der Spitze doppelt so groß, als der Abstand der wirklichen Zunge von der Wasserfläche, oder das Bild ist eben

so weit von der Wasserfläche nach unten entfernt, als die wirkliche Zunge nach oben. Ist daher der ganze Abstand von Spitze zu Spitze 1 Linie, so ist die wirkliche Zunge nur ½ Linie von der Wasserfläche. Auf diese Art ist also ein sehr kleiner Abstand der Zunge von der Wasserfläche noch sehr bemerkbar, und man darf das, was zur gänzlichen Anfüllung noch fehlt, oder was das Gefäß zu groß ist, nur nach der Hälfte des bemerkten Abstandes von der wirklichen Zunge zu dem Bilde derselben schätzen. Nur erfordert dieses alles einen ruhigen Stand, sowohl des Gefäßes, als der umgebenden Luft, denn sonst springt das Wasser zu früh an die Zunge, und bleibt daran hängen, wenn auch die eigentliche ganze Wasserfläche noch nicht die richtige Höhe erreicht hat. Eine solche Ruhe ist selten auf einem gewöhnlichen Tische, sondern nur auf einer Mauer, oder auf einem Fenstergesimse eines steinernen Hauses ꝛc., bei ruhiger Luft zu erhalten. Ob das Wasser wirklich bei der Zunge in die Höhe gehoben sey, das kann zwar ein geübtes Auge an den dort, von umherstehenden Dingen zurückgeworfenen Bildern erkennen. Man kann aber auch das Zungenlineal wegnehmen, die Zunge abtrocknen, dann das Lineal wieder mit möglichster Vermeidung jeder Erschütterung vorerst mit der einen Stütze auf den Rand stellen, und dabei genau Acht geben, ob das Wasser schnell oder langsam an die Zunge anspringe, ob diese sich eintauche oder nicht, ob das Wasser rund um die Spitze eben oder in die Höhe gehoben sey. Die Wasserfläche wie die Zunge muß rein seyn, denn das geringste auf dem Wasser schwimmende, oder der Zunge anhängende Fäserchen, kann das Wasser schon emporheben. Eher muß die Zunge fettig, als zuvor schon naß seyn.

Der horizontale Stand des Gefäßes ist durchaus nöthig, besonders wenn man sich des Zungenlineals bedient. Das Gefäß aber, wenn solches anders genau verfertigt ist, und einen gleichweit von seinem Boden abstehenden und ebenen untern Rand hat, erhält seinen horizontalen Stand, indem man solches auf die Mitte eines zu diesem Zweck eingerichteten dreieckigen Brettes stellt, wenn letzteres selbst vorher vermittelst der daran befindlichen Schrauben in eine solche Lage gebracht worden ist, daß die Luftblase einer Dosenlibelle genau in der Mitte des Glases einspielt.

Das Wasser hängt sich in metallenen Gefäßen leicht in großen Tropfen an; es fließt aber größtentheils ab, wenn man die benetzte innere Fläche mit Trippelerde reibt und dann diese wieder ausspült. Weil aber an der benetzten Fläche doch noch etwas Wasser hängen bleibt, so hat man hierauf gehörige Rücksicht zu nehmen, und es muß das Gefäß, welches die Menge Wassers eines andern genau empfangen soll, vorher inwendig durchaus benetzt werden, indem man es mit Wasser füllt, oder ausspült und dann austropfen läßt, um das zu ersetzen, was am ausgeleerten Gefäße nach genau eben so langem Austropfen hängen bleibt. Dabei hat man begreiflich auf die Größe oder auf das Verhältniß der benetzten Flächen zu sehen, denn z. B. in vier Schoppengefäßen, die in ein Maaßgefäß ausgeleert werden, bleibt mehr als in letzterm hängen, weil jene benetzten Flächen mehr betragen, als die innere Fläche des Maaßgefäßes. Was beim Eichen der hölzernen Hohlmaaße in Betreff der Größe der Eichmaaße bemerkt worden ist, gilt überhaupt, und insbesondere in Beziehung auf den vorhin erwähnten Umstand, auch für die mit Wasser zu eichende Gefäße.

Schließt man das Wasser mit der Glasplatte ein, so hat man vorher alle etwa am Innern des Gefäßes anhängende Luftblasen mit einer langen Nadel wegzuschaffen. Wie viel der zu großen Tiefe des Gefäßes (durch Abdrehen, Abfeilen oder Abschleifen) noch abgenommen werden muß, gibt, nachdem die rechte Menge Wasser, die es halten soll, aus dem Eichmaaß eingegossen worden, das Zungenlineal besser als die Glasplatte zu erkennen, weil sich der Abstand der Wasserfläche von der Zunge, welcher der Hälfte des Abstandes der wirklichen Zunge von ihrem Bilde unter dem Wasser gleich ist, sehr gut schätzen läßt. Ist das Gefäß zu klein, was man daran erkennt, daß die Zunge am Zungenlineal sich eintaucht, oder daß die Glasplatte einen Theil des Wassers wegdrückt, so muß das Gefäß gehörig erweitert, dabei aber darauf Rücksicht genommen werden, daß die Wand nicht zu dünn werde.

Jede Eichungsoperation muß übrigens, so viel wie thunlich, bei gleicher Temperatur von 14 bis 16 Grad Reaumur vorgenommen werden. Die Werkzeuge, die Gefäße und die Hülfsmaterialien müssen eine gleiche Temperatur angenommen haben, wenn man zu richtigen Resultaten gelangen will.

18. Was das Eichen der Längenmaaße betrifft, so werden sie mit dem Mustermaaß verglichen, indem man ihre Eintheilung neben einander bringt, und sieht, wie sie mit einander übereinstimmen.

19. Das Eichen oder Justiren der Gewichte geschieht auf einer guten, der Schwere des Gewichts angemessenen Wage, welche die erforderliche Beweglichkeit und Empfindlichkeit hat, und deren Wagbalken nicht nur für sich allein, sondern auch mit den daran hängenden Schalen und bei der Verwechslung derselben wenigstens nahe das Gleichgewicht hält. Hat man die Wage in diesen Beziehungen geprüft, so legt man in die eine Wagschale das Normalgewicht, und in die andere das Gegengewicht, gleichviel aus was es bestehe, bis vollkommenes Gleichgewicht entsteht. Am besten eignen sich, nebst den kleinen Gewichtstheilen, Schrote von verschiedener Größe. An die Stelle des Normalgewichts legt man nun das zu eichende Gewicht, welches noch zu schwer gefunden werde. Man lege deswegen zum Gegengewicht so viel kleine Stückchen Metall, die nach der Form oder Farbe von den Gegengewichtstücken zur Vermeidung eines Irrthums verschieden seyn müssen, hinzu, bis nahe ein Gleichgewicht entsteht, nur um zu schätzen, wieviel man unten am Boden des zu justirenden Stücks wegzufeilen habe. Nachdem abgefeilt worden, stellt man den nämlichen Versuch an, wo sich von selbst versteht, daß man vorher die dem Gegengewicht zugelegten Stückchen Metall wegnehmen müsse. So fährt man im Abwägen und Abfeilen fort, bis das zu justirende Gewicht mit dem Gegengewicht, welches seine Schale nicht verlassen darf, vollkommenes Gleichgewicht hält. Nimmt man mit der Feile von einem aus Messing verfertigten Gewicht zu viel weg, was bei einer lang dauernden Justirung leicht geschehen kann, so muß mit dem Löthkolben etwas Zinn aufgetragen, und dann neuerdings abgewogen werden. Bei Eisengewichten hilft man mit Abschaben oder Zugießen von Blei.

Inhaltsbestimmung der Fässer durch Eichen.

20. Die zum Transport von Flüssigkeiten im inländischen Verkehr dienenden Fässer müssen ebenfalls geeicht, d. h. es muß der Inhalt derselben vermittelst Auffüllen mit Wasser untersucht, und der Befund dieser Untersuchung auf den Faßboden eingebrannt werden. Weil hierzu viel Wasser erforderlich ist, so wird das zur Inhaltsbestimmung erforderliche Gefäß, der Sinn-

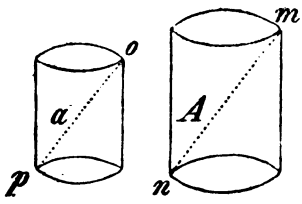
oder Eichkessel, bei öffentlichen Brunnen oder durchfließendem Wasser aufgeführt. Am Boden hat der, in starke, eiserne Ringe gefaßte Kessel eine Vertiefung gegen die Mitte von ungefähr einem halben Zoll, woselbst die Ausflußöffnung angebracht ist; letztere ist mit einem Rohr und gut schließendem Hahnen verbunden. Ist der Kessel für eine halbe Ohm eingerichtet, so läuft, wenn er angefüllt wird, alles über eine halbe Ohm gehende Wasser aus einer am Umfang des Kessels angebrachten Oeffnung ab; ist der Kessel für eine ganze Ohm eingerichtet, so läuft durch eine solche Oeffnung alles über eine Ohm gehnede Wasser ab, u. s. w. Außerdem sind an der innern Wand des Kessels Theile der Ohm, oder überhaupt des dem Kessel entsprechenden Rauminhalts, durch Stifte bezeichnet, und wenn das zur vollständigen Anfüllung des zu eichenden Fasses erforderliche Wasser weniger als der kleinste Theil des Kessels beträgt, so werden kleinere Eichgefäße gebraucht. Dabei ist aber dem zu eichenden Fasse immer eine solche Lage zu geben, daß das Spundloch die höchste Stelle des Fasses ist.

Inhaltsbestimmung der Fässer durch Visiren.

21. Der Inhalt der Fässer kann außerdem stereometrisch, d. h. durch Messung linearer Dimensionen und hierauf gegründeter Berechnung, so wie auch auf mechanische Weise, vermittelst besonders dazu eingerichteter Maaßstäbe, durch das sogenannte Visiren bestimmt werden. Die stereometrische Inhaltsbestimmung ist für den gewöhnlichen Verkehr begreiflich nicht statthaft. Vermittelst des Visirens kann zwar der Inhalt eben so genau und auf eine sehr leichte Art ausgemittelt werden, wir werden aber weiter unten sehen, warum und in wiefern dieses Verfahren nur unter gewissen Einschränkungen in Anwendung gebracht werden kann.

22. Die Maaßstäbe, welche zum Visiren gebraucht werden, nennt man Visirstäbe. Wir beschränken uns hier auf die Konstruction und Gebrauchsanweisung derjenigen Art von Visirstäben, welche man kubische Visirstäbe nennt, weil solche für die Praxis am tauglichsten sind.

Die Anwendung des kubischen Visirstabs zur Inhaltsbestimmung der Fässer beruht auf dem geometrischen Satze, daß sich die ähnlichen Körper wie die Kubikzahlen ihrer ähnlich liegenden linearen Dimensionen verhalten.



Es seyen A und a zwei Cylinder, bei denen sich die Durchmesser zur Höhe verhalten wie $d:h$; beide sind daher ähnlich, und es verhält sich der Inhalt A zum Inhalt von a 1) wie die Würfel der Durchmesser, 2) wie die Würfel der Höhen, 3) wie die Würfel der Diagonalen $m\,n$, und $o\,p$.

Soll nun für Cylinder, deren Durchmesser zur Höhe sich wie $d:h$ verhält, der Durchmesser und die Höhe eines Cylinders bestimmt werden, welcher das landübliche Maaß enthält, so ist, wenn x den gesuchten Durchmesser bezeichnet, $\frac{h\,x}{d}$ die entsprechende Höhe. Man hat also, wenn m den Kubikinhalt des landüblichen Maaßes bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{\pi h x^3}{4d} = m, \text{ woraus } x = \sqrt[3]{\frac{4md}{\pi h}}$$

Bezeichnet man die entsprechende Diagonale, welche $= \frac{x}{d}\sqrt{d^2+h^2}$, durch f, so ist f der Durchmesser des Cylinders, welcher 1 Maaß enthält, und $f\sqrt[3]{m}$ der Durchmesser des Cylinders, welcher m Maaß enthält. Multiplicirt man also f mit den Kubikwurzeln der Zahlen 2, 3, 4 u. s. w., so erhält man die Diagonalen der Cylinder, welche 2, 3, 4 Maaß u. s. w. enthalten; denn es sind die Diagonalen $=$

$$f,\ f\sqrt[3]{2},\ f\sqrt[3]{3},\ f\sqrt[3]{4} \text{ u. s. w.}$$

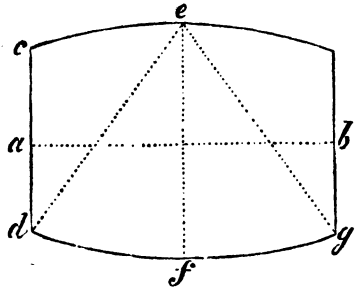
und es verhalten sich die Cylinder, wie die Würfel der Diagonalen, also wie $1:2:3:4$ u. s. w.

Trägt man die den Produkten $f,\ f\sqrt[3]{2},\ f\sqrt[3]{3}$ u. s. w. entsprechenden Theile nach dem tausendtheiligen Maaßstabe auf einen Stab und bemerkt man die Zahl der Maaße neben den Theilstrichen, so hat man einen kubischen Visirstab, den man bei der Messung cylinderförmigen Gefäße in der Richtung der Diagonale in den Cylinder steckt; der Theilstrich am Rande des Gefäßes gibt den Inhalt an.

So wie man einen kubischen Visirstab nur für solche Cylinder anwenden kann, welche ein und dasselbe Grundverhältniß, d. h. ein und dasselbe Verhältniß vom Durchmesser zur Höhe haben, nach welchem der Maaßstab berechnet worden ist, so kann man

auch den kubischen Visirstab, welcher zur Ausmessung der Fässer dienen soll, nur für eine gewisse Gattung derselben, d. h. für alle diejenigen Fässer, welche einander ähnlich sind, und für welche der Maaßab berechnet worden ist, in Anwendung bringen. Man hat also für jede Gattung einen besondern Visirstab nöthig.

Die ähnlichen Fässer, als regelmäßige Köper betrachtet, verhalten sich wie die Kubikzahlen ihrer ähnlich liegenden linearer Dimensionen. So wie nun beim Cylinder drei Dimensionen, nämlich Durchmesser, Höhe und Diagonale zur Konstruction des kubischen Visirstabs angewendet werden können, so kann man beim Faß vier Dimensionen, nämlich die Länge *a b* des



Fasses, den Bodendurchmesser *c d*, den Spunddurchmesser *e f*, und endlich die Linie aus der Mitte des Spunds nach der Gargel, wie *e d* oder *e g*, annehmen. Diese Linien nennt man Visirlinien, wovon die zwei letztern, nämlich *e f* und *e d* (oder *e g*) die gebräuchlichsten sind. Je nachdem man die Linie aus dem Spunde nach der Gargel, oder den Spunddurchmesser zur Visirlinie angenommen, und darnach den Visirstab berechnet hat, ist derselbe ein Diagonalstab oder ein Tiefstab.

Diagonalstab.

23. Läßt man mehrere Fässer, welche zu einer und derselben Gattung gehören, genau eichen, und mißt man die Visirlinie aus der Mitte des Spundlochs nach der Zarge der Lagerdaube, und zwar zur Rechten und Linken, wobei man das arithmetische Mittel aus den Ergebnissen beider Messungen nimmt, so läßt sich hieraus die Visirlinie des Fasses bestimmen, welches das landübliche Maaß enthält.

Es werde z. B. der Inhalt eines geeichten, runden oder ovalen Fasses durch *a*, und das arithmetische Mittel aus beiden Visirlinien durch *v*, ferner der Inhalt eines andern Fasses durch *a'*, und die Länge der Visirlinie durch *v'*, und endlich der Inhalt eines dritten Fasses durch *a''*, und die Visirlinie durch *v''* bezeichnet. In Beziehung auf das erste Faß hat man zur Bestimmung der Visirlinie die Proportion:

$$a : 1 = v^3 : x^3$$

$$\text{woraus } x = \frac{v}{\sqrt[3]{a}};$$

ebenso hat man in Beziehung auf zweite und dritte Faß die Proportionen:

$$a' : 1 = v'^3 : x^3$$

$$\text{woraus } x = \frac{v'}{\sqrt[3]{a'}};$$

$$a'' : 1 = v''^3 : x^3$$

$$\text{woraus } x = \frac{v''}{\sqrt[3]{a''}}$$

Das arithmetische Mittel aus den drei gefundenen Werthen von x gibt also die gesuchte Visirlinie; bezeichnet man sie wie vorher durch x, so ist $x \sqrt[3]{m}$ die Visirlinie des Fasses, welches m Maaß enthält. Setzt man also für m die Zahlen 2, 3, 4 u. s. w., so erhält man die Visirlinie des Fasses, welches 2, 3, 4 u. s. w. Maaß enthält.

Bei dem Gebrauche des Diagonalstabs stößt man denselben beim Spunde schief nach der Zarge der Lagerdaube einmal zur Rechten und einmal zur Linken hinunter, bemerkt beidemal wo das Spundloch den Stab schneidet und nimmt aus beiden Längen, wenn sie verschieden sind, das arithmetische Mittel; der Theilstrich, auf welchem das Mittel fällt, zeigt den Inhalt des Fasses an.

Tiefstab.

24. Bei dem Tiefstab wird der Spunddurchmesser als Visirlinie angenommen, und die Visirlinie des Fasses, welches das landübliche Maaß enthält, wird auf dieselbe Weise wie beim Diagonalstabe bestimmt. Bezeichnet nämlich a den Inhalt des geeichten Fasses, für dessen Gattung der Tiefstab gefertigt werden soll, und v die gemessene Spundtiefe, so hat man die Proportion:

$$a : 1 = v^3 : x^3$$

$$\text{woraus } x = \frac{v}{\sqrt[3]{a}}$$

Man sucht auf diese Weise für mehrere Fässer die Visirlinie; das arithmetische Mittel aus denselben ist die Zahl, mit welcher man die Kubikwurzeln der Zahlen 2, 3, 4 u. s. w. zu multipliciren hat, um die Theile des Tiefstabs zu erhalten.

Maaßbestimmung der Abweinung.

25. Unter Abweinung eines Fasses versteht man die Menge des Flüssigen in dem Fasse, wenn dasselbe das Spundloch nicht erreicht, während die Oberfläche des Flüssigen mit der horizontalen Axe des Fasses gleichlaufend ist.

Der Tiefstab wird auf folgende Art zur Bestimmung der Abweinung gebraucht. Man bringt das auf dem Lager befindliche Faß, für dessen Gattung der zum Visiren der Abweinung zugleich mit geeignete Tiefstab verfertigt werden soll, durch Keile in eine solche Lage, daß eine Linie durch die Mittelpunkte seiner Böden horizontal laufe; gießt hierauf nach und nach eine bestimmte Anzahl Maaß Wassers ein, und notirt die Wassertiefe, indem man jedesmal den Stab beim Spundloch gerade hinunter gegen die Lagerdaube stößt, und setzt dieses fort, bis das Faß voll ist. Hierbei kann man jedesmal so viele Maaße eingießen, daß die Wassertiefen jedesmal nur um einen halben Zoll höchstens größer werden, und die Zwischentheile in gleiche Theile theilen. Hat man nun die Tiefpunkte und die denselben entsprechenden Maaße auf der andern Seite des Tiefstabs verzeichnet, so kann man sich desselben folgendermaßen zur Visirung der Abweinung bedienen. Angenommen, der entweder stereometrisch oder durch eichen bestimmte Inhalt des Regulators, d. h. des, entweder runden oder ovalen Fasses, für dessen Gattung der Tiefstab verfertigt worden, sey $= a$, und seine Spundtiefe $= b$; stößt man nun den Stab beim Spund gerade hinunter nach der Lagerdaube des zu jener Gattung gehörenden Fasses, dessen Abweinung visirt werden soll, und zeigt die eine Seite den ganzen Inhalt des Fasses $= c$, und die andere die Spundtiefe $= d$, während das Flüssige im Fasse den Stab nur auf e Maaßtheile naß macht, so kann man aus der Proportion:

$$d : b = e : x$$

den Tiefpunkt des Fasses berechnen, nach welchem der Tiefstab verfertigt worden ist; steht bei dem Theilstrich x die Zahl f Maaße, so bestimmt man die Abweinung aus der Proportion:

$$a : c = f : y$$

Ist z. B. der Inhalt des Regulators $= 1132$ Maaß, und seine Spundtiefe $= 48$ Zoll, so zeigt der Tiefstab den Inhalt des Fasses, dessen Abweinung visirt werden soll, $= 60$ Maaß;

ist dessen Spundtiefe = 18 Zoll und die Weintiefe = 12 Zoll, so erhält man zuvörderst aus der Proportion:

$$18 : 48 = 12 : x$$

$x = 32$ Zoll für die Weintiefe des Regulators; steht nun auf dem Tiefstab bei dieser Weintiefe 828,8 Maaß, so ergibt sich die Abweinung aus der Proportion:

$$1132 : 60 = 828{,}8 : x$$

wonach $x = 44$ Maaß.

Beschränkte Anwendung des Visirstabs.

26. Vermittelst des Visirstabs können nur diejenigen Fässer genau gemessen werden, welche dem Fasse ähnlich sind, nach welchem der Visirstab verfertigt worden ist; man muß also für jede Gattung von Fässern einen besondern Visirstab gebrauchen. Wenn solche aber auch vorhanden wären, so würde der Anwendung derselben die Schwierigkeit in den Weg treten, daß Diejenigen, welche sich von Amts wegen der Inhaltsbestimmung der Fässer zu unterziehen haben, nicht im Stande sind, die richtige Auswahl im Gebrauche des Visirstabs zu treffen. Derselbe könnte nur dann unbedingt angewendet werden, wenn in Folge gesetzlicher Bestimmung, alle Fässer im Lande nach einer und derselben Proportion ihrer Dimensionen verfertigt werden müßten, so daß man nur *einen* Visirstab für alle runden Fässer, und einen andern Visirstab für alle ovalen Fässer zu gebrauchen hätte. Aus dem Obigen erhellet, daß die Anwendung eines einzigen, für die gewöhnlichen Dimensionsverhältnisse construirten Visirstabs nur in sehr beschränkter Weise stattfinden kann. Im Großherzogthum Baden z. B. wird der Weinaccis nicht nach dem Ergebniß von Messungen mit dem Visirstab entrichtet, und letzterer wird nur in Fällen gebraucht, wo es auf genaue Inhaltsbestimmungen nicht ankommt. So wird z. B. ein Accis von dem Wein entrichtet, welchen der Gastwirth aus seinem Patentkeller in den Wirthschaftskeller verbringt. Zur Controllirung wird nun zu gewissen Zeiten eine Aufnahme des Patentkellers vorgenommen, und der in der Zwischenzeit in den Wirthschaftskeller verbrachte Wein muß mit dem Vorrathe im Patentkeller so viel betragen, als im Beginn der Periode im Patentkeller gewesen ist. Bei solchen Aufnahmen kommt nun der Visirstab in Anwendung, aber nur für die nicht vollen Fässer, weil die im Patentkeller befindlichen Fässer geeicht seyn müssen, und also der Inhalt derselben bekannt

ist. (*) Ueberdieß braucht sich der Besitzer des Weins die Aufnahme mit dem Visirstabe nicht gefallen zu lassen, und

(*) Auch bei ganz genauen Aufnahmen kann indessen in Beziehung auf die im Obigen erwähnte Controlle, wegen der Schwanung, keine völlige Uebereinstimmung stattfinden, und es muß daher ein Normativ für die Berechnung festgesetzt werden.

Neuere Untersuchungen im Großherzogthum, wobei nicht nur das Gutachten von Sachverständigen in verschiedenen Theilen des Landes, sondern auch die Erfahrungen in den landesherrlichen Kellereien zu Rathe gezogen wurden, lassen zur Beseitigung eintretender Anstände für nothwendig erkennen, bei der Berechnung des gesetzlich anzuerkennenden Abgangs auf die Ursachen des Verlustes zu sehen, insoweit dieselben nämlich mit der Dauer der Lagerung in Verbindung stehen, oder abhängig sind. Zur erstern Gattung gehört aller Verlust, welchen der Wein während der Lagerung im Keller und durch die Behandlung in demselben erleidet, also mit Einrechnung der Zehrung, Hefebildung, des Ausrinnens u. s. w.; jedoch mit Ausschluß des außerordentlichen Abgangs beim neuen Wein vom Herbst bis zum ersten Ablaß. Zu den letztern sind zu rechnen: aller Verlust auf dem Transport vom Bezugsort bis zum Keller und bei der Einkellerung, der Verlust bei der Auskellerung und der Verlust durch Gährung und Hefebildung beim neuen Wein vom Herbst bis zum ersten Ablaß. Nach dem auf jene Erfahrungen gegründeten Normativ für die Berechnung des Maximums der Schwanung in den abgesonderten Patentkellern der Wirthe werden anerkannt und berechnet:

1) Mit Rücksicht auf die Dauer der Lagerung: als Kellerabgang jeder Art, von allem Wein, sowohl altem als neuen, welcher durchschnittlich ein Jahr gelagert war, also mit Einrechnung des Vorraths beim Beginn des Controlljahres, oder bei Eröffnung des Patentkellers 4 Procent fürs Jahr, oder für kürzere Zeiten $\frac{1}{3}$ Procent für den Monat.

2) Ohne Rücksicht auf die Dauer der Lagerung:

a) Von allem Wein, welcher während des Controlljahres in den Keller gebracht wird, also mit Ausschluß des Vorraths beim Beginn oder bei Eröffnung des Patentkellers: als Verlust aller Art beim Transport und bei der Einkellerung $1\frac{1}{2}$ Procent.

b) Von allem Wein, welcher während des Controlljahres ausgekellert wird, als Verlust jeder Art bei der Auskellerung $\frac{1}{2}$ Procent.

c) Von neuem Wein des letzten Herbstes, welcher vor dem ersten Ablaß in den Keller eingelagert wird, als außerordentlicher Verlust durch Gährung und Hefe 4 Procent.

Als durchschnittlicher Lagervorrath ist der 12te Theil derjenigen Quantität anzusehen, welche durch Summirung der Lagervorräthe jedes der einzelnen Monate erhalten wird. Der Lagervorrath des ersten Monats besteht aus dem wirklichen Vorrath beim Beginn und aus den

er kann auf unmittelbare Messung antragen, was aber selten vorkommt, weil er sowohl wegen des Weins selbst als auch wegen der Kürze des Verfahrens dem Visiren den Vorzug gibt.

Sodann kommt auch der Visirstab bei Untersuchungen der Patentkeller der Weinhändler in Anwendung. Nach dem Gesetz müssen nur die in den abgesonderten Patentkellern der Gast-

---

Einlagen im Laufe des ersten Monats. Der Lagervorrath des zweiten Monats besteht aus dem Lagervorrath des ersten Monats nach Abrechnung der Abfassungen des ersten Monats und Zurechnung der Einlagen des zweiten Monats. In ähnlicher Weise wie beim zweiten wird bei Berechnung der Lagervorräthe aller folgenden Monate verfahren, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen.

	Berechnung der monatlichen Lagervorräthe.				Summirung der monatlichen Lagervorräthe.				Entzifferung: der monatlichen Weineinlagen				Entzifferung: der unter den Einlagen befindlichen neuen Weine.				Entzifferung: der monatlichen Abfassungen.			
	Fd.	D.	St.	M.	Fd.	D.	St.	M.	Fd.	D.	St.	M.	Fd.	D.	St.	M.	Fd.	D.	St.	M.
Vorrath am 1. Mai 1843	76	2	1	0																
Einlagen im Mai	29	6	3	9					29	6	3	9								
Lagervorrath im Mai	105	8	4	9	105	8	4	9												
Abfassungen im Mai	12	7	7	0													12	7	7	0
Rest	93	0	7	9																
Einlagen im Juni	12	8	2	8					12	8	2	8								
Lagervorrath im Juni	105	9	0	7	105	9	0	7												
Abfassungen im Juni	12	4	6	8													12	4	6	8
Rest	93	4	3	9																
u. s. w.																				
Einlagen im April 1844	12	2	4	8					12	2	4	8								
Lagervorrath im April	108	3	9	7	108	3	9	7												
Abfassungen im April	7	3	7	3													7	3	7	3
Rest	101	0	2	4	1166	2	2	2	163	6	0	6	13	0	6	3	138	7	9	2
Vorrath bei der Aufnahme am 1. Mai 1844	93	8	0	3																
Differenz	7	2	2	1																
Das Maximum der Schwanung beträgt vom durchschnittlichen Lagervorrathe $\frac{1166222}{12} = 97185$																				
Maaß zu 4 Procent	3	8	8	7																
von den Einlagen 163606 Maaß zu 1½ Procent	2	4	5	4																
von neuem Wein 13063 Maaß zu 4 Procent	—	5	2	2																
von den Abfassungen 138792 Maaß zu ½ Procent	—	6	9	3																
Summe	7	5	5	6																

Der wirkliche Abgang erreicht mithin das zulässige Maximum nicht.

wirthe befindlichen Fässer geeicht seyn, was dagegen für die in den Patentkellern der Weinhändler befindlichen Fässer nicht vorgeschrieben ist. Der Weinhändler muß aber eine Patentsteuer entrichten, welche nach der Größe des Weinlagers bestimmt ist. Zu dem Ende sind mehrere Klassen eingeführt. Z. B. Weinhändler der ersten Klasse, deren Lager 10 Fuder nicht übersteigt, zahlen per Jahr 8 fl.; diejenigen der zweiten Klasse, deren Lager 10 bis 20 Fuder nicht übersteigt, zahlen per Jahr 16 fl. u. s. w. Das Maximum des declarirten Weinlagers darf bei Strafe in keinem Zeitpunkte überschritten werden, und nach Ablauf des neunten Monats hat jeder Weinhändler zu declariren, ob er den Weinhandel im nächsten Steuerjahr und in welcher Ausdehnung fortsetzen oder aufgeben will. Die Acciserheber haben nun bei gegründetem Verdacht, daß ein Weinhändler ein größeres Lager hält, als er nach der Klasse, worauf sein Patent spricht, zu halten berechtigt ist, dem Accisinspector die Anzeige zu machen, der alsdann befugt ist, das Lager aufzunehmen. Für diesen Fall leistet aber der Visirstab wesentliche Dienste in Betreff der aufzunehmenden nicht vollen Fässer, so wie derjenigen Fässer, welche nicht geeicht sind, weil es hier auf eine große Genauigkeit gar nicht ankommt, und weil es zu weitläufig wäre, den Inhalt durch unmittelbare Messung (stereometrisch oder aber durch Ausgießen des Weins) zu bestimmen.

II.
Finanzwesen.

I. Geldwesen.

Erste Abtheilung.
Münzen.

Erster Abschnitt.
Silbermünze.

27. Nach den Untersuchungen von Cavendish und Hatschett ist das Mischungsverhältniß, in welchem Silber und Kupfer die für Silbermünzen am meisten sich eignende und härteste Masse gibt, ziemlich nahe wie 9 : 1. Wenn 9 Gewichtsmengen Silber mit 1 Gewichtsmenge Kupfer legirt werden, so sind in 10 Gewichtsmengen der legirten Masse 9 Gewichtsmengen Silber, oder in 16 Gewichtsmengen (die für Silbermünzen und Silberarbeiten in Deutschland angenommene Mischungseinheit) der legirten Masse so viel Gewichtsmengen Silber, als aus der Proportion folgt:

$$10 : 9 = 16 : x = 14\ ^2/_5;$$

wonach die Masse, welche dem obigen Mischungsverhältniß entspricht, $14\ ^2/_5$ löthig ist. Aus solcher Masse werden in Frankreich und einigen andern Ländern, namentlich auch in den deutschen Zollvereinsstaaten (nach der am 30. Juli 1838 in Dresden abgeschlossenen Münz-Convention) die groben Silbermünzen und deren Theilstücke (Courant-Münze) geprägt.

Münzgewichts-Einheit.

28. Zum Behufe der Legirung ist eine Gewichtseinheit erforderlich, nach welcher dieselbe bewerkstelligt wird. In Frankreich z. B. ist diese Einheit das Kilogramm (§. 7); in Deutschland die cölnische Mark = 8 Unzen = 16 Loth = 64 Quentchen = 256 Pfenniggewichten = 4352 Eßchen = 65536 Richtpfenniggewichtchen. Die in den deutschen Münz-

stätten befindlichen Exemplare der cölnischen Mark stimmen aber nicht ganz mit einander überein; genauen Untersuchungen zufolge *) wiegt die wahre cölnische Mark 233,75 Grammen (§. 7). Als Grundlage des gesammten Münzwesens in den Zollvereinsstaaten hat man eine Münzmark angenommen, deren Gewicht, mit dem Gewichte der in dem Königreich Preußen und in den süddeutschen Staaten des Zoll- und Handelsvereins bestehenden Mark übereinstimmend, auf 233,855 Gramme **) festgesetzt ist.

Korn, Feingehalt, Schrot.

29. Das gesetzliche Mischungsverhältniß (das Korn) der Münze ist auch durch einen Bruch gegeben, dessen Zähler die gesetzliche Gewichtsmenge des in der Münze enthaltenen edlen Metalls (den Feingehalt) und dessen Nenner das gesetzliche Gewicht der Münze (das Schrot) ausdrückt. So ist z. B. der gesetzliche Feingehalt eines Franken (französische Münzeinheit) = $4\frac{1}{2}$ Grammen, und das gesetzliche Schrot desselben = 5 Grammen; das Korn ist daher = $\frac{4\frac{1}{2}}{5} = \frac{9}{10}$ = $\frac{x}{16} = \frac{14^2/_5}{16}$ (§. 27).

Remedium.

30. Den Münzstätten wird indessen eine Abweichung von dem gesetzlichen Schrot und Korn in so weit nachgesehen, als solche durch die Unerreichbarkeit einer absoluten Genauigkeit bedingt wird. Die Grenzen des erlaubten Münzfehlers (das Remedium) beträgt z. B. bei der französischen Silbermünze am Korn 3 Tausendtheile, sowohl in Plus als in Minus. Das gesetzliche Korn ist $\frac{9}{10}$ oder $\frac{900}{1000}$; wenn also das Korn = $\frac{900}{1000} - \frac{3}{1000} = \frac{897}{1000}$ ist, so soll das Münzstück noch umlaufsfähig seyn. Das Remedium am Schrot beträgt für das

*) S. Chelius, über die wahre cölnische Mark (Frankfurt a. M. 1820).

**) Das Gewicht eines preußischen Kubikfußes destillirten Wassers im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 15° des Reaumur'schen Thermometers wird in 66 gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil ist ein preußisches Pfund. Die Hälfte dieses Pfunds stimmt genau mit der bisher bei dem preußischen Münzwesen üblichen cölnischen Mark (= 233,855 Grammen) überein. (Maaß- und Gewichtsordnung vom 16. Mai 1816).

Fünffrankenstück 3 Tausendtheile; für das Zweifranken- und Einfrankenstück 5 Tausendtheile; für das Halbfrankenstück 7 Tausendtheile, und für das Viertelsfrankenstück 10 Tausendtheile. Die Zusammenstellung der gesetzlichen und mit Berücksichtigung der Remedien angesetzten Gewichte ist wie folgt:

Stück Fr.	Gesetzliches Gewicht.	Remedium in Tausendtheilen des Gewichts	Gewicht nach dem Remedium in Plus	Gewicht nach dem Remedium in Minus
5	25	3	25,075	24,925
2	10	5	10,05	9,95
1	5		5,025	4,975
½	2,50	7	2,5175	2,4825
¼	1,25	10	1,2625	1,2375

Münzfuß.

31. Im engern Sinne versteht man unter Münzfuß die gesetzlich ausgesprochene Vorschrift über Schrot und Korn der inländischen Münzen. In Deutschland wird der Münzfuß durch die Anzahl Stücke der Münzeinheit bezeichnet, welche aus der Münzgewichtseinheit reinen Silbers geprägt werden. So gilt z. B. in denjenigen zum Zoll- und Handelsverein verbundenen Staaten (nach der Münzconvention von 1830), in welchen die Thaler- und Groschenrechnung hergebracht ist, der 14-Thalerfuß, bei welchem die Mark fein Silber zu 14 Thaler ausgebracht wird; und in denjenigen Staaten, in welchen nach Gulden und Kreuzern gerechnet wird, der 24½-Guldenfuß, bei welchem aus der Mark fein Silber 24½ Gulden geprägt werden, wonach also 1 Gulden = $^4/_7$ Thaler, und 1 Thaler = 1¾ Gulden.

Die Hauptsilbermünze des Vereins wird zu einem Siebentheile der Mark fein Silber ausgeprägt, und hat sonach den Werth von 2 Thalern oder 3½ Gulden. Remedium in Schrot und Korn wie bei den französischen Fünffrankenstücken, nämlich 3 Tausendtheile.

Andere deutsche Münzfuße sind der 20-Guldenfuß, die cölnische Mark fein Silber zu 13⅓ Reichsthalern zu 24 Groschen oder 20 Gulden zu 60 Kreuzern (in Oestreich); der

24-Guldenfuß, welcher indessen kein eigentlicher Münzfuß, sondern nur eine andere Zählungsweise des äußern Werths der nach dem Zwanzigguldenfuß geprägten Münze ist, nach welcher 20 fl. des 20-fl. Fuß = 24 fl. des 24-fl. Fuß, 20 Kr. des 20-fl. Fuß = 24 Kr. des 24-fl. Fuß ꝛc. gerechnet werden; der lübische Fuß, die cölnische Mark fein Silber zu 11¾ Thalern oder 34 Mark Courant (in Hamburg, Lübeck, Holstein und Mecklenburg) ꝛc.

Prägschatz. 32. Bei der Ausmünzung werden die Kosten derselben in der Art in Aufrechnung gebracht, daß die Regierung für eine gewisse Menge Münzmetall eine kleinere Menge desselben in geprägten Stücken hergibt. Die Differenz dieser beiden Quantitäten ist der Prägeschatz oder Schlagsatz, welcher indessen, wenn es auf Gewinn abgesehen ist, mehr als den Betrag des Münzkostenaufwands verhältnißmäßig ausmacht.

In Frankreich geschieht die Prägung in den 13 Münzstätten des Landes nicht auf Rechnung des Staates, sondern auf diejenige des Münzdirektors gegen eine bestimmte Vergütung, sowohl vom Staate als von den Privaten, die Münzmetalle zur Prägung übergeben. Die Münzstätten geben für 1 Kilogramm Silber von $^9/_{10}$ Korn (§ 29), also für 900 Grammen Silber (1 Kilogramm = 1000 Grammen) 900 Grammen — 9 Grammen = 891 Grammen Silber in Franken. Weil in 1 Frank 4½ Grammen fein Silber enthalten sind, so machen 900 Grammen und 891 Grammen Silber so viele Franken als aus den Proportionen folgt:

$$\underset{\text{Gr. Silb.}}{4\tfrac{1}{2}} : \underset{\text{Fr.}}{1} = \underset{\text{Gr. Silb.}}{900} : \underset{\text{Fr.}}{x} = 200$$

$$\underset{\text{Gr. Silb.}}{4\tfrac{1}{2}} : \underset{\text{Fr.}}{1} = \underset{\text{Gr. Silb.}}{891} : \underset{\text{Fr.}}{x} = 198$$

Die Münzstätten übernehmen also das Kilogramm Silber von $^9/_{10}$ Korn für 198 Franken, und prägen daraus 200 Franken; der Schlagschatz beträgt demnach 2 Franken (= 2 × 4½ Grammen Silber) vom Kilogramm Silber von $^9/_{10}$ Korn, oder $1\,^2/_{198}$ Procent.

Zahlt die Münzstätte für 900 Grammen Silber 198 Franken, so gibt sie für 1000 Grammen Silber so viel Franken als aus der Proportion folgt:

$$\underset{\text{Gr. Silb.}}{900} : \underset{\text{Fr.}}{198} = \underset{\text{Gr. Silb.}}{1000} : \underset{\text{Fr.}}{x} = 220$$

Aus 1000 Grammen Silber werden aber so viel Franken geprägt als aus der Proportion folgt:

Gr. Sib.	Fr.	Gr. Sib.	Fr.	Fr.	C.
4½	: 1 =	1000	: x =	222	22,222

Die Münzstätte übernimmt also das Kilogramm fein Silber für 220 Fr. und prägt daraus 222 Fr. 22,222 Centimen.

Der in obiger Berechnung nachgewiesene Tarif *) ist durch eine, auf Vortrag des Finanzministers Humann erlassene Verordnung vom 27. Februar 1835 verfügt. Nach dem Tarif vom 6. Juni 1803 betrug der Schlagschatz für die Silbermünze 3 Franken vom Kilogramm Silber von $^{9}/_{10}$ Korn.

Auf den Grund des obigen Tarifs wird in Frankreich der Handelspreis des Silbers in der Art bestimmt, daß das Kilogramm Silber von $^{9}/_{10}$ Korn zu 198 Fr. fest angesetzt und hierzu ein Agio von so und so viel Fr. für jedes Tausend Franken aufgerechnet wird. Gilt z. B. das Silber von $^{9}/_{10}$ Korn 198 Fr. und 5 pro Mille Agio, so läuft dieß auf dasselbe hinaus, als wenn der Preis zu 198 Fr. 99 Cent. angesetzt wäre.

In der Wiener Münzstätte wird die cölnische Mark fein Silber zu 19 fl. 40 Kr. angenommen, und zu 20 fl. ausgeprägt, was $1^{41}/_{59}$ Procent Schlagschatz ausmacht.

Scheidemünze.

33. Die zum kleinern Verkehre und zur Ausgleichung bei Zahlungen erforderlichen kleineren Münzen, welche man Scheidemünze nennt, sind theils Silbermünzen, welche eine stärkere Legirung (verhältnißmäßig mehr Kupfer) als die Hauptmünze und ihre Theilstücke, die Courantmünze, haben, und theils Kupfermünzen.

Diejenigen Silbermünzen, welche mehr Kupfer als Silber enthalten, nennt man Billon-Münzen. Dahin gehören in Frankreich z. B. die Zehncentimen-Stücke von $^{2}/_{10}$ Korn ($3^{4}/_{5}$ löthig), welche aber jetzt nicht mehr geprägt werden.

*)

		Sans retenue ou au pair.	Avec retenue au change.
Argent	pur	Fr. C. 222 22,222	Fr. 220
	à 900m	Fr. 200	Fr. 198

Die kleinste Silbermünze in Frankreich, welche gleiches Korn mit den groben Silbermünzen hat, ist das Viertelfrankenstück.

Die deutschen Silbermünzen sind in Billon ausgeprägt. So sollen z. B. gesetzlich $106^2/_3$ preußische Silbergroschen 1 cölnische Mark (= 288 Grän) wiegen und 64 Grän fein Silber enthalten. Das Korn ergibt sich aus der Proportion:

$$288 : 64 = 16 : x = 3^5/_9;$$

wonach auf $3^5/_9$ Gewichtstheile Silber $12^4/_9$ Gewichtstheile Kupfer kommen und also in den Silbergroschen $3\frac{1}{2}$ mal mehr Kupfer als Silber enthalten ist.

Nach der preußischen Währung (die Angabe der Anzahl von geringeren Münzsorten, welche nach dem Gesetz den Werth eines Stücks höherer Sorte eines und desselben Münzfußes ausmachen) gehen 30 Silbergroschen auf den Thaler. Es gehen aber so viel Silbergroschen auf 1 cölnische Mark fein Silber als aus der Proportion folgt:

Gr. Silb.	Silbergr.	Gr. Silb.	Silbergr.	Silbergr.
64 :	$106^2/_4$ =	288 :	x =	480

Da nun 480 Silbergroschen = 16 × 30 Silbergroschen = 16 Thaler in Silbergroschen 1 cölnische Mark fein Silber enthalten, und eben so viel fein Silber in 14 Thalern gesetzlich enthalten ist, so sind 16 Thaler in Silbergroschen, und nicht, wie nach der Währung, 14 × 30 Silbergroschen oder 14 Thaler in Silbergroschen gleichwerthig mit 14 Thalerstücken.

Derjenige, welcher als Aequivalent von 14 Thalerstücken 14 × 30 Silbergroschen statt 16 × 30 Silbergroschen annimmt, erhält mithin so viel Procent weniger als aus der Proportion folgt:

$$16 : 2 = 100 : x = 12\frac{1}{2}$$

In diesem Sinne sagt man, daß die Silbergroschen um $12\frac{1}{2}$ Procent schlechter als Thalerstücke sind.

Wenn es sich aber darum handelt, zu bestimmen, wie viel Thaler in Silbergroschen gleichwerthig mit 100 Thalerstücken sind, so hat man die Proportion:

Thalerst.	Thlr. in Sgr.	Thalerst.	Thlr. in Sgr.
14 :	16 =	100 :	x = $114^2/_7$

wonach 100 Thalerstücke = $114^2/_7$ Thaler in Silbergroschen sind *).

*) In der Münzconvention der Zollvereinsstaaten vom 30. Juli 1838 ist festgesetzt worden, daß durch diesen Vertrag an den Bestim-

Dieſer Unterſchied in der Ausbringung iſt zum Theil darin begründet, daß überhaupt die Prägkoſten einer gewiſſen Menge Metalls größer iſt, wenn ſie in viele kleinere, als in größere Stücke ausgemünzt wird; es iſt aber auch Niemand verbunden, für mehr als $^1/_6$ Thaler in Silbergroſchen anzunehmen, und es werden jetzt nur ſo viel Silbergroſchen in Umlauf geſetzt, als dem Geldverkehr des Landes angemeſſen iſt. Dagegen, des

---

mungen der Münzconvention vom 25. Auguſt 1837, (welche Bayern, Würtemberg, Baden, Gr. Heſſen, Naſſau und Frankfurt unter ſich abgeſchloſſen) und der beſondern Uebereinkunft über die Scheidemünze nichts geändert werde. Es ſoll nämlich die gemeinſchaftliche Scheidemünze in den contrahirenden Staaten aus Sechs- und Dreikreuzerſtücken von Silber beſtehen. (Die Ausprägung von Kreuzerſtücken von Silber oder Kupfer und die Theilſtücke derſelben bleibt dem Ermeſſen der einzelnen Staaten überlaſſen). Der Silbergehalt der Sechs- und Dreikreuzerſtücke iſt auf $^1/_3$ der Mark feſtgeſetzt, wonach auf $^1/_3$ Silber $^2/_3$ Kupfer kommt, alſo doppelt ſo viel Kupfer wie Silber ($5^1/_3$ löthig). Die Fehlergrenze, welche bei obigen beiden Münzſorten in Mehr oder Weniger eingehalten werden muß, beträgt $^7/_{1000}$ am Feingehalt und $^{15}/_{1000}$ am Gewicht, beides jedoch nicht am einzelnen Stück, ſondern nur in der ganzen Mark.

Durch die im Jahr 1837 abgeſchloſſene Münzconvention ſollte dem in den genannten Staaten ſich immer dringender kund gebenden Bedürfniß nach Münzen, welche zum Erſatz der Viertel- und Halben-Kronenthaler dienen können, abgeholfen werden. Als Hauptmünze ſoll daher nach einem $24^1/_2$-Guldenfuß Guldenſtücke zu 60 Kreuzer, und halbe Guldenſtücke von $^9/_{10}$ Korn geprägt werden. Remedium für ganze und halbe Guldenſtücke $^3/_{1000}$ im Feingehalt und $^5/_{1000}$ am Gewicht. Die nach dem bisherigen Syſteme ausgeprägten ganzen Kronenthaler werden in ihrem bisherigen Kurs von 2 fl. 42 kr. aufrecht erhalten.

Es hat nämlich früher ſchon, durch die zu hohe Annahme des brabanter Kronenthalers, ſo wie der Viertels- und halben Kronenthaler ein $24^1/_2$-Guldenfuß factiſch beſtanden. Geſetzmäßig enthalten 9,084 brabanter Kronenthaler 1 cölniſche Mark fein Silber, da nun 24 Gulden des 24-Guldenfußes (5.) ebenfalls 1 cölniſche Mark fein Silber enthalten, ſo ergibt ſich der Werth eines brabanter Kronenthalers in Gulden des 24-Guldenfußes aus der Proportion:

br. Thlr. fl.-24-fl. F. br. Thlr. fl.

9,084 : 24 = 1 : x = 2 fl. $38^1/_2$ kr.

Nun wurde aber der brabanter Kronenthaler zu 2 fl. 42 kr. im 24-Guldenfuß angenommen, alſo um $3^1/_2$ kr. (oder mehr als 2 Procent) über ſeinen Werth. Dieſe Werthüberſchätzung des brabanter Kronenthalers hatte zur Folge, daß mehrere deutſche Staaten nicht nur Kronenthaler

Gewinnes wegen, großer Mißbrauch in andern Ländern durch zu große Anhäufung geringhaltiger Scheidemünzen, und durch Verordnungen, welche zur Annahme einer größern Quantität von Scheidemünzen verpflichten, als zur Ausgleichung erforderlich ist. Daher das häufige Nachprägen gleichhaltiger Münzen von ausländischen Münzfabrikanten und von Falschmünzern.

Zweiter Abschnitt.

Goldmünze.

34. Sowie, nach den in §. 27 angeführten Untersuchungen, das Mischungsverhältniß 9 : 1 beziehlich für Silber und Kupfer am geeignetsten für Silbermünzen ist, so ist auch eine Legirung von 9 Gewichtsmengen Gold mit 1 Gewichtsmenge Kupfer am geeignetsten für Goldmünzen. Wenn aber 9 Gewichtsmengen Gold mit 1 Gewichtsmenge Kupfer legirt werden, so sind in 10 Gewichtsmengen der legirten Masse 9 Gewichtstheile Gold, oder in 24 Gewichtsmengen (die für Goldmünzen und Goldarbeiten in Deutschland angenommene Mischungseinheit) der legirten Masse so viel Gewichtsmengen Gold als aus der Proportion folgt:

$$10 : 9 = 24 : x = 21\tfrac{3}{5}$$

wonach die Masse, welche dem obigen Mischungsverhältniß entspricht, $21\frac{3}{5}$ karatig ist. Aus solcher Masse werden in

---

unter ihrem Stempel münzen ließen, sondern auch andere Geldsorten nach demselben willkührlichen Münzfuße in Umlauf setzten.

Wenn aber der brabanter Thaler wirklich 2 fl. 42 kr. des x-Guldenfußes gelten soll; so ergibt sich für die Annahme, daß 9,084 brabanter Kronenthaler 1 cölnische Mark fein Silber enthalten, der gesuchte Münzfuß aus der Proportion:

$$\text{br. Thlr.} \quad \text{fl.} \qquad \text{br. Thlr.} \quad \text{fl.}$$
$$9{,}084 \; : \; x \; = \; 1 \; : \; 2^{42}/_{60}$$

woraus $x = 9{,}084 \times 2^{42}/_{60} = 24{,}5268$ fl. was beiläufig einem $24^{52}/_{100}$-Guldenfuße entspricht. Statt dessen hat die Münzconvention von 1837 (und nach ihr die von 1838) einen $24\frac{1}{2}$-Guldenfuß für die Vereinsmünze angenommen. Nach diesem Münzfuße stellt sich der Werth des brabanter Kronenthalers auf 2 fl. 41 kr. $3^{3}/_{10}$ Heller des $24\frac{1}{2}$-Guldenfußes.

Frankreich, Belgien, zum Theil im Königreich der Niederlande, in den meisten italienischen Staaten und in mehreren andern Ländern Goldmünzen geprägt.

Werthsverhältniß des Silbers zum Golde.

35. Weil das Verhältniß der Preise des ungemünzten Silbers zu den Preisen des ungemünzten Goldes veränderlich ist, *) so können nicht zugleich Silbermünzen und Goldmünzen als gesetzliches Zahlungsmittel dienen, sondern es kann nur die Münze von einem der beiden Metalle hierzu gebraucht werden, wonach die Werthsbestimmung der Münze des andern Metalls dem freien Verkehr überlassen bleiben muß.

In den meisten Ländern hat man in obiger Beziehung das Silber, als das häufiger vorhandene und zur Vergütung kleiner Werthe dienlichere Metall, dem Golde vorgezogen.

Aus dem Preisverhältniß des Silbers und Goldes ergibt sich, wie viel Gewichtsmengen Silber gleichwerthig mit einer als Einheit angenommene Gewichtsmenge Gold sind. Ist z. B. in Frankfurt a. M. der Preis der cölnischen Mark fein Gold 373 fl. und der Preis der cölnischen Mark hochhaltigen Silbers $24^1/_3$ fl., so ist das Preisverhältniß

$$\frac{24^1/_3}{373} = \frac{1}{15^{24}/_{73}};$$

wonach $15^{24}/_{73}$ Gewichtsmengen Silber gleichwerthig mit 1 Gewichtsmenge Gold sind.

Nominalwerth der Goldmünze.

36. Obgleich die Werthsbestimmung der Goldmünze dem freien Verkehr überlassen bleibt, so bestimmen doch die Münzgesetze einen Werth derselben für solche Fälle, in welchen Zahlungen in Gold vertraggemäß festgesetzt sind. So ist z. B. der auf dem preußischen Friedrichsd'or bezeichnete Werth desselben (der Nominalwerth) 5 Thaler.

Weil $38^{10}/_{13}$ Friedrichsd'or oder $38^{10}/_{13} \times 5$ Thaler $= 193^{11}/_{13}$ Thaler in Gold 1 cölnische Mark fein Gold enthalten,

*) Vor der Entdeckung von Amerika, in der alten und mittlern Zeit, galt das Gold ungefähr die 10 bis 12fache Menge Silbers; im Durchschnitt vom 13ten Jahrhundert bis zur Mitte des 16ten die $10^1/_2$fache; seit dem Einströmen der amerikanischen Metallmassen stieg es anfangs auf das 15fache, fiel dann im 18ten Jahrhundert wegen der reichen Goldausbeute Brasiliens um das 14fache, bis es später wieder etwas stieg. (Rau, Grundsätze der Volkswirthschaftslehre §. 210). Jetzt steht es zwischen dem 15 und 16fachen, und die Schwankungen der Preise sind gewöhnlich unbedeutend.

und weil die cölnische Mark fein Silber zu 14 Thalern ausgebracht wird, so ist die Mark fein Gold so viel mal höher als die Mark fein Silber angesetzt, als 14 in $193^{11}/_{13}$ enthalten ist, d. i. $13^{11}/_{13}$ mal; oder es sind $13^{11}/_{13}$ Mark fein Silber als gleichwerthig mit einer Mark fein Gold bei der Bestimmung des Nominalwerths angenommen worden. Wer aber, vertraggemäß, 1 Mark Gold erhalten soll, wird, wenn man ihm Silber geben will, als Aequivalent mehr als $13^{11}/_{13}$ Mark Silber verlangen, weil man im Handel für 1 Mark Gold mehr als $13^{11}/_{13}$ Mark Silber erhalten kann. Ist z. B. das, dem Silber- und Goldpreise entsprechende Werthsverhältniß $1 : 15^1/_2$, so wird derjenige, welcher vertraggemäß 1 Mark Gold zu erhalten hat, als Aequivalent $15^1/_2$ Mark Silber, und nicht $13^{11}/_{13}$ Mark, also $1^{17}/_{26}$ Mark mehr als $13^{11}/_{13}$ Mark, annehmen. Mithin wird der Friedrichsd'or, in Betracht des darin enthaltenen Goldes um so viel Procent höher angeschlagen werden, als aus der Proportion folgt:

$$13^{11}/_{13} : 1^{17}/_{26} = 100 : x = 11^{17}/_{18},$$

wonach, unter obiger Voraussetzung, und abgesehen von allen andern Umständen, welche auf die Preisbestimmung des Friedrichsd'ors Einfluß haben, 100 Thaler in Gold (oder 20 Friedrichsd'or) gleichwerthig mit $111^{17}/_{18}$ Thalern in Silber, und 5 Thaler in Gold (oder 1 Friedrichsd'or) gleichwerthig mit 5 Thalern $17^{11}/_{12}$ Silbergroschen sind. *)

Der auf der Goldmünze bezeichnete Werth kann aber auch demjenigen Werthe, welcher den gewöhnlichen Gold- und Silberpreisen entsprechend ist, so nahe seyn, daß die Goldmünze im gewöhnlichen Verkehr zum Nominalwerthe kursirt, und nur größere Mengen von Goldmünzen zu höhern, als dem Nominalwerthe entsprechenden, Werthen angeschlagen werden. Dieß ist z. B. bei der französischen Goldmünze der Fall. Es wiegen nämlich 155 Zwanzigfrankenstücke 1 Kilogramm, und weil das Korn $^9/_{10}$ ist, so enthalten sie 900 Grammen fein Gold; nun

*) Laut Kabinetsordre vom 31. December 1831 sollen bei allen öffentlichen Kassen 100 Thaler in preußischen Friedrichsd'ors gleich $113^1/_3$ Thalern in Silber (also 1 Friedrichsd'or = 5 Thlr. 20 Sgr.) gerechnet und stets so angenommen und ausgegeben werden. Das entsprechende Werthsverhältniß ist $1 : 15^9/_{13}$.

sind 155 Zwanzigfrankenstücke = 20 × 155 = 3100 Franken in Gold, und mithin gehen auf 1 Kilogramm oder auf 1000 Grammen Gold so viel Franken in Gold als aus der Proportion folgt:

Gr. Gold Fr. in Gold Gr. Gold Fr. in Gold Fr. in Gold

900 : 3100 = 1000 : x = 3444⅘

Weil ferner 1 Frankenstück 4½ Grammen fein Silber enthält, so gehen auf 1000 Grammen Silber so viel Franken als aus der Proportion folgt:

Gr. Silber Fr. Gr. Silber Fr. Fr.

4½ : 1 = 1000 : x = 212⅔

Das Verhältniß des Silbers zum Golde ist hiernach

222⅔ : 3444⅘ oder 1 : 15½ *)

Da nun die gewöhnlichen Silber- und Goldpreise ungefähr dasselbe Verhältniß geben, so kursiren die Zwanzigfranken- und Vierzigfrankenstücke im gewöhnlichen Verkehre zu ihrem Nominalwerthe, und nur in größern Mengen stehen sie höher.

Was, in Mitbeziehung auf §. 32, den Schlagschatz für die Goldmünze in Frankreich betrifft, so geben die Münzstätten für 1 Kilogramm Gold von $^{9}/_{10}$ Korn, also für 900 Grammen,

---

*) Bei der Untersuchung, in wie weit das dem Münzfuß entsprechende Werthsverhältniß des Silbers und Goldes mit dem Handelsverhältniß des ungemünzten Silbers und Goldes übereinstimmt, hat man übrigens statt der gesetzlichen Angaben über die Ausmünzung die Ergebnisse von Münzproben, wenn solche angestellt worden sind, in Rechnung zu bringen. So hat man z. B. nach Nelkenbrechers allgemeinen Taschenbuch der Maaß-, Gewichts- und Münzkunde (Berlin, 1843), gefunden, daß von Fünffrankenstücken v. J. 1830 und 1831, 9,365 Stück, im Gewicht von 1 cölnischen Mark, 14⅓ Loth (statt gesetzmäßig 14⅖ Loth) fein Silber enthalten, und daß von Zwanzigfrankenstücken v. J. 1831, 36,655 Stück, im Gewicht von 1 cölnischen Mark, 21$^{25}/_{48}$ Karat (statt gesetzmäßig 21⅗ Karat) fein Gold enthalten. Hiernach ergibt sich das wirkliche Werthsverhältniß für die betreffenden Ausmünzungen aus der Kette:

x Mark Silber	=	1 Mark fein Gold
1	=	24 Karat fein Gold
21$^{25}/_{48}$	=	36,655 Zwanzigfrankenstück
1	=	20 Franken
5	=	1 Fünffrankenstück
9,365	=	14⅓ Loth fein Silber
16	=	1 Mark „ „
x	=	15,64 Mark fein Silber.

$900 - 1^{23}/_{31} = 898^{8}/_{31}$ Grammen Gold in Zwanzigfranken- oder Vierzigfrankenſtücken. Weil 155 Zwanzigfrankenſtücke 1 Kilogramm wiegen, ſo enthalten 155 Zwanzigfrankenſtücke, oder 155×20 Franken, oder 3100 Franken in Gold 900 Grammen Gold. Auf $898^{8}/_{31}$ Grammen Gold gehen daher ſo viel Franken in Gold als aus der Proportion folgt:

Gr. Gold	Gr. Gold	Fr. in Gold	Fr. in Gold	Fr. in Gold
900 :	$898^{8}/_{31}$ =	3100 :	x =	3094

Die Münzſtätten übernehmen alſo das Kilogramm Gold von $^{9}/_{10}$ Korn für 3094 Franken, und prägen daraus 3100 Fr.; der Schlagſchatz beträgt alſo 6 Franken (= $1^{23}/_{31}$ Grammen Gold) oder 0,19 Procent.

Zahlt die Münzſtätte für 900 Grammen Gold 3094 Franken, ſo zahlt ſie für 1000 Grammen Gold ſo viel als aus der Proportion folgt:

Gr. Gold	Fr.	Gr. Gold	Fr.	Fr. C.
900 :	3094 =	1000 :	x =	3437 77,777

Aus 1000 Grammen Gold werden aber ſo viel Franken geprägt, als aus der Proportion folgt:

Gr. Gold	Fr.	Gr. Gold	Fr.	Fr. C.
900 :	3100 =	1000 :	x =	3444 44,444

Auf den Grund des in obiger Berechnung nachgewieſenen Tarifs vom 1. Juli 1835 *) werden die Preiſe des Goldes in der Art beſtimmt, daß das Kilogramm Gold von $^{9}/_{10}$ Korn zu 3094 Fr. angeſetzt, und ein Agio von ſo und ſo viel von 1000 Franken aufgerechnet wird.

---

*)

	Sans retenue ou au pair.	Avec retenue au change.
Or pur	Fr. C. 3444 44,444	Fr. C. 3437 77,777
Or à 900 m	Fr. 3100	Fr. 3094

Dritter Abschnitt.

Platinamünze.

Gesetzliches Werthsverhältniß u. Handelswerths-Verhältniß des Silbers zum Platin.

Kosten der Ausprägung.

37. In Rußland wird seit dem Jahr 1828 auch Platin,*) ohne Zusatz, zu Münzen verwendet. Es giebt Dreirubelstücke von 1828, Sechsrubelstücke von 1829 und Zwölfrubelstücke von 1830, beziehlich im Gewicht von 233, 466 und 932 Doli. Das Korn des Silberrubels, der russischen Münzeinheit, ist $\frac{83\frac{1}{3}}{96}$ d. h. in 96 Gewichtsmengen der legirten Masse sind $83\frac{1}{3}$ Gewichtsmengen Silber enthalten, und 100 Stück Silberrubel wiegen 5 Pfund und 6 Solotnik. Da nun 1 russisches Pfund = 96 Solotnik, und 96 Solotnik = 96 Doli, so ergibt sich das gesetzliche Werthsverhältniß des Silbers zum Platin aus der Kette:

x russische Pfund Silber = 1 Pfund Platin
1 = 96 Solotnik „
1 = 96 Doli „
233 = 1 Dreirubelplatinstück
1 = 3 Silberrubel
100 = $5\frac{6}{96}$ Pfund legirte Masse
1 = $85\frac{1}{3}$ Solotnik Silber
96 = 1 Pfund „

$x = 5\frac{21}{100}$ Pfund Platin.

Die Unze Platin kostet jetzt in Paris ungefähr 30 Franken, und das alte Pariser Pfund ist = 16 Unzen = 500 Gram-

*) Dieses, seit 1750 in Europa bekannte, Metall findet sich hauptsächlich im Ural und im südlichen Amerika, in Gestalt kleiner Körner von eisengrauer Farbe. Das rohe Platin enthält mehrere andere Metalle; das, von seinen Beimischungen befreite, reine Platin hat eine graue, zwischen Silber und Stahl stehende Farbe, bedeutenden Glanz, spec. Gew. 21,5; ist härter als Kupfer, aber sehr dehnbar, im gewöhnlichen Feuer unschmelzbar, und läßt sich nur vor dem Sauerstoff- oder Knallgasgebläse in Fluß bringen; es läuft weder an der Luft, noch im Feuer an, und wird nur von Königswasser aufgelöst. Wegen seiner Feuerbeständigkeit und seiner Unauflöslichkeit in Säuren wird das Platin vorzüglich zu chemischen Geräthschaften verwendet. Zu Bijouteriearbeiten ist es nicht so brauchbar wie Gold und Silber, weil es schwer zu verarbeiten, und, obgleich höher im Werthe als Silber, nicht so schön von Farbe und nicht so polituxfähig als letzteres Metall ist. Die Hauptbezugsörter des Platins sind Paris, London und Petersburg.

men. Hiernach ergiebt sich das Werthsverhältniß des Silbers zum Platin aus der Kette:

x Kilogramm Silber = 1 Kilogramm Platin
1 = 1000 Grammen „
500 = 16 Unzen „
1 = 30 Franken
1 = 4½ Grammen Silber
1000 = 1 Kilogramm „

x = 4,32 Kilogramm Silber.

Wenn also die Unze Platin in Paris 30 Franken gilt, so hat daselst das Platin einen 4,32 mal größeren Werth als Silber.

Wenn die Unze Platin in Petersburg ebenfalls auf 30 Franken zu stehen käme, so würde, da 4 Franken gleichwerthig mit 1 Siberrubel sind, 1 Dreirubelplatinstück so viel Silberrubel werth seyn, als aus der Kette folgt:

x Silberrubel = 1 Dreirubelplatinstück
1 = 233 Doli Platin
96 = 1 Solotnik „
96 = 1 Pfund „
1 = 409,5 Grammen Platin
500 = 16 Unzen Platin
1 = 30 Franken
4 = 1 Silberrubel

x = 2,48 Silberrubel.

Da nun die Platinmünze, von welcher hier die Rede ist, zu 3 Silberrubel ausgebracht ist, so würde der Prägeschatz so viel Procent betragen, als aus der Proportion folgt:

$$2{,}48 : (3-2{,}48) = 100 : x = 20{,}96$$

Der wirkliche Prägeschatz wird aber auf mehr als 50 Procent angeschlagen. Jedenfalls sind die Kosten der Ausprägung des Platins, weil es schwer zu verarbeiten ist, höher als beim Silber und Golde.

Vierter Abschnitt.

Kupfermünze.

Unterschied zwischen dem wirklichen Werthe und dem

38. Bei der Kupfermünze ist der Unterschied zwischen dem wirklichen Werthe und dem Nominalwerthe noch größer als

bei der Silberscheidemünze. Man erhält diesen Unterschied, wenn man berechnet, wie viel eine bestimmte Menge Kupfer nach dem Preise des ungemünzten Kupfers werth ist, und zu wie viel Münzeinheiten dieselbe Menge Kupfer ausgeprägt wird. Nominalwerthe der Kupfermünze.

Da z. B. in Preußen 12 Kupferpfennigstücke auf 1 Groschen, und 30 Groschen auf 1 Thaler gehen, so haben 360 Pfennigstücke gesetzlich den Werth eines Thalers. Es wiegen 12 Pfennigstücke 5 Quentchen; wenn nun der Centner (= 110 Pfund) Kupfer zu 35 Thaler angenommen werden kann, so sind die auf 1 Thaler gehenden 360 Pfennigstücke so viel werth, als aus der Kette folgt:

$$\begin{aligned} x \text{ Thaler} &= 360 \text{ Pfennigstücke} \\ 12 &= 5 \text{ Quentchen} \\ 4 &= 1 \text{ Loth} \\ 32 &= 1 \text{ Pfund} \\ 110 &= 1 \text{ Centner} \\ 1 &= 35 \text{ Thaler} \\ \hline x &= {}^{525}/_{1408} \text{ Thaler.} \end{aligned}$$

Wenn nun 360 Pfennigstücke zu 1 Thaler ausgebracht werden und nur ${}^{525}/_{1408}$ Thaler werth sind, so beträgt die Differenz des wirklichen Werthes und des Nominalwerthes so viel Procent als aus der Proportion folgt:

$${}^{525}/_{1408} : (1 - {}^{525}/_{1408}) = 100 : x = 168.$$

Fünfter Abschnitt.

Handelswerth der Münzen.

39. Diejenigen Münzen, deren Werthsbestimmung dem freien Verkehr überlassen ist, also die ausländischen Silbermünzen, sowie die inländischen und ausländischen Goldmünzen, haben, als Waare betrachtet, ihren Preis, und man nennt ihn Curs. Auf den bedeutendern Handelsplätzen werden die Geldcurse zugleich mit den Cursen der Wechsel und anderer Papiere durch die Curszettel bekannt gemacht. Im Handelsverkehr kommt es übrigens bei der Werthsbestimmung der

Münzen nicht immer auf ihren Gehalt an edlem Metall, sondern auf den Grad der Brauchbarkeit derselben zu Zahlungen an (in so fern z. B. als man nach gewissen Ländern ausschließlich mit dieser oder jener Münze Zahlungen machen muß, wie nach China mit spanischen Piastern oder holländischen Ducaten ꝛc.), so daß es geschehen kann, daß bessere Münzen im Verkehr geringer gehalten werden, als schlechtere.

Agio. Disagio oder Verlust.

Der Unterschied zwischen dem Nominalwerth und dem Handelswerth oder Curs einer Münze heißt Agio, vorausgesetzt, daß letzterer größer als ersterer ist. Im entgegengesetzten Falle, welcher übrigens selten vorkommt, heißt die Differenz Disagio oder Verlust.

Was insbesondere die Goldmünzen betrifft, so haben solche, unter übrigens gleichen Umständen, in denjenigen Ländern, in welchen das gesetzlich angenommene Werthsverhältniß des Silbers zum Golde niedrig ist (wie z. B. in Preußen 1 : $13^{11}/_{13}$), ein größeres Agio, als in denjenigen Ländern, in welchen das Handelswerthsverhältniß dieser Metalle sich nicht so weit vom gesetzlichen Werthsverhältniß entfernt (wie z. B. in Frankreich, wo letzteres 1 : $15\frac{1}{2}$ ist (§. 11).

Der Nominalwerth des preußischen Friedrichsd'ors z. B. ist 5 Thaler. Gilt er nun im Handel 5 Thaler 20 Silbergroschen, so sind die 20 Silbergroschen das Agio, und zwar das Agio vom Stück, denn das Agio kann auch nach Procenten bestimmt werden. In den Curszetteln wird aber das Agio nur in Procenten angegeben. So sind z. B. 20 Friedrichsd'or $= 20 \times 5$ Thaler oder $= 100$ Thaler in Gold; giebt man nun für 1 Friedrichsd'or, oder für 5 Thaler in Gold, 5 Thaler 20 Silbergroschen in Silbermünze, so giebt man für hundert Thaler in Gold so viel Thaler in Silbermünze, als aus der Proportion folgt:

Thlr. in Gold	Thlr. in Silb.		Thlr in Gold	Thlr. in Silb.		Thlr. in Silb.
5	: $5^2/_3$	=	100	: x	=	$113^1/_3$

wonach das Agio $13^1/_3$ % beträgt, wenn der Curs des Friedrichsd'ors 5 Thaler 20 Silbergroschen ist.

Aus dem in Procenten ausgedrückten Agio ergiebt sich, in Beziehung auf obiges Beispiel, der Curs vermittelst der Proportion:

Thlr. in Gold	Thlr. in Silb.		Thlr. in Gold	Thlr. in Silb.		Thlr. in Silb.
100	: $113^1/_3$	=	5	: x	=	$5^2/_3$

Für die ausländischen Goldmünzen ist zur Bestimmung des Agios das in der inländischen Goldmünze ausgedrückte Aequivalent desselben der Stellvertreter des Nominalwerths. So ist z. B. in Preußen, nach dem zur Belehrung des Publikums erschienenen Münz-Edikt vom 30. September 1821, der Werth der holländischen, österreichischen und andern Ducaten zu 2¾ Thaler, in Friedrichsd'or zu 5 Thaler festgesetzt *). Beträgt nun z. B. das Agio der Ducaten in Berlin 12 Procent, so ergiebt sich der Curs aus der Proportion:

Thlr. in Duc. Thlr. in Silb. Thlr. in Duc. Thlr. in Silb. Thlr. in Silb.

$$100 : 112 = 2\tfrac{3}{4} : x = 3^{52}/_{100}$$

Preisnotirung der Münzen nach der Mark.

40. Die Preise der Münzen werden auch auf manchen Handelsplätzen nach der Mark (al marco) notirt. Gelten z. B. in Hamburg die Ducaten 428 Mark banco **) per 1 cölnische Mark fein Gold, wobei angenommen wird, daß 67 Ducaten 23½ Karat Gold enthalten, so ergiebt sich der jenem Preise entsprechende Curs aus der Kette:

---

*) S. in §. 42 die Werthsbestimmung des holländischen Dukaten in Friedrichsd'or zu 5 Thaler.

**) Eine fingirte Bankvaluta in Hamburg. Die dortige Girobank hat, als solche, den Zweck, den Einlegern das Geschäft des Geldauszahlens und Geldeinnehmens zu erleichtern, indem die gegenseitigen Zahlungen dadurch bewerkstelligt werden, daß Derjenige, welcher einen Gläubiger bezahlen will, den Rechnungsführer der Bank beauftragt, den Bankfond seines Gläubigers um die Summe, welche er ihm schuldig ist, für seine Rechnung zu vermehren. Zu dem Ende wird jedem Einleger ein Conto eröffnet. Wenn z. B. A 10000 Mark und B 16000 Mark in die Bank legen, so werden dem Erstern 10000 Mark und dem Andern 16000 Mark gutgeschrieben; will nun A dem B eine Bankzahlung von 1000 Mark machen, so wird das Conto des Letztern für diesen Betrag creditirt, und das Conto des A dafür belastet. Der Bankfond des B beträgt also jetzt 17000 Mark, und derjenige des A nur noch 9000 Mark. Die Einlage muß in $15^{2}/_{3}$-löthigen Silberbarren (§. 44) geschehen; die cölnische Mark fein Silber wird zu 27 Mark 10 Schillingen in Banco eingeschrieben; hingegen werden bei der Herausnahme von der Bank 27 Mark 12 Schillinge banco berechnet oder abgeschrieben. Von dieser Bankvaluta gehen demnach, da 3 Mark = 1 Thaler und 1 Mark = 16 Schillinge, $9^{5}/_{24}$ Thaler banco oder $27^{5}/_{8}$ Mark banco auf 1 cölnische Mark. Nach der Courantvaluta wird die cölnische Mark Silber zu $11^{1}/_{3}$ Thaler oder 34 Mark ausgeprägt. Hiernach sind 100 Mark banco so viel werth wie $123^{17}/_{22}$ Mark courant; der Unterschied beträgt daher $23^{17}/_{22}$ Procent, und das Bankagio schwankt gewöhnlich zwischen 23 und 24 Procent.

x Mark banco = 1 Ducat,
67 = 23½ Karat Gold,
24 = 1 cöln. Mark,
1 = 428 Mark banco.

Werden gleichzeitig mehrere Goldsorten nach der Mark verkauft, so kann man vorerst berechnen, wie viel Gold in sämmtlichen Stücken enthalten ist, und hieraus bestimmen, wie viel man nach dem Preis der Mark Gold dafür zu zahlen hat.

Werden z. B. in Hamburg 134 Ducaten und 336 englische Guineen zu 428 Mark banco verkauft, und berechnet man vorläufig, wie viel Gold in jenen beiden Goldsorten enthalten ist, so hat man

Duc. Kar. Gold Duc. Kar. Gold Kar. Gold
67 : 23½ = 334 : x = 47

und, weil angenommen wird, daß 28 Guineen $21^{11}/_{12}$ Karat Gold enthalten,

Guin. Kar. Gold Guin. Kar. Gold Kar. Gold
28 : $21^{11}/_{12}$ = 336 : x = 263

Da nun in 134 Ducaten und 336 Guineen enthalten sind 47 + 263 = 310 Karat Gold, so hat man nach obigem Preise so viel dafür zu zahlen, als aus der Proportion folgt:

Kar. Gold Mark bco. Kar. Gold Mark bco. Mark bco.
24 : 428 = 310 : x = $5528^{1}/_{3}$

Die spanischen Piaster (Silbermünze) werden in Hamburg ebenfalls nach der Mark verkauft, und es wird dabei angenommen, daß 26 Piaster 43 cölnische Loth Silber enthalten.

Es giebt indessen noch andere Arten, den Preis der Münzen nach der Mark zu bestimmen. In Augsburg z. B. werden die Ducaten zu 4¼ Gulden des 20-fl. Fußes in Gold, mit einem Agio von 9—10 Procent nach dem Gewicht verkauft, wobei angenommen wird, daß 67 Stück eine cölnische Mark wiegen müssen. Wenn z. B. eine Anzahl von Ducaten 800 cölnische Mark wiegen, und wenn solche zu 9 Procent verkauft werden, so hat man dafür so viel zu zahlen, als aus der Kette folgt:

x fl. im 20-fl. Fuß = 800 cöln. Mark Ducaten,
1 = 67 Ducaten,
1 = 4½ fl. im 20-fl. Fuß in Duc.,
100 = 109 fl. im 20-fl. Fuß.

Geldarbitrage. 41. Weil eine und dieselbe Geldsorte an verschiedenen Orten, in Folge unterschiedlicher Handelsverhältnisse, verschie-

dene Cursnotirungen haben kann, so kann, wenn Geldüberſendungen (Baarſendungen) an Gläubiger zu machen ſind, die Frage entſtehen, vermittelſt welcher Münze die Schuld mit dem geringſten Geldaufwande getilgt werden könne. Die desfalls anzuſtellende Berechnung heißt in der kaufmänniſchen Sprache Arbitrage (von arbitrium). Man kann aber auch des Gewinnes wegen eine Geldſorte gegen eine andere umſetzen, wenn die Curſe derſelben Speculation darbieten, und zu gleichem Zweck Geldoperationen mit Wechſeloperationen combiniren.

In Beziehung auf den zuerſt aufgeſtellten Fall wollen wir annehmen, daß in Mailand die ehemaligen Napoleonsd'or von 40 Liren zu 46½ öſterreichiſchen Liren, und die Louisd'or (ſ. 1785) zu 26¾ öſterreichiſchen Liren vom Gläubiger angenommen werden; wenn nun in Wien die Napoleonsd'or zu 15½ Gulden, und die Louisd'or zu 9 fl. zu haben ſind, ſo kommt die Abtragung irgend einer Anzahl öſterreichiſcher Liren, z. B. 100, dem Schuldner in Wien in beiden Geldſorten auf ſo viel Gulden zu ſtehen, als aus den Anſätzen folgt:

Napoleonsd'or.		Louisd'or.	
x fl.	= 100 öſter. Lir.	x fl.	= 100 öſter. Lir.
46½	= 1 Nap.	26¾	= 1 Ld'or.
1	= 15½ fl.	1	= 9 fl.
x	= 33 fl. 20 kr.	x	= 33 fl. 38 kr.

Vermittelſt Napoleonsd'or wird die Schuld mit einem geringern Geldaufwande als vermittelſt Louisd'or abgetragen; denn vermittelſt der letztern Sorte kommen 100 Liren auf 33 fl. 38 kr., und vermittelſt erſterer nur auf 33 fl. 20 kr. zu ſtehen; und je größer der zu übermachende Betrag iſt, deſto mehr wird vermittelſt der günſtigen Sorte im Vergleich mit der andern erſpart.

Sechster Abſchnitt.

Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß.

42. Bei der Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß hat man zu berechnen, wie viel Münzen von einer und derſelben Sorte eben ſo viel Silber oder Gold als eine andere Münze enthalten. Der Zuſatz an Kupfer wird hierbei als

x fl. im 24½-fl. F. oder x Th. im 24-Th. F. = 1 Silberrubel.

100 = $5^{6}/_{96}$ ruff. Pfund.

1 = $83^{1}/_{3}$ Solotnik Silber.

96 = 1 ruff. Pfund.

1 = 409,5174 Grammen.

233,855 *) = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 24½ fl. des 24½-fl. Fußes. oder 14 Thlr. des 14-Thlr. Fußes.

Die Tabelle der Goldmünzen enthält z. B. folgende Angaben in Betreff des holländiſchen Ducaten:

Münze.	Auf 1 cöln. Mk. brutto gehen	Gewicht von 1 Stück in holl. As.	Korn.		Auf 1 cöln. Mark fein gehen	Werth eines Stücks in			
						geſetzm. Fr.d'or zu 5 Th. Gold	Friedrichsd'or zu 5⅓ Thl. cour.		
	Stück		Kar.	Gr.	Stück	Thlr. Gold	Th.	Sg.	Pf.
Ducat	66,931	72,67	23	7	68,1134	2,81593	3	6	9,1

Weil 1 holländiſcher Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegen ſoll, ſo ergiebt ſich die erſte Angabe aus der Kette:

x Ducaten = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 233,855 Grammen.

3,494 = 1 holl. Ducat.

Weil das Korn des holländiſchen Ducaten geſetzmäßig $\frac{983}{1000}$ iſt, ſo ergiebt ſich das Korn in Beziehung auf die Miſchungseinheit von 1 cölniſchen Mark = 24 Karat = 288 Grän aus der Proportion:

1000 : 983 = 24 : x = $23^{7}/_{12}$ oder 23 Karat 7 Grän.

Weil 1 Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegt, und 1000 Grammen der legirten Maſſe 983 Grammen Silber enthalten, ſo enthalten 1000 Ducaten ſo viel als aus der Kette folgt:

x Grammen Gold = 1000 Ducaten.

1 = 3,494 Grammen.

1000 = 983 = Gold.

x = 3434,602 Grammen Gold.

*) S. §. 28.

Hiernach gehen so viel Ducaten auf 1 preuß.-cölnische Mark Gold, als aus der Kette folgt:

x Ducaten = 1 preuß.-cöln. Mark Gold.
1 = 233,855 Grammen.
3434,602 = 1000 Ducaten.

Das Resultat entspricht mithin der vierten Angabe in obiger Tabelle.

Die fünfte und sechste Angabe ergiebt sich aus dem Ansatze:

x Thlr. in Gold zu 5 Thlr.
oder
x Thlr. in Gold zu $5\frac{2}{3}$ Thlr. cour. } = 1 Ducat.

1 = 3,494 Grammen.
1000 = 983 „ Gold.
233,855 = 1 preuß.-cöln. Mark.
1 = 288 Grän.
260 = 35 Ducaten.
1 = { 5 Thaler in Gold oder $5\frac{2}{3}$ Thaler courant.

Die oben angeführten Tabellen enthalten außerdem auch die den Ergebnissen von Münzuntersuchungen entsprechenden Werthe mancher Münzen.

Eine andere Münztabelle enthält die Werthe der Rechnungsmünzen aller Länder. Man versteht hierunter dasjenige Geld, in welchem Buch und Rechnung im Handel geführt wird. Theils ist die Rechnungsmünze zugleich Zahlungsmünze, wie z. B. der preußische Thaler; theils ist sie fingirtes oder eingebildetes Geld, wie z. B. der Reichsthaler Giro in Augsburg, die Mark banco in Hamburg.

Siebenter Abschnitt.

Valvation der Münzen.

43. Unter Valvation versteht man die gesetzliche Preisbestimmung fremder Geldsorten, nach welcher solche bei den Cassen der Regierung, der Gemeinden und Stiftungen angenommen werden. Hierbei erfordert die Münzpolitik, die fremde Münze

x fl. im 24½-fl. F. oder x Th. im 24-Th. F. = 1 Silberrubel.

100 = $5^{6}/_{96}$ ruff. Pfund.

1 = $83^{1}/_{3}$ Solotnik Silber.

96 = 1 ruff. Pfund.

1 = 409,5174 Grammen.

233,855 *) = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 24½ fl. des 24½-fl. Fußes. oder 14 Thlr. des 14-Thlr. Fußes.

Die Tabelle der Goldmünzen enthält z. B. folgende Angaben in Betreff des holländiſchen Ducaten:

Münze.	Auf 1 cöln. Mk. brutto gehen	Gewicht von 1 Stück in holl. Mz.	Korn.		Auf 1 cöln. Mark fein gehen	Werth eines Stücks in gesetzm. Fr.d'or zu 5 Th. Gold	Friedrichsd'or zu 5⅓ Thl. cour.		
	Stück		Kar.	Gr.	Stück	Thlr. Gold	Th.	Sg.	Pf.
Ducat	66,931	72,67	23	7	68,1134	2,84393	3	6	9,1

Weil 1 holländiſcher Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegen ſoll, ſo ergiebt ſich die erſte Angabe aus der Kette:

x Ducaten = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 233,855 Grammen.

3,494 = 1 holl. Ducat.

Weil das Korn des holländiſchen Ducaten geſetzmäßig $\frac{983}{1000}$ iſt, ſo ergiebt ſich das Korn in Beziehung auf die Miſchungseinheit von 1 cölniſchen Mark = 24 Karat = 288 Grän aus der Proportion:

1000 : 983 = 24 : x = $23^{7}/_{12}$ oder 23 Karat 7 Grän.

Weil 1 Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegt, und 1000 Grammen der legirten Maſſe 983 Grammen Silber enthalten, ſo enthalten 1000 Ducaten ſo viel als aus der Kette folgt:

x Grammen Gold = 1000 Ducaten.

1 = 3,494 Grammen.

1000 = 983 = Gold.

x = 3434,602 Grammen Gold.

*) S. §. 28.

dene Cursnotirungen haben kann, so kann, wenn Geldübersendungen (Baarsendungen) an Gläubiger zu machen sind, die Frage entstehen, vermittelst welcher Münze die Schuld mit dem geringsten Geldaufwande getilgt werden könne. Die desfalls anzustellende Berechnung heißt in der kaufmännischen Sprache Arbitrage (von arbitrium). Man kann aber auch des Gewinnes wegen eine Geldsorte gegen eine andere umsetzen, wenn die Curse derselben Speculation darbieten, und zu gleichem Zweck Geldoperationen mit Wechseloperationen combiniren.

In Beziehung auf den zuerst aufgestellten Fall wollen wir annehmen, daß in Mailand die ehemaligen Napoleonsd'or von 40 Liren zu 46½ österreichischen Liren, und die Louisd'or (s. 1785) zu 26¾ österreichischen Liren vom Gläubiger angenommen werden; wenn nun in Wien die Napoleonsd'or zu 15½ Gulden, und die Louisd'or zu 9 fl. zu haben sind, so kommt die Abtragung irgend einer Anzahl österreichischer Liren, z. B. 100, dem Schuldner in Wien in beiden Geldsorten auf so viel Gulden zu stehen, als aus den Ansätzen folgt:

Napoleonsd'or.		Louisd'or.	
x fl.	= 100 öster. Lir.	x fl.	= 100 öster. Lir.
46½	= 1 Nap.	26¾	= 1 Ld'or.
1	= 15½ fl.	1	= 9 fl.
x	= 33 fl. 20 kr.	x	= 33 fl. 38 kr.

Vermittelst Napoleonsd'or wird die Schuld mit einem geringern Geldaufwande als vermittelst Louisd'or abgetragen; denn vermittelst der letztern Sorte kommen 100 Liren auf 33 fl. 38 kr., und vermittelst ersterer nur auf 33 fl. 20 kr. zu stehen; und je größer der zu übermachende Betrag ist, desto mehr wird vermittelst der günstigen Sorte im Vergleich mit der andern erspart.

Sechster Abschnitt.

Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß.

42. Bei der Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß hat man zu berechnen, wie viel Münzen von einer und derselben Sorte eben so viel Silber oder Gold als eine andere Münze enthalten. Der Zusatz an Kupfer wird hierbei als

x Mark banco = 1 Ducat,
67 = 23½ Karat Gold,
24 = 1 cöln. Mark,
1 = 428 Mark banco.

Werden gleichzeitig mehrere Goldsorten nach der Mark verkauft, so kann man vorerst berechnen, wie viel Gold in sämmtlichen Stücken enthalten ist, und hieraus bestimmen, wie viel man nach dem Preis der Mark Gold dafür zu zahlen hat.

Werden z. B. in Hamburg 134 Ducaten und 336 englische Guineen zu 428 Mark banco verkauft, und berechnet man vorläufig, wie viel Gold in jenen beiden Goldsorten enthalten ist, so hat man

Duc. Kar. Gold Duc. Kar. Gold Kar. Gold
67 : 23½ = 334 : x = 47

und, weil angenommen wird, daß 28 Guineen $21\frac{11}{12}$ Karat Gold enthalten,

Guin. Kar. Gold Guin. Kar. Gold Kar. Gold
28 : $21\frac{11}{12}$ = 336 : x = 263

Da nun in 134 Ducaten und 336 Guineen enthalten sind 47 + 263 = 310 Karat Gold, so hat man nach obigem Preise so viel dafür zu zahlen, als aus der Proportion folgt:

Kar. Gold Mark bco. Kar. Gold Mark bco. Mark bco.
24 : 428 = 310 : x = $5528\frac{1}{3}$

Die spanischen Piaster (Silbermünze) werden in Hamburg ebenfalls nach der Mark verkauft, und es wird dabei angenommen, daß 26 Piaster 43 cölnische Loth Silber enthalten.

Es giebt indessen noch andere Arten, den Preis der Münzen nach der Mark zu bestimmen. In Augsburg z. B. werden die Ducaten zu 4¼ Gulden des 20-fl. Fußes in Gold, mit einem Agio von 9—10 Procent nach dem Gewicht verkauft, wobei angenommen wird, daß 67 Stück eine cölnische Mark wiegen müssen. Wenn z. B. eine Anzahl von Ducaten 800 cölnische Mark wiegen, und wenn solche zu 9 Procent verkauft werden, so hat man dafür so viel zu zahlen, als aus der Kette folgt:

x fl. im 20-fl. Fuß = 800 cöln. Mark Ducaten,
1 = 67 Ducaten,
1 = 4½ fl. im 20-fl. Fuß in Duc.,
100 = 109 fl. im 20-fl. Fuß.

Geldarbitrage. 41. Weil eine und dieselbe Geldsorte an verschiedenen Orten, in Folge unterschiedlicher Handelsverhältnisse, verschie-

dene Cursnotirungen haben kann, so kann, wenn Geldüberſendungen (Baarſendungen) an Gläubiger zu machen ſind, die Frage entſtehen, vermittelſt welcher Münze die Schuld mit dem geringſten Geldaufwande getilgt werden könne. Die desfalls anzuſtellende Berechnung heißt in der kaufmänniſchen Sprache Arbitrage (von arbitrium). Man kann aber auch des Gewinnes wegen eine Geldſorte gegen eine andere umſetzen, wenn die Curſe derſelben Speculation darbieten, und zu gleichem Zweck Geldoperationen mit Wechſeloperationen combiniren.

In Beziehung auf den zuerſt aufgeſtellten Fall wollen wir annehmen, daß in Mailand die ehemaligen Napoleonsd'or von 40 Liren zu 46½ öſterreichiſchen Liren, und die Louisd'or (ſ. 1785) zu 26¾ öſterreichiſchen Liren vom Gläubiger angenommen werden; wenn nun in Wien die Napoleonsd'or zu 15½ Gulden, und die Louisd'or zu 9 fl. zu haben ſind, ſo kommt die Abtragung irgend einer Anzahl öſterreichiſcher Liren, z. B. 100, dem Schuldner in Wien in beiden Geldſorten auf ſo viel Gulden zu ſtehen, als aus den Anſätzen folgt:

Napoleonsd'or.		Louisd'or.	
x fl.	= 100 öſter. Lir.	x fl.	= 100 öſter. Lir.
46½	= 1 Nap.	26¾	= 1 Ld'or.
1	= 15½ fl.	1	= 9 fl.
x	= 33 fl. 20 kr.	x	= 33 fl. 38 kr.

Vermittelſt Napoleonsd'or wird die Schuld mit einem geringern Geldaufwande als vermittelſt Louisd'or abgetragen; denn vermittelſt der letztern Sorte kommen 100 Liren auf 33 fl. 38 kr., und vermittelſt erſterer nur auf 33 fl. 20 kr. zu ſtehen; und je größer der zu übermachende Betrag iſt, deſto mehr wird vermittelſt der günſtigen Sorte im Vergleich mit der andern erſpart.

Sechster Abſchnitt.

Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß.

42. Bei der Werthsvergleichung der Münzen nach dem Münzfuß hat man zu berechnen, wie viel Münzen von einer und derſelben Sorte eben ſo viel Silber oder Gold als eine andere Münze enthalten. Der Zuſatz an Kupfer wird hierbei als

werthlos betrachtet. Weil z. B. 60 österreichische Zwanzigkreuzerstücke 1 cölnische Mark Silber enthalten, und in 14 preußischen Thalern eben so viel Silber enthalten ist, so sind, abgesehen vom Kupfer und von den Prägekosten, 60 Zwanzigkreuzerstücke gleichwerthig mit 14 preußischen Thalern, oder $4^2/_7$ Zwanzigkreuzerstücke = 1 preußischen Thaler. In diesem Sinne sagt man auch, daß $4^2/_7$ Zwanzigkreuzerstücke pari mit 1 preußischen Thaler sind.

Zuverlässige Tabellen, welche Werthsvergleichungen der Gold- und Silbermünzen aller Länder enthalten, findet man in Nelkenbrechers Taschenbuch der Maaß-, Gewichts- und Münzkunde ꝛc. (16. Aufl., Berlin 1842).

Die Tabelle der Silbermünzen enthält folgende Angaben:

1) Wie viel Stück der Münze 1 cölnische Mark wiegen, oder auf 1 rauhe Mark oder Mark brutto gehen;
2) das Korn der Münze;
3) wie viel Stück einer Münze 1 cölnische Mark Silber enthalten, oder auf 1 Mark fein gehen;
4) den Werth in Thalern des 20-Guldenfußes, im $24^1/_2$-Guldenfuß und im 14-Thalerfuß;

Die Tabellen der Goldmünzen enthalten folgende Angaben:

1) wie viel Stück der Münze auf 1 Mark brutto gehen;
2) das Gewicht der Münze in holländischen Aß;*)
3) das Korn der Münze;
4) wie viel Stück auf 1 Mark fein gehen;
5) den Werth eines Stücks in preußischen Friedrichsd'or zu 5 Thaler in Gold und zu $5^2/_3$ Thaler in Courant.

Die Tabelle der Silbermünzen enthält z. B. folgende Angaben in Betreff des russischen Silberrubels:

Münze	Auf 1 cöln. Mk. brutto gehen	Korn		Auf 1 cöln. Mk. fein Silber gehen	Werth eines Stücks im							
					13½-Thl. od. 20-fl. Fuß	24½-fl. Fuß			14-Thlr. Fuß			
	Stück	Lth.	Gr.	Stück	Thlr.	fl.	kr.	Pf.	Th.	Sg	Pf
Rubel	11,38	13	16	12,995	1,02607	1	53	0,5	1	2	3,85

*) 1 cölnische Mark = 4864 holl. Aß.

Weil 1 preuß.-cölnische Mark = 233,855 Grammen, 1 russisches Pfund = 409,5174 Gr., und 100 Silberrubel $5^{6}/_{96}$ russische Pfund wiegen, so ergiebt sich die erste Angabe aus der Kette:

x Silberrubel = 1 pr.-cöln. Mark
1 = 233,855 Grammen,
409,5174 = 1 russisches Pfund,
$5^{6}/_{96}$ = 100 Silberrubel.

Weil das Korn des Silberrubels $\frac{83^{1}/_{3}}{96}$ ist, oder in 96 Gewichtsmengen der legirten Masse $83^{1}/_{3}$ Gewichtsmengen Silber enthalten sind, so ergiebt sich das Korn in Beziehung auf die Mischungseinheit von 1 cöln. Mark = 16 Loth = 288 Grän aus der Proportion:

$96 : 83^{1}/_{3} = 16 : x = 13^{16}/_{18}$ Loth oder
= 13 Loth 16 Grän.

Weil 100 Silberrubel gesetzlich $5^{6}/_{96}$ Pfund wiegen, und 1 Pfund (= 96 Solotnik) $83^{1}/_{3}$ Solotnik Silber enthalten, so enthalten 100 Silberrubel $421^{7}/_{8}$ Solotnik Silber; die dritte Angabe, wie viel Silberrubel 1 cölnische Mark Silber enthalten, ergiebt sich demnach aus der Kette:

x Silberrubel = 1 preuß. Mark Silber,
1 = 233,855 Grammen,
409,5174 = 1 russisches Pfund,
1 = 96 Solotnik,
$421^{7}/_{8}$ = 100 Silberrubel.

Die 4te, 5te und 6te Angabe, wie viel 1 Silberrubel in Thalern des 20-Guldenfußes, in Gulden des $24^{1}/_{2}$-Guldenfußes und im 14-Thalerfuße werth sind, ergeben sich aus folgenden Ansätzen:

x Thaler des 20 fl. Fuß = 1 Silberrubel,
100 = $5^{6}/_{96}$ russische Pfund,
1 = $83^{1}/_{3}$ Solotnik Silber,
96 = 1 Pfund,
1 = 409,5174 Grammen,
233,87*) = 1 Wiener-cöln. Mark,
1 = $13^{1}/_{3}$ Thaler.

*) Die Wiener-cölnische Mark = 233,87 Grammen; außerdem hat man auch in Oesterreich als Silbergewicht die Wiener Mark, und 5 Wiener Mark = 6 Wiener-cölnische Mark.

x fl. im 24½-fl. F. oder x Th. im 24-Th. F. = 1 Silberrubel.

100 = $5^{6}/_{96}$ ruff. Pfund.

1 = $83^{1}/_{3}$ Solotnik Silber.

96 = 1 ruff. Pfund.

1 = 409,5174 Grammen.

233,855 *) = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 24½ fl. des 24½-fl. Fußes. oder 14 Thlr. des 14-Thlr. Fußes.

Die Tabelle der Goldmünzen enthält z. B. folgende Angaben in Betreff des holländiſchen Ducaten:

Münze.	Auf 1 cöln. Mk. brutto gehen	Gewicht von 1 Stück in holl. As.	Korn.		Auf 1 cöln. Mark fein gehen	Werth eines Stücks in			
						geſetzm. Fr.d'or zu 5 Th. Gold	Friedrichsd'or zu 5⅓ Thl. cour.		
	Stück		Kar.	Gr.	Stück	Thlr. Gold	Th.	Sg.	Pf.
Ducat	66,931	72,67	23	7	68,1134	2,81593	3	6	9,1

Weil 1 holländiſcher Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegen ſoll, ſo ergiebt ſich die erſte Angabe aus der Kette:

x Ducaten = 1 preuß.-cöln. Mark.

1 = 233,855 Grammen.

3,494 = 1 holl. Ducat.

Weil das Korn des holländiſchen Ducaten geſetzmäßig $\frac{983}{1000}$ iſt, ſo ergiebt ſich das Korn in Beziehung auf die Miſchungseinheit von 1 cölniſchen Mark = 24 Karat = 288 Grän aus der Proportion:

1000 : 983 = 24 : x = $23^{7}/_{12}$ oder 23 Karat 7 Grän.

Weil 1 Ducat geſetzmäßig 3,494 Grammen wiegt, und 1000 Grammen der legirten Maſſe 983 Grammen Silber enthalten, ſo enthalten 1000 Ducaten ſo viel als aus der Kette folgt:

x Grammen Gold = 1000 Ducaten.

1 = 3,494 Grammen.

1000 = 983 = Gold.

x = 3434,602 Grammen Gold.

*) S. §. 28.

Hiernach gehen so viel Ducaten auf 1 preuß.-cölnische Mark Gold, als aus der Kette folgt:

x Ducaten = 1 preuß.-cöln. Mark Gold.
1 = 233,855 Grammen.
3434,602 = 1000 Ducaten.

Das Resultat entspricht mithin der vierten Angabe in obiger Tabelle.

Die fünfte und sechste Angabe ergiebt sich aus dem Ansatze:

x Thlr. in Gold zu 5 Thlr.
oder
x Thlr. in Gold zu $5\frac{2}{3}$ Thlr. cour. } = 1 Ducat.

1 = 3,494 Grammen.
1000 = 983 „ Gold.
233,855 = 1 preuß.-cöln. Mark.
1 = 288 Grän.
260 = 35 Ducaten.
1 = { 5 Thaler in Gold oder $5\frac{2}{3}$ Thaler courant.

Die oben angeführten Tabellen enthalten außerdem auch die den Ergebnissen von Münzuntersuchungen entsprechenden Werthe mancher Münzen.

Eine andere Münztabelle enthält die Werthe der Rechnungsmünzen aller Länder. Man versteht hierunter dasjenige Geld, in welchem Buch und Rechnung im Handel geführt wird. Theils ist die Rechnungsmünze zugleich Zahlungsmünze, wie z. B. der preußische Thaler; theils ist sie fingirtes oder eingebildetes Geld, wie z. B. der Reichsthaler Giro in Augsburg, die Mark banco in Hamburg.

Siebenter Abschnitt.

Valvation der Münzen.

43. Unter Valvation versteht man die gesetzliche Preisbestimmung fremder Geldsorten, nach welcher solche bei den Cassen der Regierung, der Gemeinden und Stiftungen angenommen werden. Hierbei erfordert die Münzpolitik, die fremde Münze

als Tiegelgut zu betrachten, und mithin die Kosten, welche aufzuwenden sind, wenn solche Münzen in inländisches Geld umgeprägt werden sollen, in Abzug zu bringen. Sodann ist auch das Remedium zu berücksichtigen. Nun gibt es überhaupt neun Münzzustände; eine Münze kann nämlich

$$\text{im Korn} \left\{ \begin{matrix} \text{zu gut oder} \\ \text{richtig oder} \\ \text{schlecht} \end{matrix} \right\} \text{und im Schrot} \left\{ \begin{matrix} \text{zu gut oder} \\ \text{richtig oder} \\ \text{schlecht} \end{matrix} \right.$$

seyn; mehrentheils trifft es sich aber, daß die Münzen sowohl im Feingehalt als im Schrot zu leicht sind. Geht man nun von diesem Münzzustande bei der Valvirung aus, so hat man die entsprechenden Zahlenverhältnisse in Rechnung zu bringen.

Für die französischen Einfrankenstücke z. B. beträgt das Remedium im Korn 3 Tausendtheile, und im Schrot 5 Tausendtheile. Es sollen 200 Frankenstücke 1000 Grammen wiegen, und das Korn soll $^{900}/_{1000}$ seyn; nimmt man nun die beiden Remedien in Minus an, so hat man 995 Grammen für 1000 Grammen, und $^{897}/_{1000}$ für $^{900}/_{1000}$ zu substituiren. In 995 Grammen der legirten Masse ist mithin so viel Silber enthalten als aus der Proportion folgt:

$$1000 : 897 = 995 : x = 892{,}515$$

Ohne Remedium sollen aber 900 Grammen Silber in 200 Franken enthalten seyn; mithin reduciren sich 100 Grammen, welche gesetzlich in der entsprechenden Anzahl von Frankenstücken enthalten seyn sollten, durch die Annahme des Remediums in Minus auf so viel Grammen Silber als aus der Proportion folgt:

$$900 : 892{,}515 = 100 : x = 99{,}16$$

Ist also der Werth des französischen Frankenstücks in irgend einer andern Geldeinheit ohne Remedium = W, so beträgt derselbe mit Berücksichtigung obigen Remediums nur

$$\frac{99{,}16}{100} \cdot W = \frac{2479}{2500} \cdot W.$$

Devalvation. Die Devalvation ist diejenige Valvation, wodurch ein Staat Münzen ihrem Zahlwerthe nach herabgesetzt, oder ganz verruft.

Zweite Abtheilung.

Gold und Silber in Barren.

Goldbarren. Silberbarren. Güldische Barren.

44. Im großen Handelsverkehr wird auch Gold und Silber ungemünzt, in Stangen oder Barren gegossen, als Geld gebraucht. Die Gold- und Silber-Barren haben einen Zusatz an Kupfer, und außerdem gibt es auch güldische Barren, welche aus Silber, Gold und Kupfer bestehen, und durch Zusammenschmelzen von silbernen Gefäßen ꝛc., welche vergoldet waren, herrühren. Der Gehalt der Barren an Gold und Silber, so wie das Gewicht derselben muß amtlich bestimmt und beglaubigt seyn; der darüber ausgefertigte Schein heißt Probezettel, und die Barren werden mit dem Namen des im Probezettel unterschriebenen Münzbeamten und einer Nummer gestempelt, auf welche im Probezettel Bezug genommen wird.

Das Korn der Gold- und Silber-Barren wird auf unterschiedliche Art ausgedrückt. In Deutschland ist die Mischungseinheit die cölnische Mark, welche für alles Silber in 16 Lothe zu 18 Grän, und für das Gold in 24 Karate zu 12 Grän eingetheilt wird, aber nicht überall von gleicher Schwere ist *). So viel Lothe reines Silber in einer Mark der legirten Masse enthalten ist, so viel löthig heißt die Masse, und so viel Karate reines Gold in einer Mark der legirten Masse enthalten ist, so viel karatig heißt die Masse. In Frankreich, Belgien und den Niederlanden ist die Mischungseinheit das Kilogramm, und das Korn wird nach Tausendstel bestimmt; z. B. $^{900}/_{1000}$, welches das Korn der Silbermünze in den genannten Ländern ist. In Rußland ist die Mischungseinheit das Pfund zu 96 Solotnik, zu 96 Doli, und „88 fein" bedeutet z. B. daß in einem Pfund oder in 96 Solotnik der legirten Masse 88 Solotnik Silber enthalten sind, u. s. w.

Bei dem Verkaufe der Barren hat man vorerst den Gehalt an Gold und Silber zu berechnen, weil sich die Preise auf die Gewichtseinheit reinen Goldes und Silbers beziehen. Es gibt

*) S. Nelkenbrechers Taschenbuch der Maaß-, Gewichts- und Münzkunde (16te Auflage, Berlin 1842) und J. Jäckel's neueste europäische Münz-, Maaß- und Gewichtskunde (Wien 1828).

indessen auch Preisnotirungen für die Gewichtseinheit legirter Masse (oder für die rauhe Mark), die sich zwar überhaupt zu den Preisen des reinen Goldes und Silbers wie die Grade der Feinheit verhalten, aber wegen höherer Scheidungskosten etwas niedriger als reines Gold und Silber stehen. So stand z. B. in Frankfurt a. M. am 22 April 1843 hochhaltiges Silber 24 fl. 20 kr., geringhaltiges und mittelhaltiges 24 fl. 15 kr.

Nach der Gewichtseinheit wird auch in der Regel der Preis bestimmt, also in Deutschland nach der cölnischen Mark, in Frankreich nach dem Kilogramm u. s. w.

Berechnung des Gehalts der Barren an Gold u. Silber.

Die Berechnung geschieht entweder vermittelst der Kette oder durch Zerlegung. Wiegt z. B. eine Masse Silber 28 Mark 12½ Loth, und ist das Korn 9 Loth 7¾ Grän, so ergibt sich der Gehalt an Silber durch Zerlegung auf folgende Art:

28 Mark 12½ Loth
9 Loth 7¾ Grän.

8 Loth	14 Mark	6 Loth	4½	Grän	
1 „ (= 18 Grän)	1 „	12 „	$14^{1}/_{16}$	„	
6 Grän	— „	9 „	$10^{11}/_{16}$	„	
1½ „	— „	2 „	$7^{11}/_{64}$	„	
¼ „	— „	— „	$7^{25}/_{128}$	„	
Gehalt:	16 Mark	15 Loth	$7^{79}/_{128}$	Grän.	

Erklärung. Beständen die Barren aus 8 löthigem Silber, so würden sie halb aus Silber und halb aus Kupfer bestehen; zerlegt man also die Zahl der Lothe (9) in 8 und 1, so entspricht dem Theil 8 eine Masse Silbers, welche halb so viel wie die Barren, also 14 Mark, 6 Loth, 4½ Grän wiegt; für 1 Loth beträgt die Masse 8 mal weniger, d. i. 1 Mark 12 Loth, $14^{1}/_{16}$ Grän. Die Zahl der Grän (7¾) läßt sich in 6, 1½ und ¼ zerlegen; 6 Grän ist der dritte Theil von 1 Loth; daher ist das entsprechende Produkt auch der dritte Theil vom vorhergehenden Produkte (1 Mark, 12 Loth, $14^{1}/_{16}$ Grän) d. i. 9 Loth, $10^{11}/_{16}$ Grän. Ferner ist 1½ der vierte Theil von 6; mithin ist das entsprechende Produkt der vierte Theil vom Vorhergehenden (9 Loth $10^{11}/_{16}$ Grän) d. i. 2 Loth $7^{11}/_{64}$ Grän. Sodann ist ¼ der sechste Theil von 1½; mithin ist das entsprechende Produkt der sechste Theil vom Vorhergehenden (2 Loth $7^{11}/_{64}$ Grän) d. i. $7^{25}/_{128}$ Grän. Die Summe der

partiellen Produkte, 16 Mark, 15 Loth, $7^{79}/_{128}$ Grän, ist das gesuchte Resultat.

Berechnung des Werths der Barren nach den Gold- und Silberpreisen.

Ist der Preis der Mark Silber obigen Feingehalts $13^1/_3$ Thaler (den Thaler zu 30 Silbergroschen zu 12 Pfennigen gerechnet) und soll hieraus der Werth obigen Silbers durch Zerlegung bestimmt werden, so ist die Berechnung wie folgt:

16 Mark 15 Loth $7^{79}/_{128}$ Grän
$13^1/_3$ Thaler

		208	Thlr.	—	Sgr.	—	Pf.
$^1/_3$ Thlr.		5	„	10	„	—	„
8 Loth		6	„	20	„	—	„
4	„	3	„	10	„	—	„
2	„	1	„	20	„	—	„
1	„	—	„	25	„	—	„
6	Grän	—	„	8	„	4	„
1	„	—	„	1	„	$4^2/_3$	„
$^{64}/_{128}$	„	—	„	—	„	$8^1/_3$	„
$^8/_{128}$	„	—	„	—	„	$1^1/_{24}$	„
$^4/_{128}$	„	—	„	—	„	$^{25}/_{48}$	„
$^2/_{128}$	„	—	„	—	„	$^{25}/_{96}$	„
$^1/_{128}$	„	—	„	—	„	$^{25}/_{192}$	„
		226	Thlr.	5	Sgr.	$6^{183}/_{196}$	Pf.

Erklärung. Enthielten die Barren nur 16 Mark Silber und wäre der Preis der Mark 13 Thaler, so würde der entsprechende Werth 13 mal 16, d. i. 208 Thaler seyn; da aber der Preis um $^1/_3$ Thaler höher ist, so ist der entsprechende Mehrbetrag $^1/_3$ mal 16, d. i. 5 Thlr. 10 Sgr. Für eine halbe Mark oder 8 Loth mehr ist, der Mehrbetrag die Hälfte von $13^1/_3$ Thlr., d. i. 6 Thlr. 20 Sgr. Für 4 Loth, als Hälfte von 8 Loth, ist der Mehrbetrag halb so groß als der vorhergehende, d. i. 3 Thlr. 10 Sgr.; für 2 Loth, als die Hälfte von 4 Loth, ist der Mehrbetrag halb so groß als der vorhergehende, d. i. 1 Thlr. 20 Sgr. und für 1 Loth beträgt derselbe 25 Sgr.

Endlich wird

für 6 Grän der 3te Theil von 25 Sgr.
„ 1 „ „ 6te „ „ 8 „
„ $^{64}/_{128}$ „ die Hälfte von 1 Sgr. $4^2/_3$ Pf.
„ $^8/_{128}$ „ der 8te Theil von — „ $8^1/_3$ „
u. s. w.

} genommen.

In der Praxis wäre im obigen Falle die Rechnung nur bis $^{64}/_{128}$ zu führen, weil ein Pfennig und die Theile desselben vernachläßigt werden können.

Berechnung der güldischen Barren.

Bei der Berechnung der güldischen Barren betrachtet man, in Beziehung auf den Gehalt an Silber, das Gold und Kupfer als Zusatz, und in Beziehung auf den Gehalt an Gold, das Silber und Kupfer als Zusatz Berechnet man, zur Probe, auch den Gehalt an Kupfer, so betrachtet man das Silber und Gold als Zusatz, wonach die Summe der Gewichtsmengen des Silbers, Goldes und Kupfers mit dem Gewicht der Barren übereinstimmen muß. Z. B. mehrere güldische Barren wiegen zusammen 64 Mark; das Korn ist 14 Loth Silber und 1 Karat Gold; wonach in 1 rauhen cölnischen Mark enthalten sind 14 Loth Silber, 1 Karat Gold und 16 Loth — (14 Loth und 1 Karat) Kupfer, oder, weil 16 Loth = 24 Karat, 16 Loth — $14^2/_3$ Loth = $1^1/_3$ Loth Kupfer. Der Gehalt an Silber, Gold und Kupfer ergibt sich daher aus den Ansätzen:

x Mk. Slb. = 64 Mk.	x M. Gold = 64 Mk.	x M. Kpf. = 64 Mk.
1 = 14 Loth	1 = $^3/_4$ Lth.	1 = $1^1/_3$ Lth.
16 = 1 Mk.	16 = 1 Mk.	16 = 1 Mk.
x = 56 Mk. Silber	$x = 2^2/_3$ Mk. Gold	$x = 5^1/_3$ Mk. Kupf.

Die Summe der Gewichtsmengen 56 Mk., $2^2/_3$ Mk. und $5^1/_3$ Mk. ist = 64 Mk., in Uebereinstimmung mit dem Gewicht der Barren.

Legirrechnung.

45. Beim Zusammenschmelzen von Gold- und Silber-Barren von verschiedenen Feinheitsgraden zur Hervorbringung einer Legirung von einem bestimmten Gehalt an Gold oder Silber, hat man entweder zu berechnen, wie viel Kupfer mit legirtem Silber oder Gold, oder wie viel *a* löthiges Silber (oder *a* karatiges Gold) mit einer Gewichtsmenge *m* von *b* löthigem Silber (oder *b* karatigem Golde) zur Hervorbringung von *c* löthigem Silber (oder *c* karatigem Golde); oder aber, in welchem Verhältniß *a* löthiges Silber (oder *a* karatiges Gold) mit *b* löthigem Silber (oder *b* karatigem Golde) zur Hervorbringung einer Gewichtsmenge *m* von *c* löthigem Silber (oder *c* karatigem Golde) zusammengeschmolzen werden müsse.

In Beziehung auf den ersten Fall soll z. B. eine Anzahl 22 karatiger Goldbarren oder Goldmünzen (russische Ducaten,

ostindische Rupien, brasilianische Doblas, englische Guineen ꝛc.) welche 130 Mark wiegen, mit so viel Kupfer legirt werden, daß die Mark 21 Karat 8 Grän Gold (wie dieß z. B. bei dem sächsischen Augustsd'or der Fall ist), enthalte.

In 130 Mark 22 karatigem Golde sind enthalten 2860 Karat Gold und 260 Karat Kupfer; bezeichnet man den gesuchten Zusatz an Kupfer durch x, so muß sich verhalten:

$$2860 : 260 + x = 21\frac{2}{3} : 2\frac{1}{3}$$

$$\text{daher } 5633\frac{1}{3} + 21\frac{2}{3}x = 6673\frac{1}{3}$$

$$\text{woraus } x = 48 \text{ Karat} = 2 \text{ cöln. Mark.}$$

In Beziehung auf den zweiten Fall soll $14\frac{2}{9}$ löthiges Silber mit 50 Mark $9\frac{1}{2}$ löthigem Silber in dem Verhältniß legirt werden, daß die Masse 12 löthig sey.

In 50 Mark $9\frac{1}{2}$ löthigem Silber sind enthalten 475 Loth Silber und 325 Loth Kupfer; in der Mark $14\frac{2}{9}$ löthigem Silber sind enthalten $14\frac{2}{9}$ Loth Silber und $1\frac{7}{9}$ Loth Kupfer; soll nun x Mark von $14\frac{2}{9}$ löthigem Silber zugesetzt werden, so muß sich verhalten:

$$475 + 14\tfrac{2}{9}x = 325 + 1\tfrac{7}{9}x = 12 : 4$$

daher die Gleichung $475 + 14\frac{2}{9}x = 3\,(325 + 1\frac{7}{9}x)$

woraus $x = 56\frac{1}{4}$ Mark.

In Beziehung auf den dritten Fall sollen aus 14 löthigem und 8 löthigem Silber 30 Mark 12 löthiges Silber legirt werden.

In der Mark 14 löthigem Silber sind enthalten 14 Loth Silber und 2 Loth Kupfer; in der Mark 8 löthigem Silber sind enthalten 8 Loth Silber und 8 Loth Kupfer; wird nun x Mark vom 14 löthigen Silber und y Mark vom 8 löthigen Silber genommen, so ist die Zusammensetzung wie folgt:

$14x$ Loth Silber und $2x$ Loth Kupfer

$8y$ „ „ „ $8y$ „ „

Es soll sich aber verhalten

$$14x + 8y : 2x + 8y = 12 : 4$$

$$\text{daher } 14x + 8y = 3\,(2x + 8y)$$

Hieraus und aus der Gleichung $x + y = 30$ ergibt sich $x = 20$ und $y = 10$.

Hat man mehrere Silber- oder Goldbarren, aus welchen eine Masse von einem bestimmten Korn zusammengeschmolzen werden soll, so hat man zuvörderst das Durchschnitts-Legirungs-

verhältniß der zu legirenden Barren zu berechnen. Es sollen z. B. folgende Silberbarren zur Legirung von 12-löthigem Silber verwendet werden.

Nro.	— bis	— wiegend	54	Mk.	9½	L.	zu 10	L.	15¼	Gr.	fein.
"	— „	— „	38	„	13¾	„	„ 8	„	16	„	„
„	— „	— „	18	„	15½	„	„ 12	„	10½	„	„
„	— „	— „	44	„	11½	„	„ 13	„	6½	„	„
„	— „	— „	69	„	12	„	„ 13	„	16½	„	„
„	— „	— „	77	„	13	„	„ 15	„	8	„	„
		Zusammen	304	Mk.	11¼	L.					

Nr.	— bis	— enthalten	Silber	37	Mk.	—	L.	3½	Gr.	
„	— „	— „	„	21	„	9	„	7½	„	
„	— „	— „	„	14	„	14	„	$12^3/_8$	„	
„	— „	— „	„	37	„	5	„	$8^7/_8$	„	
„	— „	— „	„	60	„	10	„	$12^3/_8$	„	
„	— „	— „	„	75	„	1	„	$13^7/_8$	„	
		Zusammen	246	Mk.	10	L.	4½	Gr.		

Wenn 12 Loth Silber auf eine rauhe Mark gehen, so gehen 246 Mk. 10 L. 4½ Gr. auf 328 Mk. 13 L. 12 Gr. der legirten Masse; da aber nur 304 Mk. 11¼ L. oder 304 Mk. 11 L. 4½ Gr. legirte Masse vorhanden ist, so ist der Unterschied, nämlich 24 Mk. 2 L. 7½ Gr. der gesuchte Zusatz an Kupfer; denn legirt man obige Silberbarren mit 24 Mk. 2 L. 7½ Gr. Kupfer, so ist die Masse 12-löthig.

II. Von den Wechseloperationen.

46. Gegenseitige Forderungen zwischen zwei Orten können in der Weise ausgetauscht werden, daß die Geldübersendung oder Baarsendung ganz oder theilweise umgangen wird, so z. B. wenn ein Schuldner (A) des einen Orts seinen an einem andern Ort wohnenden Gläubiger (B) anweist, sich den Betrag seiner Forderung von einem Dritten (C), welcher ein Schuldner des Ersten (A) ist, auszahlen zu lassen.

Anderer Fall.

A	hat zu fordern	an	C	in einem andern Ort.
B	hat zu zahlen		D	

Sind die gegenseitigen Forderungen von gleichem Belaufe, so kann die Baarsendung gleichfalls umgangen werden, wenn der B dem A so viel zahlt, als er dem D schuldig ist, und wenn der C dem D eben so viel, nämlich so viel als er dem A schuldig ist, bezahlt.

Wechsel. Anweisungen.

Geht der Austausch der Forderungen und Schulden von Seiten des A aus, so giebt er dem B für den ihm gezahlten Betrag eine zu dessen Gunsten lautende, an den C gerichtete, schriftliche Aufforderung zur Zahlung; der B übermacht solche sofort seinem Gläubiger D, welcher sie dem C vorzeigt. Diese schriftliche Zahlungsaufforderung ist entweder eine Anweisung oder ein Wechsel, und im letztern Falle bekanntlich durch besondere rechtliche Folgen ausgezeichnet.

Die Zeit, zu welcher der schriftlichen Zahlungsaufforderung (entweder Anweisung oder Wechsel) Genüge geleistet werden soll, wird gewöhnlich von dem Tage der Ausfertigung oder Ausstellung an gerechnet, und bei der Abtretung der Forderung und der desfallsigen Uebergabe der schriftlichen Zahlungsaufforderung wird das später zahlbare Capital zu seinem gegenwärtigen, nach übereingekommenem Zinsfuße oder Discont berechneten Werthe angeschlagen. Z. B. ein in Paris auf Lyon 1 Monat dato ausgestellter Wechsel von 100 Franken ist, wenn der Discont zu 4 Procent angenommen wird, am Tage der Ausstellung nur $99^{2}/_{3}$ werth; für 2 Monate dato nur $99^{1}/_{3}$, für 3 Monate dato nur 99 u. s. w.

Hat endlich der Ort der Ausstellung anderes Geld als der Ort, auf welchen die Anweisung oder der Wechsel zahlbar lautet, so z. B. wenn in Berlin ein Wechsel auf Paris in Franken ausgestellt wird, so tritt hierzu noch die Verwandlung irgend einer als Einheit angenommenen Anzahl von Franken in preußische Thaler; und da endlich Derjenige, welcher Wechsel abzugeben hat, den Umstand benützt, daß solche mehr oder weniger gesucht sind, so gestaltet sich obiger Austausch von Schulden und Forderungen als Handelsgeschäft, und der Wechsel als Waare, dessen Preis jedoch seine Grenzen hat, weil derselbe nicht mehr betragen darf, als die Baarsendung der dem Preise entsprechenden Einheit, mit Hinzuziehung der Fracht- und Assecurranzkosten zu stehen kommt, vorausgesetzt, daß nicht durch Verbote, Kriege ꝛc. die Baarsendung erschwert wird.

Aber nicht Privaten allein, sondern auch Staatsbehörden können veranlaßt werden, sich der Wechsel zum Behufe von Zahlungen (z. B. Subsidienzahlungen, Zahlungen an auswärtige Gesandte, Deckung von Administrationskosten ꝛc.) zu bedienen, so wie dann auch die Staatsbehörden häufig durch Wechsel bezahlt werden, z. B. für verkaufte Bergwerksproducte, wenn der Bergbau auf Kosten des Staats betrieben wird ꝛc.

47. Auch für mehr als zwei Oerter kann eine und dieselbe schriftliche Zahlungsaufforderung zur Befriedigung von Gläubigern benützt werden. Z. B. A in Straßburg ist Gläubiger des B in Paris, C in Straßburg ist Schuldner des D in Lyon, dieser ist schuldig an E in Bordeaux, und dieser ist schuldig an F in Paris. Hier kann der A einen Wechsel auf den B ausstellen (*trassiren*) und dem C verkaufen; dieser übermacht (*remittirt*) denselben dem D, dieser dem E, und dieser dem F, wonach nur *ein* Verkauf stattgefunden hat.

Wenn hingegen D in Lyon im Augenblick keine Rimessen zu machen hat, so verkauft er den Wechsel, und zwar an Jemanden, der entweder direct nach Paris oder nach einem andern Ort, z. B. Bordeaux, Rimessen zu machen hat. Haben die übrigen, im obigen Beispiel aufgeführten Personen Rimessen zu machen, so ist im vorliegenden Falle ein und derselbe Wechsel zweimal veräußert worden ꝛc.

Hierbei haben wir noch Diejenigen, welche sich mit dem Einkaufe und Verkaufe von Wechseln zum Abtragen von Schulden oder zum Eintreiben von Ausständen befassen, von Denjenigen zu unterscheiden, welche blos des Erwerbs wegen Wechselgeschäfte betreiben und *Banquiers* genannt werden. Die Kaufleute bedienen sich derselben besonders in der Weise, daß sie Wechsel auf sie ausstellen, entweder um solchen an Gläubiger zu übermachen, oder um sich durch den Verkauf derselben Geld zu verschaffen.

Der denselben vom Banquier deshalb eröffnete Credit ist indessen in der Regel beschränkt, d. h. auf einen gewissen Betrag festgesetzt, über welchen hinaus keine weitern Ziehungen (Ausstellen von Wechseln) gemacht werden dürfen, wonach Derjenige, welcher sich eines solchen Credits bedient, dem Banquier von Zeit zu Zeit Anschaffungen (durch Wechsel, Baarsendungen ꝛc.) zu machen hat, damit er im Credit bleibe. Für die Vor-

schüsse und Anschaffungen werden zu einem vom Banquier ausbedungenen Zinsfuße von Zeit zu Zeit (gewöhnlich halbjährlich) die Zinsen berechnet, und außerdem erhält der Banquier für den Gesammtbetrag der im Verlaufe der Zwischenzeit von ihm besorgten Wechselgeschäfte eine procentweise bestimmte Vergütung, Provision (gewöhnlich zu $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Procent), und außerdem Vergütung von Auslagen, wie Briefporto, Courtage ꝛc. Wenn, in Beziehung auf letztere, der Banquier sich selbst wieder eines Zwischenhändlers, eines Maklers oder Sensals beim Einkaufe und Verkaufe von Wechseln für fremde Rechnung bedient, so muß ihm der Betrag, welchen er demselben für seine Bemühung zu zahlen hat, die Courtage, von Seiten Desjenigen vergütet werden, für dessen Rechnung der Einkauf oder Verkauf stattgefunden. Die Courtage beträgt gewöhnlich $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ Procent.

Auch Regierungen bedienen sich des Banquiers zu unterschiedlichen Zwecken (z. B. zur Einkassirung von Wechseln, zu Zahlungen an auswärtige Gesandte ꝛc.).

48. Wenn der Ort, in welchem der Wechsel ausgestellt worden, und der Ort auf welchen der Wechsel ausgestellt worden ist, gleiches Geld haben, so ist die Einheit auf die sich der Wechselpreis oder Wechselcurs bezieht, gewöhnlich 100 in der betreffenden Geldeinheit. Entgegengesetzten Falls ist die Einheit hier und da eine andere Zahl. Z. B. in Amsterdam ist die Einheit für Londner Wechsel, d. h. Wechsel, welche auf London ausgestellt sind (denn die Wechsel werden nach dem Ort genannt, auf welchem sie zahlbar lauten, und nicht nach dem Ort, in welchem sie ausgestellt worden sind) 1 Livre Sterling, und der Wechselcurs ist bald größer, bald kleiner als ungefähr 12 holländische Gulden; in Leipzig ist die Wechseleinheit auf Hamburg 300 Mark banco und der Wechselcurs ist bald größer, bald kleiner als ungefähr 150 Thaler; in Frankfurt a. M. ist die Wechseleinheit auf Amsterdam 100 holländische Gulden und der Wechselcurs ist bald größer, bald kleiner als ungefähr 98 fl. im 24-fl. Fuße ꝛc. Die Wechseleinheit heißt auch feste Valuta und der Wechselcurs veränderliche Valuta. Es giebt auch Handelsplätze, welche die feste Valuta für die veränderliche Valuta geben, so z. B. London, woselbst man 1 Liv.

Wechselcurs. Feste Valuta. Veränderliche Valuta.

Sterling für bald mehr, bald weniger als 25 Franken in Pariser Papiere giebt. Bei einem solchen Cursſyſtem entſpricht eine größere Curszahl einem niedrigern Curſe, und eine kleinere Curszahl entſpricht einem größern Curſe. Wenn man z. B. in London ſo viel mal 1 Liv. Sterling zahlt, als 24 Franken in einem Pariſer Wechſel verſchrieben ſind, ſo zahlt man 200 Liv. Sterling für einen Pariſer Wechſel von 4800 Franken; fällt aber der Curs, d. h. ſteigt die veränderliche Zahl von 24 auf 25, ſo hat man nur 192 Liv. Sterling für einen Pariſer Wechſel von 4800 Franken zu zahlen.

Wechſelcurszettel. 49. In bedeutendern Handelsplätzen werden die Wechſelcurſe täglich von den Senſalen oder durch die Börſe in gedruckten Liſten, Wechſelcurszettel genannt, bekannt gemacht. Der Wechſelcurszettel enthält in der erſten Columne die Namen derjenigen Wechſelplätze, auf welche der betreffende Ort Wechſelgeſchäfte fortwährend unterhält. In einer zweiten Columne befindet ſich die Angabe der gewöhnlichen Wechſelfriſt, (§ 46.) z. B. kurz oder kurze Sicht, (d. i. auf 8 bis 14 Tage nach dem Datum des Wechſels), gewöhnlich durch K. S. bezeichnet; ferner 1 Monat dato, 2 Monat dato ꝛc. durch 1 M., 2 M. ꝛc. bezeichnet. Die Curſe ſtehen in der einen oder andern zweier Columnen, wovon die eine mit der Ueberſchrift „Papier“ oder „Briefe“, und die andere mit der Ueberſchrift „Geld“ verſehen iſt. Die erſte Ueberſchrift zeigt an, daß Wechſel zu den bemerkten Curſen zu kaufen waren; die zweite Ueberſchrift zeigt an, daß Geld zu den bemerkten Curſen für Wechſel angeboten wurden, und die Curſe ſind ſo zu verſtehen, wie ſolche zu Ende der Börſe, alſo in Folge des letzten Aus- und Angebots geblieben ſind. In manchen Curszetteln ſtehen nur die Anfangsbuchſtaben der zur Rubricirung gebräuchlichen Wörter, z. B. ſtatt „Briefe“ : B, ſtatt „Papier“ : P, ſtatt „lettres“ : L, oder, wenn dafür das Wort offert im Gebrauche iſt, O; ſtatt „Geld“ : G, ſtatt „argent“ : A, oder D für demandé ꝛc. Die Curszettel enthalten gewöhnlich nur den Curs, ohne Beiſetzung des Namens der Geldſorte, weil die feſte Valuta und der Zahlwerth als bekannt vorausgeſetzt werden. In dem früher ſchon erwähnten Nelkenbrecher'ſchen Taſchenbuche und in ähnlichen Hülfsbüchern findet man die Erklärung der Curszettel aller Handelsplätze.

50. Wenn der Wechselcurs dem Werthe der Wechseleinheit in Betreff des Gehalts an reinem Silber oder Golde gleich ist, so steht der Curs *pari*; ist der Curs höher als dieser Werth, so steht er *über* Pari; ist er niedriger, so steht er *unter* Pari, und unter *Wechselpari* versteht man die Summe Geldes, welche pari mit der Wechseleinheit ist. Wechselpari.

In Paris z. B. ist die Einheit auf Amsterdam 100 holländische Gulden, und der Curs wird in Franken notirt. Weil 1 holländischer Gulden 10,76616 Grammen wiegt, und das Korn desselben $^{893}/_{1000}$ ist, und in 1 Franken $4^1/_2$ Grammen Silber enthalten sind, so ergiebt sich das Wechselpari aus der Kette:

$$\begin{aligned} x \text{ Franken} &= 100 \text{ fl. holländ.} \\ 1 &= 10{,}76616 \text{ Grammen} \\ 1000 &= 893 \text{ Grammen Silber} \\ 4\tfrac{1}{2} &= 1 \text{ Franken} \end{aligned}$$

$$x = 213{,}64 \text{ Franken.}$$

51. Steht der Ort Desjenigen, welcher nach einem andern Ort vermittelst Wechsel entweder Zahlungen machen, oder daselbst Gelder einziehen will, nicht im Wechselverkehr mit diesem Ort, so kann nicht direct, sondern nur vermittelst eines dritten Platzes, welcher mit beiden Orten im Wechselverkehr steht, und deshalb *Zwischenplatz* genannt wird, operirt werden. Es leuchtet aber von selbst ein, daß, unter übrigens gleichen Umständen, nicht für jeden Zwischenplatz, wenn man unter mehreren wählen kann, die Anschaffungen gleichviel kosten, und die Ziehungen gleichviel einbringen; weßhalb untersucht werden kann, welcher Zwischenplatz die günstigsten Resultate darbietet. Weil aber auch der Fall eintreten kann, daß die Operation über einen Zwischenplatz günstiger als die directe ist, wenn anders direct operirt werden kann, so geschieht obige Untersuchung in Mitbetracht des directen Operirens in der Weise, daß zugleich daraus hervorgeht, ob direct oder indirect operirt werden müsse. Die Berechnung, welche deshalb angestellt wird, heißt *Arbitrage*, und insbesondere Wechselarbitrage, zur Unterscheidung von der Geldarbitrage und andern Arbitragen. Wechselarbitrage.

Nehmen wir z. B. an, ein Pariser habe eine Zahlung nach Amsterdam zu machen. Steht in Paris der Curs auf Amster-

dam auf 209, so muß der Pariser beim Einkaufe von Amsterdamer Wechseln so oft 209 Franken zahlen, als er 100 holländische Gulden (feste Valuta) nach Amsterdam remittiren will. Nun stehe aber der Curs von Paris auf London auf 25 Fr. für 1 Liv. Sterling, und, laut dem mit letzter Post erhaltenen Londner Curszettel stehe der Curs von London auf Amsterdam auf 12 holländische Gulden für 1 Liv. Sterling, und es soll untersucht werden, ob der Pariser direct oder über London nach Amsterdam remittiren müsse. Hier muß berechnet werden, auf wie viel Franken dem Pariser die Abtragung einer Schuld von 100 holländischen Gulden nach Amsterdam zu stehen kommt, wenn er einem Londner Hause den Auftrag ertheilt, für seine Rechnung Amsterdamer Papier einzukaufen, und ihm dagegen den Betrag seiner Auslagen in Londner Papiere übermacht.

Kauft der Londner Auftragbesorger für Rechnung des Pariser 100 holländische Gulden in Amsterdamer Papier ein, und zahlt er, vorausgesetzt, daß der Curs sich hält, für 12 fl. holl. 1 Liv. Sterl., so legt er für 100 fl. holl. so viel aus, als aus der Proportion folgt:

$$12 : 1 = 100 : x = 8\frac{1}{3} \text{ Liv. Sterl.}$$

Hiernach hat der Pariser so viel mal $8\frac{1}{3}$ Liv. Sterl. nach London zu remittiren, als der dortige Auftragbesorger 100 fl. holl. in Amsterdamer Papier eingekauft hat, und wenn er für 1 Liv. Sterl. in Londner Papier 25 Franken zahlt, so zahlt er für $8\frac{1}{3}$ Liv. Sterl. so viel Franken als aus der Proportion folgt:

$$1 : 25 = 8\frac{1}{3} : x = 208\frac{1}{3} \text{ Franken.}$$

Dieses Resultat ergiebt sich unmittelbar aus der Kette:

$$\begin{aligned} x \text{ Franken} &= 100 \text{ fl. holl.} \\ 12 &= 1 \text{ Liv. Sterl.} \\ 1 &= 25 \text{ Franken} \\ \hline x &= 208\frac{1}{3} \text{ Franken.} \end{aligned}$$

Wechselparität.

Wenn also der Pariser über London remittirt, so kommt ihm, abgesehen von allen Unkosten, die Abtragung einer Schuld von 100 fl. holl. auf $208\frac{1}{3}$ Frank. zu stehen, und wenn der Curs von Paris auf Amsterdam auf eben so viel Franken stünde, so würde, unter obiger Voraussetzung dem Pariser die Abtragung einer Schuld nach Amsterdam auf eben so viel bei directer Remesse, als bei der Remesse über London zu stehen kommen. In

dieser Beziehung bilden die Curse von Paris nach London, von London nach Amsterdam und der berechnete Curs von Paris nach Amsterdam eine Parität. Durch die Vergleichung des letztern Curses mit dem wirklichen Curse von Paris auf Amsterdam stellt es sich heraus, ob direct oder über London gewechselt werden müsse. Ist, wie wir oben angenommen haben, der Curs von Paris auf Amsterdam 109, so ist, abgesehen von allen Unkosten, die Rimesse über London wohlfeiler, als die directe. Weil aber der Auftragbesorger oder Commissionär für seine Bemühung und Nebenauslagen, nämlich Courtage und Briefporto (§ 47.) vergütet werden muß, so hat man den berechneten Curs verhältnißmäßig dafür zu vergrößern. Nehmen wir an, daß die Spesen zusammen ½ Procent betragen, so ergiebt sich die fragliche Zahl aus der Proportion:

$$100 : 100\tfrac{1}{2} = 208\tfrac{1}{3} : x = 209{,}37 \text{ Franken.}$$

In Betracht der Spesen, welche der Pariser dem Commissionär zu vergüten hätte, ist also nicht die Rimesse über London, sondern die directe Rimesse die wohlfeilere, denn über London kommt sie auf 209,37 Franken und direct nur auf 209 Frank. für 100 fl. holl. zu stehen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Pariser in Amsterdam eine Forderung habe, und sich durch Wechsel bezahlt machen wolle. Zieht er auf Amsterdam, so erhält er durch den Verkauf des Wechsels 209 Frank. für 100 fl. holl. Läßt er aber für seine Rechnung von London auf Amsterdam ziehen, und verkauft der Auftragbesorger, auf welchen gezogen worden ist, den Wechsel zu 12 fl. holl. für 1 Liv. Sterl., zieht dagegen der Pariser auf den Auftragbesorger und verkauft er den Wechsel zu 25 Frank. für 1 Liv. Sterl., so erhält er für 100 fl. holl. so viel Franken, als aus der Kette folgt:

x Frank = 100 fl. holl.
12 = 1 Liv. Sterl.
1 = 25 Frank.

$x = 208\frac{1}{3}$ Frank., wie vorher.

Nun müssen aber noch die Spesen berücksichtigt werden; nehmen wir sie wieder zu ½ Procent an, so muß der berechnete Curs in diesem Verhältniß verkleinert werden. Denn wenn der Londner Commissionär für Rechnung des Pariſers 100 Liv. Sterl. ein-

genommen hat, so behält er ½ Liv. Sterling für sich, und der Pariser kann nur 99½ Liv. Sterl. auf ihn ziehen; daher die Proportion:

$$100 : 99\tfrac{1}{2} = 208\tfrac{1}{3} : x = 207{,}29 \text{ Franken.}$$

Weil der Pariser beim directen Ziehen für 100 fl. holl. 209 Franken, und beim Wechseln über London nur 207,29 Frank. erhält, so ist der erstere Weg der vortheilhaftere.

Für jeden andern Zwischenplatz (als London, in Beziehung auf obiges Beispiel) wird die Wechselparität auf dieselbe Art berechnet, und hat man so viele Zwischenplätze in Untersuchung gezogen, als man nach Zeit und Umständen für dienlich hält, so ist, abgesehen von den Spesen und vom directen Curs, der Platz, welcher die kleinste Parität darbietet, der günstigste zum Remittiren, und der Platz, welcher die größte Parität darbietet, der günstigste zum Ziehen, wonach man das günstigste Resultat zur Vergleichung mit dem directen Curs noch gehörig zu modificiren hat.

Man kann aber auch, in Beziehung auf obige Untersuchung, auf den Zwischenplatz gezogenes Papier für den Zwischenplatz substituiren, und die Untersuchung anstellen, ob man, wenn z. B. Rimessen zu machen sind, hierzu auf den Platz des Gläubigers gezogene Wechsel oder andere Wechsel gebrauchen solle.

Auf die eine oder andere Art dieser Untersuchungen oder Arbitragen lassen sich aber alle Arbitragen zurückführen. Nach der ersten Art wird der günstigste Platz, und nach der andern Art das günstigste Papier gefunden, wie aus folgenden Beispielen deutlicher zu ersehen.

Ein Pariser hat nach Amsterdam entweder zu remittiren oder Gelder daselbst einzuziehen. Nach den mit letzter Post erhaltenen Londner, Hamburger, Berliner, Frankfurter, Wiener und Augsburger Curszetteln sind die

Curse auf Amsterdam

in London 12 fl. holl. für 1 Liv. Sterl.,
„ Hamburg 36 fl. holl. für 40 Mark banco,
„ Berlin 140 Thaler für 250 fl. holl.,
„ Frankfurt a. M. 98 fl. im 24-fl. Fuß für 200 fl. holl.,
„ Wien 145 Thaler per 250 fl. holl.,
„ Augsburg 108 Giro-Thaler für 250 fl. holl.

An dem Tage, an welchem die Arbitrage angestellt wird, sind die

Curse in Paris

auf Amsterdam 209,75 Frank. für 100 fl. holl.,
„ London 25 Frank. für 1 Liv. Sterl,
„ Hamburg 188 Frank. für 100 Mark banco,
„ Berlin 375 Cent. für 1 Thaler,
„ Frankfurt a. M. 213 Frank. für 100 fl. im 24-fl. Fuß,
„ Wien 258 Frank. für 100 fl. im 20-fl. Fuß,
„ Augsburg 257 Frank. für 100 fl. im 20-fl. Fuß.

Hier muß nun, zum Behufe der Vergleichung mit dem directen Curs 209,75 Franken für 100 fl holl. vermittelst der gegebenen Cursverhältnisse berechnet werden, auf wie viel Franken 100 fl. holl. zu stehen kommen. Die Ansätze und Resultate sind wie folgt:

London.	Hamburg.	Berlin.
x Fr. = 100 fl. holl.	x Fr. = 100 fl. holl.	x Fr. = 100 fl. holl.
12 = 1 Liv. St.	36 = 40 Mk. b.	250 = 140 Thal.
1 = 24 Frank.	100 = 188 Frank.	1 = 375 Cent.
		100 = 1 Frank.
x = 208,33 Frank.	x = 208,88 Frank.	x = 210 Frank.

Frankfurt a. M.	Wien.	Augsburg.
x Fr. = 100 fl. holl.	x Fr. = 100 fl. holl.	x Fr. = 100 fl. holl.
100 = 98 fl.	250 = 135 Thal.	250 = 108 G.-Th.
100 = 213 Frank.	1 = 1½ fl.	100 = 127 Cour.-
	100 = 258 Frank.	1 = 1½ „ fl.
		100 = 257 Frank.
x = 208,74 Frank.	x = 208,98 Frank.	x = 211,5 Frank.

Hat der Pariser nach Amsterdam zu remittiren, so ist, abgesehen von den Spesen, der Curs über London (208,33), als kleinster, der günstigste, und mit Berücksichtigung der Spesen, z. B. zu ½ Procent, beträgt derselbe so viel als aus der Proportion folgt:

$$100 : 100\tfrac{1}{2} = 208{,}33 : x = 209{,}37 \text{ Franken.}$$

Weil nun der directe Curs (209,75) größer ist, und noch um ungefähr $^1/_{10}$ bis $^1/_8$ Procent durch die zu vergütende Courtage größer wird, wenn man sich beim Einkaufe des Wechsels der Vermittlung eines Sensals bedient, so ist die Rimesse über

London vortheilhafter als die directe. Der Pariser kann also so viel Liv. Sterl. in Londner Wechseln nach London übermachen, als er zum Einkaufe von Amsterdamer Wechseln verwenden will, wonach der Londner das durch Einkassirung der ihm übermachten Wechsel empfangene Geld nach Abzug der für Provision und Nebenauslagen ihm zukommenden Vergütung, zu diesem Zweck verausgabt. Beim Eintreffen der Ordre in London kann sich indessen der Curs auf Amsterdam geändert haben, und der Pariser muß deshalb aus dem bisherigen Stande des Curses und aus allen zu seiner Kunde gelangten Handelsverhältnissen, welche auf den Wechselcurs influiren, erwägen, ob es auch wahrscheinlich sei, daß die bei der Arbitrage als günstig sich herausstellenden Curse sich bis zur Ausführung der beabsichtigten Wechseloperation auch halten werden.

Hat dagegen der Pariser Gelder in Amsterdam zu erheben, so ist, abgesehen von den Spesen, der Curs über Augsburg (211,5), als größter, der günstigste, und mit Berücksichtigung der Spesen (z. B. zu ½ Procent) beträgt derselbe so viel, als aus der Proportion folgt:

$$100 : 99\tfrac{1}{2} = 211{,}5 : x = 210{,}44 \text{ Frank.}$$

Weil nun der directe Curs kleiner ist, und noch um ungefähr $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$ Procent durch die zu vergütende Courtage kleiner wird, wenn beim Verkaufe des auf Amsterdam gezogenen Wechsels die Vermittlung eines Sensals gebraucht wird, so ist es für den Pariser vortheilhafter über Augsburg zu wechseln als direct zu ziehen.

Der Pariser kann also einem Augsburger Hause den Auftrag ertheilen, so viel fl. holl. als er in Amsterdam zu erheben hat, für seine (des Auftraggebers) Rechnung zu ziehen und gleichzeitig auf den Auftragbesorger so viel fl. ziehen, als er durch den Verkauf des auf Amsterdam gezogenen Wechsels für seine Rechnung erhalten wird.

Wechselspeculation. Hätte der Pariser gleichzeitig nach Amsterdam zu zahlen und daselbst Gelder zu erheben, und würde die Schuld durch eine Wechseloperation über London, und die Einziehung der Gelder durch eine solche über Augsburg bewerkstelligt, so würde er an jedem Hundert fl. holl. so viel gewinnen, als die Differenz der kleinsten und größten Wechselparität ausmacht. Hierauf gründet sich die Wechselspeculation.

Nehmen wir zur Vereinfachung der Berechnung an, daß die Auftragbesorger die Spesen erst später in Rechnung bringen, so ist, in Beziehung auf obige Arbitrage, eine solche Operation wie folgt.

Der Pariser läßt von London Amsterdamer Papiere kommen, z. B. im Betrage von 48000 fl. holl., remittirt dafür dem Auftragbesorger Londner Papier; läßt das von London erhaltene Amsterdamer Papier in Augsburg verkaufen, und zieht dagegen auf den Augsburger so viel, als er nach dem jetzigen Stande des Curses durch den Verkauf des Amsterdamer Papiers einnehmen wird.

Ausführung.

Einkauf des Amsterdamer Papier in London.

x Liv. Sterl. = 48000 fl. holl.
12 = 1 Liv. Sterl.

x = 4000 Liv. Sterl.

Rimesse nach London.

x Frank = 4000 Liv. Sterl.
1 = 25 Frank.

10000 Frank.

Verkauf des Amsterdamer Papiers in Augsburg.

x fl. Ct. = 48000 fl. holl.
250 = 108 Thlr. Giro.
100 = 127 „ Courant.
1 = 1½ fl. „

x = 39502 fl. Ct.

Verkauf des auf Augsburg gezogenen Papiers.

x Frank = 39502 fl. Ct.
100 = 257 Frank.

101520 Frank 14 Cent.

Nun beträgt, abgesehen von den Spesen, die Einnahme 101520 Frank 14 Cent. und die Ausgabe 100000 Frank; daher ein Gewinn von 1520 Frank 14 Cent.; was so viel Procente ausmacht, als aus der Proportion folgt:
$100000 : 1520^{14}/_{100} = 100 : x = 1,52014$, also beiläufig $1^{52}/_{100}$ Procent.

Der größte Curs der Arbitrage ist 211,50, und der kleinste 208,33; die Differenz ist mithin 3,17. Weil der kleinste Curs

die Ausgabe, und der größte Curs die Einnahme repräsentirt, so ist 3,17 der Gewinn, und derselbe beträgt so viel Procente, als aus der Proportion folgt:

$$208{,}33 : 3{,}17 = 100 : x = 1{,}52$$

in Uebereinstimmung mit obiger Berechnung.

Obige Speculationsart ist indessen nicht so praktisch, als diejenige, welche der andern Arbitrageart entspricht. Nach der ersten Arbitrageart wird, wie wir gesehen haben, nntersucht, woher man ein gegebenes Papier (z. B. Amsterdamer Papier, Londener Papier ꝛc.) am wohlfeilsten beziehen, und wohin man solches mit Vortheil verkaufen kann; nach der andern aber wird berechnet, welches Papier man von einem gegebenen Ort wohlfeil beziehen und auf dem Platze selbst (dem Wohnort des Speculanten) mit Vortheil verkaufen kann; welche Speculationsart aus dem Grunde praktischer als die vorhergehende ist, weil die Operation schneller zur Ausführung kommt, und man sich also auf den Stand der Curse mehr verlassen kann.

Nach der andern Arbitrageart wird nur mit zwei Curszetteln, nämlich mit demjenigen des gegebenen und unseres Platzes gerechnet, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen. Der erste Platz sey Hamburg, und der andere Paris.

Hamburger Curszettel.

Amsterdam 35½ fl. holl. für 40 Mark banco,
Berlin 151 Thaler für 300 Mark banco,
London 13¼ Mark banco für 1 Liv. Sterl.,
Augsburg 148⅓ fl. im 20-fl. Fuß für 200 Mark banco,
Wien 148½ fl. im 20-fl. Fuß für 200 Mark banco,
Petersburg 34 Schilling banco für 1 Silberrubel.

Pariser Curszettel.

Hamburg 187 Frank, 27 Cent. für 100 Mark banco,
Amsterdam 208½ Frank. für 100 fl. holl.,
Berlin 374 Cent. für 1 Thaler,
London 25 Frank. für 1 Liv. Sterl.,
Augsburg 255 $^{30}/_{100}$ Frank. für 100 fl. im 20-fl. Fuß,
Wien 255 Frank. für 100 fl. im 20-fl. Fuß,
Petersburg 402 Frank. für 100 Silberrubel.

Weil die Wechseleinheit von Paris auf Hamburg 100 Mark banco ist, so muß zur Vergleichung mit dem directen Curs

vermittelst der gegebenen Cursverhältnisse berechnet werden, auf wie viel Franken 100 Mark banco zu stehen kommen. Die Ansätze und Resultate sind wie folgt:

Amsterdam.	Berlin.	London.
x Fr. = 100 Mk. b.	x Fr. = 100 Mk. b.	x Fr. = 100 Mk. b.
40 = 35½ fl. holl.	300 = 151 Thlr.	13¼ = 1 Liv. St.
100 = 208½ Fr.	1 = 374 Cent.	1 = 25 Fr.
x = 185,04 Frank.	100 = 1 Fr.	x = 188,67 Frank.
	x = 188,24 Frank.	

Augsburg.	Wien.	Petersburg.
x Fr. = 100 Mk. b.	x Fr. = 100 Mk. b.	x Fr. = 100 Mk. b.
200 = 148 1/3 fl.	200 = 148½ fl.	1 = 16 Schil. b.
100 = 255 3/10 Fr.	100 = 255 Fr.	34 = 1 Silberrbl.
x = 189,34 Frank.	x = 189,33 Frank.	100 = 402 Fr.
		x = 189,11 Frank.

Hat der Pariser Zahlungen nach Hamburg zu machen, so kann er, weil der dem Amsterdamer Papier entsprechende Curs (185,04) kleiner als der directe (187,27) ist, Amsterdamer Papier in Paris kaufen, und solches seinem Gläubiger in Hamburg zum Verkaufe übermachen. Bei der direkten Rimesse käme der Abtrag einer Schuld von 100 Mark banco auf 187 Frank 27 Cent. zu stehen; auf die andere Art aber nur auf 185,04 Franken. Hier fällt außerdem die Provision weg, und es kommt nur die Courtage in Betracht, welche der Hamburger wegen des Verkaufs des ihm übermachten Amsterdamer Papiers dem Pariser anrechnet, und welche letzterer beim Einkaufe des Amsterdamer Papiers auslegt.

Hat der Pariser Gelder in Hamburg einzuziehen, so kann er, weil der dem Augsburger Papier entsprechende Curs (189,34) größer als der directe (187,27) ist, sich von Hamburg Augsburger Papier kommen lassen (also sich vom Hamburger Schuldner mit Augsburger Papier bezahlen lassen), und solches in Paris verkaufen Wollte der Pariser auf Hamburg ziehen, so würde er durch den Verkauf des Papiers für 100 Mark banco nur 187,27 Franken erhalten; auf die andere Art erhält er aber 189,34 Franken.

Will endlich der Pariser speculiren, so kann er Augsburger Papier von Hamburg kommen lassen und in Paris verkaufen,

und dagegen Amsterdamer Papier einkaufen und dem Auftragbesorger in Hamburg dasselbe remitiren.

Ausführung einer Operation.

Einkauf von 8900 fl. in Augsburger Papier.

x Mark b. = 8900 fl.
$148\frac{1}{3}$ = 200 Mark b.

x = 12000 Mark banco.

Verkauf des Augsburger Papiers in Paris.

x Frank. = 8900 fl.
100 = $255\frac{3}{10}$ Frank.

x = 22721,7 Franken.

Rimesse nach Hamburg in Amsterdamer Papier.

x fl. holl. = 12000 Mark b.
40 = $35\frac{1}{2}$ fl. holl.

x = 10650 fl. holl.

Einkauf von 10650 fl. holl. in Paris.

x Frank. = 10650 fl. holl.
100 = $208\frac{1}{2}$ Frank.

x = 22205,25 Franken.

Die Ausgabe beträgt 22205 Frank, 25 Cent., die Einnahme 22721 Frank, 7 Cent.; mithin beträgt, abgesehen von den Spesen, der Gewinn 515 Frank, 82 Cent.

52. Im obigen Beispiele haben wir angenommen, daß der Pariser nach Amsterdam in dortigem Gelde zu zahlen, oder Gelder in dortiger Valuta daselbst zu erheben habe; hätte er aber Zahlungen nach Amsterdam in seinem eignen Gelde, in Franken, zu machen, oder hätte er in französischer Valuta Gelder von Amsterdam zu beziehen, so hätte der Amsterdamer Gläubiger oder Schuldner zu untersuchen, auf welchem Wege er am vortheilhaftesten operiren könne. Hat z. B. der Pariser 20000 Franken in Amsterdam zu fordern, so darf er, wenn er auf Amsterdam Wechsel abgibt, nicht mehr und nicht weniger fl. holl. ziehen, als nach dem Tageurs erforderlich ist, um durch den Verkauf des Papiers seine 20000 Franken zu erhalten, und ohne etwaige Vereinbarung mit dem Amsterdamer Schuldner darf er keinen indirekten Weg einschlagen.

53. Die Combinationen, welche den beiden, im §. 51 aufgeführten Arbitragearten zum Grunde liegen, sind gleich-

artige, in sofern nämlich, als sie sich, in Beziehung auf die eine Arbitrageart, nur durch die Namen der Plätze, über welchen arbitrirt wird, oder, in Beziehung auf die zweite Art, des Papiers, mit welchem arbitrirt wird, unterscheiden. Die Arbitrage kann aber auch für verschiedene Voraussetzungen in Betreff der Art des Operirens angestellt werden, und man hat es alsdann mit ungleichartigen Combinationen zu thun, so z. B. wenn ein Frankfurter, welcher nach Paris zu zahlen hat, untersucht, ob er direct remittiren, oder auf sich ziehen lassen soll, oder ob er über Hamburg remittiren, oder Augsburger Papier nach Paris remittiren soll. Ist z. B. der Curs von Frankfurt auf Paris 93¼ fl. für 200 Frank., der Curs von Paris auf Frankfurt 213 Frank. für 100 fl., der Curs von Hamburg auf Paris 186½ Frank. für 100 Mark banco, der Curs von Frankfurt auf Hamburg 88 fl. für 100 Mark banco; steht das Augsburger Papier in Paris auf 255 Frank. für 100 fl. im 20-fl. Fuß, und in Frankfurt auf 120 fl. im 24-fl. Fuß für 100 fl. im 20-fl. Fuß, und setzen wir die dem Auftragbesorger zu vergütenden Spesen zu ½ Procent an, wobei wir die Courtage, welche der Frankfurter zu zahlen hat, nicht in Anschlag bringen, so ist die Arbitrage wie folgt:

Ziehung von Paris auf Frankfurt.

$$\begin{array}{r} x \text{ fl.} = 200 \text{ Frank.} \\ 213\frac{1}{2} = 100 \text{ fl.} \\ \hline x = 93{,}67 \text{ fl.} \end{array}$$

Rimesse über Hamburg.

$$\begin{array}{r} x \text{ fl.} = 200 \text{ Frank.} \\ 186\frac{1}{2} = 100 \text{ Mark b.} \\ 100 = 88 \text{ fl.} \\ 100 = 100\frac{1}{2} \text{ fl. wegen Spesen} \\ \hline x = 94{,}84 \text{ fl.} \end{array}$$

Rimesse nach Paris mit Augsburger Papier.

$$\begin{array}{r} x \text{ fl.} = 200 \text{ Frank.} \\ 255 = 100 \text{ fl. im 20-fl. Fuß} \\ 100 = 120 \text{ fl.} \\ \hline x = 94{,}11 \text{ fl.} \end{array}$$

Die berechneten Curse sind größer als der Curs des Pariser Papiers in Frankfurt, und mithin ist die directe Rimesse am vortheilhaftesten.

Die Arbitrage kann auch für Combinationen von Geld- und Wechseloperationen angestellt werden. Dergleichen Operationen wurden im Jahr 1804 im Großen ausgeführt, als Spanien Subsidien an Frankreich zu bezahlen hatte. Es wurden Piaster nach solchen Orten, wo sie einen hohen Curs hatten, übermacht, und dafür Pariser und andere Wechsel eingekauft und nach Paris remittirt, oder es wurde von dort auf jene Plätze gezogen ꝛc.

54. In obigen Arbitragen ist stillschweigend angenommen worden, daß die Curse von solchen Wechseln zu verstehen sind, welche gleiche Verfallzeiten haben; ist dieß aber nicht der Fall, so muß der laufende Discont (§. 57) dabei in Anschlag gebracht werden. Z. B. ein Frankfurter ist nach Amsterdam schuldig; kurzsichtiges Amsterdamer Papier steht in Frankfurt 99⅛ fl. für 100 fl. holl., und Frankfurter Papier 6 W. dato steht in Amsterdam 36½ fl. holl. für 30 fl. im 20-fl. Fuß; Discont in Frankfurt 3 Procent; es ist die Frage, ob der Frankfurter remittiren, oder auf sich trassiren lassen soll. Läßt er auf sich trassiren, so kommt ihm die Abtragung einer Schuld von 100 fl. holl. auf so viel fl. zu stehen, als aus dem Ansatz folgt:

$$\begin{array}{r} x \text{ fl.} = 100 \text{ fl. holl.} \\ 36\tfrac{1}{2} = 30 \text{ fl. im 20-fl. Fuß} \\ 20 = 24 \text{ fl. im 24-fl. „} \\ \hline x = 98{,}63 \text{ fl.} \end{array}$$

Weil aber der Frankfurter, wenn auf ihn zum Curs 36½ gezogen wird, erst nach 6 Wochen Zahlung zu leisten braucht, so zahlt er, wenn zu 3 Procent discontirt wird, statt 100 fl. nur $100 - \frac{3}{8} = 99\frac{5}{8}$ fl.; folglich reducirt sich der berechnete Curs auf so viel, als aus der Proportion folgt:

$$100 : 99\tfrac{5}{8} = 98{,}63 : x = 98{,}26 \text{ fl.}$$

Der Frankfurter thut also besser, wenn er von Amsterdam auf sich trassiren läßt, als wenn er nach Amsterdam remittirt, denn im letzten Falle zahlt er 99⅛ fl. und im ersten nur 98,26 fl. für 100 fl. holl.

III. Vom einfachen Zins.

55. Die Vergütung in Gelde, welche dem Gläubiger wegen des Verzichts auf den eigenen Gebrauch einer dargelie-

henen Summe Geldes zukommt, heißt Zins oder Interesse. Aus gleicher Ursache hat Derjenige eine solche Vergütung anzusprechen, welcher vertragsgemäß zu einer bestimmten Zeit von Jemanden eine Summe Geldes zu beziehen hat, und solche später als am bedungenen Termine erhält. Und aus demselben Grunde muß dagegen dem Zahler ein Zinsenabzug für die Zeit gestattet werden, um welche er früher als am bedungenen Termine zahlt.

Das Verhältniß des Betrags der Zinsen zum Betrage des Kapitals ist der Zinsfuß. Beträgt z. B. für den Zeitraum von ½ Jahre der Zins 25 fl. und ist das Kapital 1000 fl., so ist der Zinsfuß $^{25}/_{1000} = {}^{1}/_{40}$; dem Kapital 40 entspricht mithin der Zins 1, oder wenn man, dem Gebrauch zufolge, die Zahl 100 als Kapitaleinheit annimmt, so ist der Zins $= {}^{100}/_{40} = 2\frac{1}{2}$ vom 100, oder $2\frac{1}{2}$ Procent; und wenn man, dem Gebrauch zufolge, den Zeitraum von 1 Jahr als Zeiteinheit annimmt, so ist der Zinsfuß $= 2 \,.\, 2\frac{1}{2} = 5$. Zinsfuß.

In Frankreich giebt man öfters den Zinsfuß durch den Theil an, den derselbe aus 100 bildet, und bezeichnet diesen Theil durch das Wort denier. So ist z. B. au denier 25, so viel wie 4 Procent, weil 25 in der Zahl 100 4 mal enthalten ist; au denier 20 ist so viel wie 5 Procent ꝛc.

Werden die Zinsen halbjährlich oder jährlich entrichtet, so nennt man sie einfache Zinsen, zur Unterscheidung von den zusammengesetzten Zinsen oder Zinseszinsen, welche in dem Falle entstehen, wenn die halbjährlichen oder jährlichen Zinsen nicht erhoben, sondern zum Kapital geschlagen werden, so daß dem Gläubiger im nachfolgenden Halbjahre, oder Jahre außer den Zinsen des Kapitals auch diejenigen der vorigen Zinsperiode zu gut kommen.

56. Weil beim Zinswesen 4 Größen in Betracht kommen, nämlich das Kapital, die Zeit, der Zinsfuß und der Zins, so müssen 3 dieser Größen gegeben seyn, wenn die vierte bestimmt werden soll. Einfache Zinsrechnung.

Sollen z. B. die Interessen berechnet werden, und ist das Kapital $= 36500$ fl., der Zinsfuß $= 5$, die Zeit $= 200$ Tage, so ergeben sich zuvörderst die Zinsen von jedem 100 des Kapitals aus der Proportion:

$$365 : 5 = 200 : x = \frac{5 \,.\, 200}{365}$$

Der Zins vom 100 beträgt $\frac{5.200}{365}$; mithin tragen 4000 fl. so viel, als aus der Proportion folgt:

$$100 : \frac{5.200}{365} = 36500 : x = \frac{5.200.36500}{100.365}$$

Soll der Zinsfuß bestimmt werden, und ist das Kapital = 36500, der Zins = 1000, und die Zeit = 200 Tage, so ergiebt sich der Zins für die Zeiteinheit von 365 aus der Proportion:

$$200 : 1000 = 365 : x = \frac{365.1000}{200}$$

Da nun 36500 fl. in 365 Tagen $\frac{365.1000}{200}$ Zins geben, so geben 100 fl. in 365 Tagen so viel Zins, als aus der Proportion folgt:

$$36500 : \frac{365.1000}{200} = 100 : x = \frac{365.1000.100}{36500 \,.\, 200}$$

Wird das Kapital gesucht, und ist der Zins = 1000, der Zinsfuß = 5, die Zeit = 200 Tage, so ergiebt sich der Zins vom 100 für 200 Tage aus der Proportion:

$$365 : 5 = 200 : x = \frac{200.5}{365}$$

Da nun dem Kapital 100 der Zins $\frac{200.5}{365}$ entspricht, so entspricht dem Zins 1000 so viel Kapital, als aus der Proportion folgt:

$$\frac{200.5}{365} : 100 = 1000 : x = \frac{100.1000}{\frac{200.5}{365}} = \frac{365.100.1000}{200 \,.\, 5}$$

Wird die Zeit gesucht, und ist das Kapital = 36500, der Zinsfuß = 5, und der Zins = 1000, so ergiebt sich der Zins von 36500 fl. für 365 Tage aus der Proportion:

$$100 : 5 = 36500 : x = \frac{5.36500}{100}$$

Da nun der Zeit von 365 Tagen der Zins $\frac{5.36500}{100}$ entspricht, so entsprechen dem Zins 1000 so viel Tage als aus der Proportion folgt:

$$\frac{5.36500}{100} : 365 = 1000 : x = \frac{365.1000}{\frac{5 . 36500}{100}} = \frac{100.1000.365}{5.36500}$$

57. Hat ein Schuldner in Folge des mit dem Gläubiger geschlossenen Vertrags zu einer bestimmten Zeit seiner Zahlungsverbindlichkeit Genüge zu thun, und zahlt er früher, so kommt ihm, wie bereits im §. 55 bemerkt worden, eine der Zeit, um welche er früher als bedungen worden, Zahlung leistet, angemessene Zinsvergütung zu. Der Zinsfuß, zu welchem die Zinsen vergütet werden, ist entweder zum Voraus für diesen Fall im Vertrage festgesetzt, oder es wird derselbe, wenn der Vertrag hierüber schweigt, durch eine besondere Uebereinkunft bestimmt.

Nehmen wir an, es habe Jemand nach Verlauf eines Jahres 2100 fl. zu zahlen, d. h. der Gläubiger könne, dem Vertrag zufolge, die Zahlung früher nicht verlangen; zahlt nun der Schuldner schon heute, so darf er sich die Zinsen des Schuldcapitals für 1 Jahr zum bedungenen Zinsfuße, z. B. 5, abziehen. Hierbei müßte aber darauf Rücksicht genommen werden, daß der Gläubiger so viel erhalte, daß, wenn er die erhaltene Summe 1 Jahr lang verzinslich anlegt, das Capital und die fünfprocentigen Zinsen zusammen so viel betragen, als er am Tage des bedungenen Termins, d. h. nach Verlauf eines Jahres, erhalten haben würde, also im obigen Beispiele 2100 fl.

Hätte nun der Glaubiger nach Verlauf eines Jahres 105 fl. zu erhalten, so müßte er, wenn er heute bezahlt würde, 100 fl. erhalten; denn 100 fl. zu 5 Procent verzinslich angelegt, betragen nach einem Jahre an Kapital und Zins 105 fl.; so viel nämlich, als das Schuldkapital beträgt. Hieraus läßt sich nun berechnen, was der Schuldner heute zu zahlen hat, wenn das Schuldkapital 2100 fl. beträgt; und zwar aus der Proportion:

$$105 : 100 = 2100 : x = 2000.$$

Nehmen wir jetzt an, daß ein Wechselschuldner, welcher, von heute an, nach Verlauf von 73 Tagen, einen Wechsel von 2020 fl. einzulösen hat, schon heute zahlt, und daß die Zinsen zu 5 Procent vergütet werden sollen. Zuvörderst hat man zu berechnen, wie viel der Zins von 100 fl. in 73 Tagen beträgt, nach der Proportion:

$$365 : 5 = 73 : x = 1$$

Der vom Schuldner zu entrichtende Betrag ergiebt sich mithin aus der Proportion:

$$101 : 100 = 2020 : x = 2000$$

Hiernach ist der Gläubiger befriedigt, wenn er heute 2000 fl. erhält, denn wenn er sie zu 5 Procent verzinslich anlegt und nach Verlauf von 73 Tagen wieder zurücknimmt, so erhält er an Capital 2000 fl. und den Zins 20 fl., oder zusammen 2020 fl., also so viel als er erhalten hätte, wenn er am Verfalltag des Wechsels vom Schuldner bezahlt worden wäre.

Gegenwärtiger Werth eines später zahlbaren Kapitals.

Im obigen Beispiele sind 2000 fl. der zum Zinsfuß 5 berechnete sogenannte gegenwärtige Werth von 2020 fl., welche in 73 Tagen zahlbar sind, und wachsen auf 2020 fl. an, wenn man sie für den Zeitraum von 73 Tagen zum angenommenen Zinsfuße anlegt, so daß es also für den Gläubiger einerlei ist, ob er nach 73 Tagen 2020 fl. oder heute 2000 fl. erhält. Ebenso ist es nach dem ersten Beispiele für den Gläubiger einerlei, ob er heute 2000 fl. oder nach Verlauf eines Jahres 2100 fl. von seinem Schuldner erhält, und hier sind 2000 fl. der zum Zinsfuße 5 berechnete gegenwärtige Werth von 2100 fl., welche nach Verlauf eines Jahres, von heute an, fällig sind, d. h. gezahlt werden müssen.

In der kaufmännischen Praxis wird aber bei der Berechnung des gegenwärtigen Werths gewöhnlich von einem andern Gesichtspunkte ausgegangen; man berechnet nämlich nicht, wie viel, wenn früher gezahlt wird, der Gläubiger zu empfangen habe, wenn das zur Zeit des Zahlungstermins durch Verzinsung angewachsene Kapital dem Betrage seiner Forderung gleich kommen soll; sondern man berechnet, wie viel sich der Schuldner, wenn er früher zahlt, abziehen dürfe, um sich für die Interessen zu entschädigen, welche er zum angenommenen Zinsfuße aus dem Kapital hätte ziehen können, wenn er am Zahlungstermine und nicht früher gezahlt hätte. Die Berechnung besteht alsdann darin, daß man die, dem bedungenen Zinsfuße und der Zeit, um welche früher als vertraggemäß gezahlt wird, entsprechende Interessen vom Schuldcapital abzieht. Für das zweite der obigen Beispiele ist die Berechnung wie folgt. Die Zinsen von 2020 fl. für 73 Tage zu 5 Procent betragen $\frac{5 . 73 . 2020}{100 . 365} =$ 20,20; mithin wird 2020 — 20,20 = 1999,8 gezahlt. Oder,

der Zins von 100 für 73 Tage zu 5 Procent beträgt so viel, als aus der Proportion folgt:

$$365 : 5 = 73 : x = 1$$

Statt 100 wird also $100 - 1 = 99$ gezählt, und statt 2020 so viel, als aus der Proportion folgt:

$$100 : 99 = 2020 : x = 1999{,}8$$

in Uebereinstimmung mit der ersten Berechnung.

Nach dem ersten Verfahren ergiebt sich, in Beziehung auf obiges Beispiel, der gegenwärtige Werth aus der Proportion:

$$101 : 100 = 2020 : x = 2000$$

und nach dem andern Verfahren aus der Proportion:

$$100 : 99 = 2020 : x = 1999{,}8.$$

Nach dem ersten Verfahren wird *auf Hundert*, und nach dem andern *in Hundert* gerechnet.

Der Unterschied zwischen dem gegenwärtigen und künftigen Werthe des Kapitals wird *Discont* genannt; man versteht aber auch unter dieser Benennung den Zinsfuß, zu welchem der Abzug berechnet wird. Discont.

58. Für mehrere Kapitalien, welche in verschiedenen Terminen fällig sind, oder, mit andern Worten, welche nicht früher als zu gewissen, durch Vertrag bestimmten Zeiten vom Schuldner abgefordert werden können, läßt sich eine Zeit bestimmen, zu welcher die Summe der Kapitalien ohne Zinsvergütung abgetragen werden kann; dieser Zeitpunkt ist der sogenannte *mittlere Zahlungstermin* oder die *gemeinschaftliche Verfallzeit*. Mittlerer Zahlungstermin.

Es habe z. B. Jemand an eine und dieselbe Person zu zahlen:

700 fl. von heute an in 50 Tagen
800 fl. „ „ „ „ 60 „
500 fl. „ „ „ „ 70 „

und es sey die Frage zu beantworten, zu welcher Zeit der Schuldner die Summe dieser Kapitalien, nämlich 2000 fl., ohne Zinsvergütung abtragen könne.

Die Interessen der Kapitalien zu irgend einem Zinsfuße, z. B. 3, berechnet, betragen.

$$\frac{50.700.3}{36500} = 2\frac{64}{73}, \quad \frac{60.800.3}{36500} = 3\frac{69}{73}, \quad \frac{70.5000.3}{36500} = 2\frac{64}{73};$$

wenn nun der Schuldner heute zahlt, so darf er sich (weil

beim Discontiren in Hundert gerechnet wird, die Summe obiger Interessen, nämlich $9^{51}/_{73}$ fl. abziehen. Hätte der Schuldner die Summe der Kapitalien, nämlich 2000 fl., nach Verlauf eines Jahres, oder nach Verlauf von 365 Tagen zu zahlen, so dürfte er, wenn er heute zahlen wollte, die Interessen von 2000 fl. für 1 Jahr zu 3 Proc, nämlich $\frac{365 . 2000 . 3}{36500} = 60$ fl., abziehen; wenn nun dem Abzug 60 fl. eine Zeit von 365 Tagen entspricht, so beträgt die dem Abzug $9^{51}/_{73}$ entsprechende Zeit so viel, als aus der Proportion folgt:

$$60 : 365 = 9^{51}/_{73} : x = 59 \text{ Tage.}$$

Hiernach läuft es für den Schuldner auf dasselbe hinaus, die verschiedenen Kapitalien am entsprechenden Termine, oder die Summe der Kapitalien nach Verlauf von 59 Tagen abzutragen, oder es ist für ihn einerlei, ob er schuldig ist

700 fl. zahlbar in 50 Tagen
800 fl. „ „ 60 „
500 fl. „ „ 70 „

oder ob er schuldig ist

2000 fl. zahlbar in 59 Tagen;

denn in dem einen und andern Falle darf er sich gleich viel abziehen, wenn er heute zahlt. Im ersten Falle darf er sich, zum Zinsfuß 3 berechnet, $9^{51}/_{73}$ fl. abziehen, und so viel darf er sich auch im andern Falle abziehen, denn die Interessen von 2000 fl. für 59 Tage zu 3 Procent betragen ebenfalls $9^{51}/_{73}$ fl.

Der obigen Berechnung liegt ein willkührlich angenommener Zinsfuß zum Grunde, und es ist einleuchtend, daß bei der Annahme jedes andern Zinsfußes dasselbe Resultat herausgekommen wäre; da folglich die Größe des Zinsfußes keinen Einfluß auf den mittleren Zahlungstermin hat, so muß auch obiges Rechnungsverfahren auf ein solches zurückgeführt werden können, bei welcher die Einführung des Zinsfußes wegfällt. Hierzu gelangt man folgenderweise.

Bezeichnet man den Zinsfuß durch z., so betragen die Zinsen der obigen Kapitalien:

$$\frac{50 . 700 \text{ z.}}{36500}, \frac{60 . 800 \text{ z.}}{36500}, \frac{70 . 5000 \text{ z.}}{36500}; \text{ oder}$$

$$\frac{35000 \text{ z.}}{36500}, \frac{48000 \text{ z.}}{36500}, \frac{35000 \text{ z.}}{36500}; \text{ die}$$

Summe dieser Zinsen ist $= \frac{118000\,z.}{36500}$; es sind ferner die Interessen von der Summe der Kapitalien, nämlich von 2000 fl. für 1 Jahr oder 365 Tage, $= \frac{365 . 2000\,z.}{365000}$

Wenn nun dem Abzug $\frac{365 . 2000\,z.}{365000}$ die Zeit von 365 Tagen entspricht, so entsprechen dem Abzug $\frac{118000\,z.}{36500}$ so viele Tage, als aus der Proportion folgt:

$$\frac{365 . 2000\,z.}{365000} : 365 = \frac{118000\,z.}{36500} : x = \frac{118000}{2000} = 59 \text{ Tage},$$

in Uebereinstimmung mit der vorigen Berechnung.

Da der Zähler des in der Form eines Bruchs erhaltenen Resultats aus der Summe der Produkte der Kapitalien und Zeiten, und der Nenner des Bruchs aus der Summe der Kapitalien besteht, so erhält man den mittlern Zahlungstermin, wenn man die Kapitalien mit den entsprechenden Zeiten multiplicirt, die Produkte addirt, und die Summe derselben durch die Summe der Kapitalien dividirt.

Dem obigen, in der Praxis allgemein üblichen Rechnungsverfahren liegt die Berechnung in Hundert zum Grunde; es müßte hier aber, wie beim Discontiren, auf Hundert gerechnet werden. Die beiden Auflösungsmethoden, von welchen die eine auf der Berechnung in Hundert, und die andere auf der Berechnung auf Hundert beruht, sind außerdem dadurch wesentlich von einander verschieden, daß bei der ersten, wie oben bewiesen, die mittlere Verfallzeit unabhängig vom Discont ist; bei der andern aber hängt die mittlere Verfallzeit in der Weise vom Discont ab, daß sie um so später fällt, je geringer der angenomme Discont ist. Würde also auf Hundert gerechnet, so müßte ein Zinsfuß bedungen und die Rechnung, in Beziehung auf obiges Beispiel, wie folgt geführt werden.

Die gegenwärtigen Werthe von

700 fl. zahlbar in 50 Tagen
800 fl. „ „ 60 „
500 fl. „ „ 70 „

ergeben sich, wenn der Discont zu 5 Procent angenommen wird, aus folgenden Proportionen:

$$100\,\frac{250}{365} : 100 = 700 : x = 695{,}23$$

$$100\,\frac{300}{365} : 100 = 800 : x = 793{,}47$$

$$100\,\frac{350}{365} : 100 = 500 : x = 495{,}25$$

Die Summe obiger gegenwärtiger Werthe ist = 1983,95; die Summe der Kapitalien ist = 2000 fl.; der Unterschied dieser Summen ist = 16,05 fl. Wenn nun der Schuldner gleich zahlt, so hat er nur 1983,95 fl. abzutragen; die Aufgabe ist also auf die Beantwortung der Frage zurückgeführt, zu welcher Zeit 1983,95 fl. auf 2000 fl. anwachsen, oder in wie viel Zeit die Interessen von 1983,95 fl. zu 5 Procent 16,05 fl. betragen. Die gesuchte Zahl ergiebt sich aus folgender Berechnung:

100 fl. K. geben 5 fl. Z. in 365 Tagen,
1 „ „ giebt 5 „ „ „ 100.365 Tagen,
1 „ „ „ 1 „ „ „ $\frac{100.365}{5}$ „
983,95 „ „ geben 1 „ „ „ $\frac{100.365}{1983{,}955}$ „
1083,95 „ „ „ 16,05 „ „ „ $\frac{16{,}05.100.365}{1983{,}95.5} = 59{,}05$ T.

59. Bei der Berechnung der Interessen wird gewöhnlich, zur Vereinfachung, jeder Monat zu 30 und das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Bezeichnet man das Kapital durch c, die Zeit durch t und den Zinsfuß durch z, so ergiebt sich der Zins aus der Formel $\frac{ztc}{36000}$. Für jeden Zinsfuß, welcher ohne Rest in 36000 theilbar ist, kann obige Formel durch die Division desselben in den Zähler und Nenner vereinfacht werden; z. B. dem Zinsfuß 4 entspricht das Resultat $\frac{ct}{9000}$; dem Zinsfuß 5 entspricht $\frac{ct}{7200}$; dem Zinsfuß 6 entspricht $\frac{ct}{6000}$ ꝛc. Man erhält demnach die Zinsen, wenn man die Zahl der Tage mit dem Kapital multiplicirt, und das Product durch die dem gegebenen Zinsfuß entsprechende, constante Zahl dividirt.

Dieses Verfahren wird besonders dann mit Vortheil angewendet, wenn man die Interessen vieler Kapitalien für einen

und denselben Schuldner zu berechnen hat, wie z. B. im Conto-Corrent des Banquiers.

Hat z. B. ein Schuldner die Zinsen von 600 fl. für 280 Tage, von 1200 fl. für 170 Tage, von 800 fl. für 60 Tage und von 300 fl. für 20 Tage zu 6 Procent zu vergüten, so betragen die Zinsen

$$\text{vom 1. Kapital } \frac{280 \times 600}{6000} = \frac{168000}{6000}$$

$$\text{„ 2. „ } \frac{170 \times 1200}{6000} = \frac{204000}{6000}$$

$$\text{„ 3. „ } \frac{60 \times 800}{6000} = \frac{48000}{6000}$$

$$\text{„ 4. „ } \frac{20 \times 300}{6000} = \frac{6000}{6000}$$

Die Summe dieser gleichnamigen Brüche giebt den gesuchten Zins, und man hat daher die Summe der Zähler in obigem Beispiel (246000) durch den gemeinschaftlichen Nenner (hier 6000) zu dividiren. Man erhält daher den Zins, wenn man die Zahl der Tage mit den zugehörigen Kapitalien multiplicirt, die Producte addirt und die Summe derselben durch die dem Zinsfuß entsprechende constante Zahl dividirt. Die Rechnungsabkürzung, welche obiges Verfahren gewährt, besteht also darin, daß man nur eine Division zu machen hat. Zur weitern Abkürzung der Berechnung kann man, unbeschadet der erforderlichen Genauigkeit, von den Producten und dem constanten Divisor zwei Ziffern rechter Hand weg lassen.

Conto-Corrent mit Zinsen.

60. Wenn zu wiederholten Malen von einer und derselben Person an Jemand Gelder vorgeschossen werden, und wenn dagegen der Schuldner von Zeit zu Zeit Zahlungen an den Gläubiger macht, so entsteht die Frage, wie viel die Schuld mit Berücksichtigung der Zinsen zu irgend einer Zeit beträgt. Für diese Aufgabe, welche in der Praxis auf mannigfache Weise vorkommt, giebt es mehrere Auflösungsarten, deren Anwendbarkeit zum Theil durch die Beschaffenheit der Aufgabe bedingt ist.

Z. B. die Großh. Badische *** Kasse hat dem Hofbanquier N. N. in Frankfurt a. M. Wechsel zur Einkassirung übermacht, und sie ist laut vorigem, am 31. December 1840 abgeschlossenen Conto-Corrent dafür mit 100000 fl. bei jenem Wechselhause erkannt. Letzteres hat ferner am 3. Mai 1842 einen Frank-

furter, auf N. N. gezogenen Wechsel von 10000 fl., und am 12. Juni einen auf N. N. gezogenen Frankfurter Wechsel von 4000 fl. für Rechnung der Regierung einkassirt, und dagegen am 15. Januar 1842, am 28. März und am 30. Juni für Rechnung derselben Zahlungen an N. N. gemacht, und sie dafür, mit Inbegriff der Provision, beziehlich mit 30000 fl., 18000 fl. und 1000 fl. belastet. Es ist die Frage, wie viel der Seitenrest oder Saldo der Rechnung beträgt, wenn sie für den letzten December 1842 abgeschlossen wird, wenn die Zinsen zu 4 Procent berechnet werden, und wenn das Wechselhaus für ausgelegte Stempelgebühren 7 fl. und für Briefporto 1 fl. 35 kr. in Rechnung bringt.

Stellt man die Zahlungen mit dem gehörigen Datum, d. h. mit dem Tage, an welchem die Zahlungen stattgefunden haben und die Verzinsung beginnt, zusammen, so erhält man Folgendes:

Soll.		*Haben.*	
1842.	fl.	**1841.**	fl.
Jan. 15.	30000	Decbr. 31	100000
März 28.	18000	**1842.**	
Juni 30.	1000	Mai 3.	10000
		Juni 12.	4000

Weil die Rechnung auf den 31. December abgeschlossen werden soll, so hat man die Zahl der Tage, welche der Zeitraum vom Zahlungstage bis zum 31. December enthält, zuvörderst zu berechnen. Wird, dem Gebrauch zufolge, der Monat zu 30 Tagen, und also das Jahr zu 360 Tagen gerechnet, so ist die Zahl der Tage für die Zahlungen des Wechselhauses

vom 15. Januar bis zum 31. December = 345 Tage,
„ 28. März „ „ 31. „ = 272 „
„ 30. Juni „ „ 31. „ = 180 „

und für die Gelder, welche das Wechselhaus einkassirt hat:

vom 31. December 1841 bis 31. December 1842 = 360 Tage,
„ 3. Mai „ 31. „ = 237 „
„ 12. Juni „ 31. „ = 198 „

Berechnet man nun die Zinsen der Zahlungen zu 4 Procent, so werden die Kapitalposten und die entsprechenden Interessen wie im unten folgenden Conto-Corrent aufgestellt. Die Differenz

der im Soll und Haben befindlichen Interessen giebt den gesuchten, zu Gunsten des Conto-Corrent-Empfängers lautenden Zinsensaldo, nämlich 2637 fl. 20 kr.

Dieser Betrag kommt also auf das Haben des vom Wechselhause aufgestellten Conto-Corrents. In das Soll kommen dagegen die Beträge von 7 fl. und 1 fl. 35 kr., beziehlich für Stempel und Porto, und wenn man nun das Soll und Haben addirt und die Summen von einander abzieht, so erhält man 67628 fl. 45 kr. als Rest; dieser Rest wird, als Saldo bezeichnet, in's Soll der Rechnung gestellt, weil das Soll schwächer als das Haben ist, und, der Probe wegen, das Soll und das Haben wieder addirt; was auch mit den Zinsen geschieht, nachdem man den Zinsensaldo von 2637 fl. 20 kr. in das Soll der Zinsrechnung gebracht hat; wonach sowohl bei der Addition der Kapitalposten als bei derjenigen der Zinsposten gleiche Summen herauskommen müssen. Für den Saldo der Rechnung wird endlich der Conto-Corrent-Empfänger unterm Datum des Abschlusses, dem 31. December 1842, wieder credidirt oder erkannt, wie aus dem folgenden Conto-Corrent zu ersehen.

Soll **Großherzogl. Badische *** Kasse in Carlsruhe** **Haben.**

			fl.	kr.	Tage	Zinsen fl.	Zinsen kr.				fl.	kr.	Tage	Zinsen fl.	Zinsen kr.
1842.								1841.							
Jan.	25	An Zahlung an N. N.	30000	—	345	1150	—	Dcbr.	31	Für Saldo voriger Rechnung	100000	—	360	4000	—
März	28	„ „ „ N. N.	18000	—	272	544	—								
Juni	30	„ „ „ N. N.	1000	—	180	20	—	1842.							
Dcbr.	31	„ Saldo der Zinsen	—	—	—	2637	20	Mai	3	„ Rimesse auf N. N.	1000	—	237	263	20
		„ Stempel zu ½ ‰ aus fl. 14000 . . .	7	—	—	—	—	Juni	12	„ „ „ N. N,	4000	—	198	88	—
		„ Porto	1	35	—	—	—	Dcbr.	31	„ Interessen zu 4 %	2637	20	—	—	—
		„ Saldo	67628	45											
			116637	20		4351	20				116637	20		4351	20
										F. Saldo a. neue Rechn.	67628	45			

Frankfurt a. M., den 31. December 1842.

N. N.

61. Die Berechnung des Zinsensaldos, d. h. die Differenz der Zinsvergütungen, welche dem Ertheiler des Conto-Corrents oder dem Conto-Corrent-Empfänger zukommt, kann auf folgende Weise, in Beziehung auf obiges Beispiel, abgekürzt werden. Nach der im §. 59 zur Berechnung der Zinsen aufgestellten Regel sind die Producte für die dem Banquier zu gut kommenden Zinsen wie folgt:

$$345 \times 30000 = 10350000$$
$$272 \times 18000 = 4896000$$
$$180 \times 1000 = 180000$$

Die Summe derselben ist $= 15426000$, und die Summe der dem Banquier zu gut kommenden 4-procentigen Zinsen ist $= \frac{1542600}{9000.}$

Die Producte für die dem Conto-Corrent-Empfänger zu vergütenden Zinsen sind wie folgt:

$$360 \times 100000 = 36000000$$
$$237 \times 10000 = 2370000$$
$$198 \times 4000 = 792000$$

Die Summe derselben ist $= 39162000$, und die Summe der dem Schuldner zu vergütenden 4-procentigen Zinsen ist $= \frac{39162000}{9000}$; der gesuchte Zinsensaldo ist mithin $= \frac{39162000}{9000}$ $= \frac{15426000}{9000} = \frac{23736000}{9000} = 2637$ fl. 20 kr., in Uebereinstimmung mit der obigen Berechnung. Hieraus wird zur Berechnung des Zinsensaldos die Regel abgeleitet: *Multiplicire die Kapitalien mit den Tagen, addire die zum Soll gehörigen Producte und die dem Haben gehörigen Producte, ziehe die Summen von einander ab, und dividire den Rest mit der, dem bedungenen Zinsfuße entsprechenden constanten Zahl* (§. 59). Zur weitern Vereinfachung der Berechnung kann man, wie bereits im §. 59 bemerkt worden, von den Producten und von den constanten Divisoren zwei Ziffern rechter Hand weg lassen. Die Producte der Kapitalien und Zinsen werden *Zinszahlen* oder *Nummern* (nombres) genannt.

Wendet man dieses Verfahren auf obiges Beispiel an, so ist das Conto-Corrent wie folgt:

Soll N. N. Haben.

1842.			Tage	Zinszahlen.	fl.	kr.	1841.			Tage	Zinszahlen.	fl.	kr.
Jan.	15	An Zahlung an N. N.	345	10350000	30000	—	Dcbr.	31	Für Saldo voriger Rechnung	360	36000000	100000	—
März	28	„ „ „ N. N.	272	4896000	18000	—							
Juni	30	„ „ „ N. N.	180	180000	1000	—	1842.						
Dcbr.	21	„ Saldo der Zinszahlen	—	32736000	—	—	Mai	3	„ Rimesse auf N. N.	237	2370000	10000	—
							Juni	12	„ „ „ N. N.	198	792000	4000	—
		„ Stempel zu ½ ‰ aus fl. 14000	—	—	7	—	Dcbr.	31	F. Interessen $\frac{23736000}{9000}$	—	—	2637	20
		„ Porto	—	—	1	35							
		„ Saldo	—	—	67628	45							
				39162000	116637	20					39162000	116637	20
									Für Saldo auf neue Rechnung	—	—	67628	45

62. Zinsrechnungen obiger Art werden vom Banquier gewöhnlich auf den letzten Juni und December gestellt, und man berechnet entweder die Zinsen oder die Zinszahlen gleich bei der Entstehung der Kapitalposten, damit sich dergleichen Ausrechnungen nicht anhäufen. Es kann indessen geschehen, daß nachher früher oder später als zur gewöhnlichen Zeit abgeschlossen werden muß, in welchem Falle die bereits gefertigte Zinsrechnung unbrauchbar ist. Zur Beseitigung dieses Uebelstandes ist in neuerer Zeit eine Zinsrechnungsmethode aufgekommen, welche unabhängig vom Tage des Abschlusses ist, und nach welcher also die Rechnung auf jeden beliebigen Tag abgeschlossen werden kann.

Um zu dieser Berechnungsweise zu gelangen, wollen wir die Tage vom Zahltage an bis zum frühesten Zahltage der Rechnung, oder einem frühern Tage als diesem zurück zählen, und dann untersuchen, auf welche weitere Weise verfahren werden müsse, damit bei einer solchen rückwärtsgehenden Zinsrechnung das Resultat wie bei der gewöhnlichen herauskomme.

Bezeichnen A, B, C u. s. w. die Kapitalien im Soll, und a, b, c u. s. w. die entsprechenden, auf den letzten Juni oder letzten December berechneten Tage; ferner D, E u. s. w. die Kapitalien im Haben, und d, e u. s. w. die auf dieselbe Art berechneten Tage, so ist die Zusammenstellung wie folgt:

Soll.	Haben.
$aA+bB+cC$	$dD+eE$

Bezeichnet m die Periode des Abschlusses, also entweder ein halbes oder ganzes Jahr, und rechnet man die Tage zurück auf den 1ten Tag des Semesters oder des Jahres, so sind $m-a$, $m-b$, $m-c$, $m-d$, und $m-e$ die entsprechenden Tagezahlen. Multiplicirt man diese Zeiten mit den zugehörigen Kapitalien, so lassen sich die Factoren und Producte folgenderweise zusammenstellen:

Soll.			Haben.		
$m-a$	$mA-aA$	A	$m-d$	$mD-dD$	D
$m-b$	$mB-bB$	B	$m-e$	$mE-eE$	E
$m-c$	$mC-cC$	C			

Die Produkte der Kapitalien und Zeiten können auch folgenderweise zusammengestellt werden:

Soll.	Haben.
$mA+mB+mC-(aA+bB+cC)$	$mD+mE-(dD+eE)$

Damit sich nun diese Zusammenstellung auf diejenige nach der gewöhnlichen Zinsrechnung reducire, addire man $mA+mB+mC-mD-mE$ zu den Größen auf der Habenseite; man erhält alsdann folgendes:

Soll.	Haben.
$mA+mB+mC-(aA+bB+cC)$	$mD+mE-(dD+eE)$ $+mA+mB+mC-mD-mE$

Die Zusammenstellung reducirt sich hierdurch auf die folgende:

Soll.	Haben.
$-(aA+bB+cC)$	$-(dD+eE)$

Da aber die negativen Größen im Soll die Forderung, und auf der entgegengesetzten Seite das Guthaben des Conto-Corrent-Empfängers vermindern, so werden diese Zeichen fortgeschafft, wenn man die im Haben befindlichen Größen auf die Sollseite, und die im Soll befindlichen Größen auf die Habenseite bringt; so daß die Rechnung wie folgt steht:

Soll.	Haben.
$dD+eE$	$aA+bB+cC$

Dieß stimmt mit der gewöhnlichen Berechnung bis auf den Unterschied überein, daß das, was dort im Soll vorkommt,

PARSONS LIBRARY University of MICHIGAN

hier im Haben steht, und so umgekehrt; dieser Fehler wird aber verbessert, wenn man den Zinsensaldo in's Soll der Rechnung bringt, wenn die Summe der Zinszahlen des Soll kleiner als diejenige der Zinszahlen des Haben ist; in's Haben der Rechnung hingegen, wenn in Betreff der Zinszahlen das Soll stärker als das Haben ist.

Die Zusammenstellung in der ursprünglichen Form ist demnach für die rückwärtsgehende Zinsrechnung wie folgt:

Soll.			*Haben.*		
$m-a$	$(m-a)$ A	A	$m-d$	$(m-d)$ D	D
$m-b$	$(m-b)$ B	B	$m-e$	$(m-e)$ E	E
$m-c$	$(m-c)$ C	C	$m(\text{A}+\text{B}+\text{C}-(\text{D}+\text{E}))$		

Da nun m den Zeitraum vom Tage, auf welchen man zurückrechnet, bis zu dem Tage des Abschlusses bezeichnet, und $\text{A}+\text{B}+\text{C}-(\text{D}+\text{E})$ der rohe Saldo ist, so ist das Verfahren wie folgt: Man rechnet die Tage zurück auf den 1ten Tag der Periode (oder auch auf den frühesten Zahltag), multiplicirt die Tage mit den Kapitalien, sodann die Zahl der Tage, welche der Zeitraum vom 1ten Tage der Periode (oder vom frühesten Zahltage) bis zum Tage des Abschlusses begreift, mit dem rohen Saldo, bringt letzteres Produkt auf die Habenseite der Rechnung, wenn das Soll stärker als das Haben oder im umgekehrten Falle auf die Sollseite der Rechnung, und dividirt den Saldo der Zinszahlen durch die, dem betreffenden Zinsfuße entsprechende, constante Zahl: der Quotient ist der gesuchte Zinsensaldo, welcher in's Soll der Rechnung kommt, wenn die Summe der Zinszahlen des Soll kleiner als diejenige der Zinszahlen des Haben ist; in's Haben der Rechnung hingegen, wenn in Betreff der Zinszahlen das Soll stärker als das Haben ist.

Dieses Verfahren auf obiges Conto-Corrent angewendet, giebt folgende Rechnung:

Soll **N. N.** *Haben.*

1842.			Tage	Zinszahlen.	fl.	kr.	1841.			Tage	Zinszahlen.	fl.	kr.
Jan.	15	An Zahlung an N. N.	15	450000	30000	—	Dcbr.	31	Für Saldo voriger Rechnung	0	—	100000	—
März	28	„ „ „ N. N.	88	1584000	18000	—							
Juni	30	„ „ „ N. N.	180	180000	1000	—	1842.						
Dcbr.	31	„ Roher Saldo fl. 65000	360	23400000	—	—	Mai	3	„ Rimesse auf N. N.	123	1230000	10000	—
							Juni	12	„ „ „ N. N.	162	648000	4000	—
		„ Stempel zu ½ ‰ aus fl. 1400	—	—	7	—			„ Saldo der Zinszahlen	—	23736000	—	—
		„ Porto	—	—	1	35	Dcbr.	31	„ Interessen $\frac{23736000}{9000}$	—	—	2637	20
		„ Saldo	—	—	67628	45							
				25614000	116637	20					25614000	116637	20
									Für Saldo auf neue Rechnung	—	—	67628	45

63. Bei dem Abschluß des Conto-Corrents kommt es öfters vor, daß noch Tratten und Rimessen im Laufe sind, d. h., daß der Banquier Tratten acceptirt hat, welche erst nach dem Abschlußtage fällig sind, d. h. bezahlt werden müssen, und daß er von seinem Schuldner Wechsel erhalten hat, welche ebenfalls noch nicht verfallen sind. Sollen nun die Beträge der noch nicht verfallenen Wechsel der Rechnung einverleibt werden, so kann dieß sowohl bei der gewöhnlichen Rechnung mit Zinszahlen, als auch bei der rückwärtsgehenden Zinsrechnung statt finden, ohne daß dadurch der Gang der Rechnung wesentlich modificirt wird. Bei dem ersten Verfahren werden die auf den Tag des Abschlusses discontirten Werthe der Kapitalposten in Rechnung gebracht.

Es seyen z. B. die Kapitalposten und ihre Verfallzeiten im Söll und Haben der Rechnung wie folgt:

Soll.			*Haben.*		
Verfallzeit.	Tage.	Kapital.	Verfallzeit.	Tage.	Kapital.
		fl.			fl.
Jan. 31	—	400	Jan. 31	—	300
April 30	—	500	Mai 31	—	300
Mai 31	—	700	Juli 31	30	800
Juli 31	30	400	Juni 15	—	200
Aug. 31	60	500			
Juni 30	—	100			

Soll nun die Rechnung am ult. Juni abgeschlossen werden, so kann an diesem Abschlußtage der Schuldner nicht für die volle Summe der auf den Banquier trassirten und erst nach dem Abschlußtage verfallenen 400 fl. und 500 fl. belastet, und eben so wenig für die Rimesse von 800 fl., welche am 31. Juli fällig ist, zum vollen Werthe creditirt werden, sondern es müssen die gegenwärtigen, d. h. die dem Abschlußtage entsprechenden Werthe jener Wechselbeträge in Rechnung kommen. Dieß kann dadurch geschehen, daß man den Schuldner um die Interessen der noch nicht eingelösten Rimesse belastet, und um die Interessen der noch nicht verfallenen und deshalb noch nicht bezahlten Tratten creditirt, und zwar für die Zahl der Tage, welche der Zeitraum vom Abschlußtage bis zum Zahltage der

Wechsel begreift, also im obigen Beispiel für die Tratte von 400 fl. für 30 Tage, für diejenige von 500 fl. für 60 Tage, und für die Rimesse von 800 fl. für 30 Tage.

Im obigen Beispiel muß demnach bei dem Zinsfuß 6 der Schuldner für $\frac{30 \times 800}{6000}$ fl. belastet, und für $\frac{30 \times 400}{6000}$ fl. und $\frac{60 \times 506}{6000}$ fl. creditirt werden.

Für diesen Theil der Rechnung ist also die Zusammenstellung wie folgt:

Soll.			*Haben.*		
	Tage	fl.		Tage	fl.
	30	400		30	800
	60	500			
Zinsen $\frac{30 \times 800}{6000}$			Zinsen $\frac{30 \times 400}{6000}$		
			do. $\frac{60 \times 500}{6000}$		

Setzt man statt dessen:

Soll.				*Haben.*			
		Tage	fl.			Tage	fl.
		30	400			30	800
		60	500				
Zinsen $\frac{30\times400}{6000}$ / $\frac{60\times500}{6000}$	ins. =	$\frac{42000}{6000}$		Zinsen $\frac{30 \times 800}{6000}$	=	$\frac{24000}{6000}$	

so entspricht diese Zusammenstellung, wenn man den Saldo jener Zinsen in Rechnung bringt, dem Folgenden:

Soll.				Haben.			
		Tage	fl.			Tage	fl.
			30 400			30	840
			60 500				
$\frac{30\times400}{6000}$				$\frac{30\times8000}{6000}$	= $\frac{24000}{6000}$		
$\frac{60\times500}{6000}$	= $\frac{42000}{6000}$			(Saldo)	$\frac{18000}{6000}$		
	$\frac{42000}{6000}$				$\frac{42000}{6000}$		

Zur Unterscheidung der Zinszahlen von den Discontzahlen pflegt man letztere mit rother Tinte einzustellen; man zieht alsdann den Saldo der rothen Zinszahlen, stellt denselben gehörigen Orts auf, schreibt denselben auch mit schwarzen Ziffern an, und berechnet endlich auch den Zinsensaldo vermittelst der schwarzen Zinszahlen, wie aus folgendem Beispiel zu ersehen:

Soll.						Haben.					
	Verfallzeit.	Tage.	Zinszahlen.	fl.	kr.		Verfallzeit.	Tage.	Zinszahlen.	fl.	kr.
	Jan. 31	150	60000	400	—		Jan. 31	150	45000	300	—
	April 30	60	30000	500	—		Mai 31	30	9000	300	—
	Mai 31	30	21000	700	—		Juli 31	30	24000	800	—
	Juli 30	30	12000	400	—		Juni 15	15	3000	200	—
	Aug. 31	60	30000	500	—	Ausgleichung der rothen Zinszahl.	—	—	12000	—	—
	Juni 30	—	—	100	—				18000	—	—
Zinsen $\frac{36000}{6000}$	—	—	—	6	—	Ausgleichung der schwarzen Zinszahl.	—	—	36000	—	—
						Saldo ..	—	—	—	1006	—
			111000	2606	—				111000	2606	—
			12000						12000		
Saldo	—	—	—	1006	—						

64. Bei Anwendung der rückwärts gehenden Zinsrechnung im vorliegenden Falle wird wie gewöhnlich gerechnet; auch für die über den Abschlußtag hinaus gehenden Verfalltage wird auf den angenommenen Tag (den ersten Tag des Jahrs oder Semesters, oder auf den früheſten Verfalltag) zurück gerechnet, und der rohe Saldo wird mit der Zahl der Tage multiplicirt, welche der Zeitraum vom Anfangstage bis zum Abschlußtage begreift.

Bezeichnen nämlich a, b und c die auf gewöhnliche Weiſe (nicht rückwärts) gezählten Tagezahlen, und A, B, C die entſprechenden Kapitalien im Soll; bezeichnen ferner G und H die Poſten im Soll, welche über den Abschlußtag hinauslaufen, und beziehlich g und h die auf den Abschlußtag gezählten Tagezahlen; bezeichnen ferner d und e die Tagezahlen im Haben, und D, E die entſprechenden Kapitalien, und bezeichnet endlich I einen Poſten im Haben, der über den Abschlußtag hinausläuft, und i die entſprechende Tageszahl; ſo erhält man ohne rothe Zinszahlen den Zinſenſaldo aus folgender Zuſammenſtellung:

Soll.			*Haben.*		
a	a A	A	d	d D	D
b	b B	B		e E	E
c	c C	C	i	—	I
g	—	G	—	g G	
h	—	H	—	h H	
—	i I	—			

Bezeichnet f den Zeitraum vom Abschlußtage bis zum angenommenen Anfangstage, ſo iſt nach dem Verfahren für die rückwärts gehende Zinsrechnung die Zuſammenſtellung wie folgt:

Soll.			*Haben.*		
$f-a$	fA $-a$A	A	$f-d$	fD $-d$D	D
$f-b$	fB $-b$B	B	$f-e$	fE $-e$E	E
$f-c$	fC $-c$C	C	$f+i$	fI $+i$I	I
$f+g$	fG $+g$G	G		fA $+f$B $+f$C $+f$G $+f$H	
$f+h$	fH $+h$H	H		$-f$D $-f$E $-f$I	

Streicht man die gleichen Größen im Soll und Haben gegen einander aus, so reducirt sich diese Zusammenstellung auf die folgende:

Soll.			*Haben.*		
$f-a$	$-aA$	A	$f-d$	$-dD$	D
$f-b$	$-bB$	B	$f-e$	$-eE$	E
$f-c$	$-cC$	C	$f+i$	iI	I
$f+g$	gG	G			
$f+h$	hH	H			

Oder, mit Weglassung der Kapitalposten und Zeiten, auf diese:

Soll.	*Haben.*
dD	aA
eE	bB
gG	cC
hH	iI

Diese Zusammenstellung stimmt mit derjenigen nach der gewöhnlichen (nicht rückwärts gehenden) Zinsrechnung bis auf den Unterschied überein, daß die Zinszahlen, die dort im Soll stehen, hier im Haben vorkommen, und so umgekehrt, weßhalb auf den Eintrag des Zinsensaldos die gehörige Rücksicht zu nehmen ist (§. 62). Die rückwärts gehende Zinsenrechnung, auf obiges Beispiel angewendet, giebt folgende Rechnung:

Soll.						Haben.					
	Verfallzeit.	Tage.	Zinszahlen	fl.	kr		Verfallzeit.	Tage.	Zinszahlen	fl.	kr
	Jan. 31	30	12000	400	—		Jan. 31	30	9000	300	—
	April 30	120	60000	500	—		Mai 31	150	45000	300	—
	Mai 31	150	105000	700	—		Juli 31	210	168000	800	—
	Juli 31	210	84000	400	—		Juni 15	165	33000	200	—
	Aug. 31	240	120000	500	—						
	Juni 30	180	18000	100	—	Roher Saldo fl. 1000	—	180	180000	—	
Ausgleichung der Zinszahlen	—	—	36000	—		Saldo ...	—	—	—	1006	
Zinsen $\frac{36000}{6000}$	—	—	—	6							
			435000	2606	—				435000	2606	
Saldo	—	—	—	1006	—						

65. Ein anderes Verfahren zur Berechnung des Zinsensaldos besteht darin, den Betrag der Schuld für jeden Datum, welcher in der Rechnung vorkommt, durch Ab- und Zuschreiben der gezahlten oder erhaltenen Gelder auszumitteln, und die entsprechenden Zinsen zu berechnen; die Summe derselben giebt den gesuchten Zinsensaldo; vorausgesetzt, daß der Banquier im Laufe der Rechnung nicht selbst als Schuldner erscheint, in welchem Falle jene Zinsrechnung, die sogenannte Staffelrechnung, eine Modification erleidet, welche weiter unten zur Sprache kommt. Zur Erläuterung dieser Rechnungsart diene folgendes Beispiel:

Verfallzeit.	fl.	Verfallzeit.	fl.
Januar 20	400	März 4	700
„ 30	300	Juli 20	400
März 5	500	„ 30	236
April 20	650		
Juni 16	1050		
Decemb. 10	364		

Am 20. Januar hat der Bankier ausgelegt 400 fl., und am 30. Januar wieder 300 fl. Die Zinsen von 400 fl., vom 20. bis zum 30. Januar, also für 10 Tage, betragen 40 kr. Am 30. Januar beträgt die Forderung 400 fl. + 300 fl. = 700 fl.; am 4. März zahlt der Schuldner 700 fl.; die Zinsen vom 30. Januar bis zum 4. März von 700 fl. betragen 3 fl. 58 kr. Am 4. März ist die Schuld getilgt. Am 5. März zahlt der Bankier 500 fl., und am 20. April wieder 650 fl.; die Zinsen vom 5. März bis zum 20. April, also für 45 Tage, betragen 3 fl. 45 kr., und am 20. April beträgt die Forderung 500 + 650 fl. = 1150 fl.; am 16. Juni zahlt der Bankier wieder 1050 fl., und die Zinsen vom 20. April bis zum 16. Juni, also für 56 Tage, betragen 10 fl. 44 kr.; am 16. Juni beträgt die Forderung 1150 fl. + 1050 = 2200 fl., und am 20. Juli trägt der Schuldner 400 fl. ab; die Zinsen vom 16. Juni bis zum 20. Juli, also für 34 Tage, betragen 12 fl. 28 kr., und am 20. Juli beträgt die Forderung 2200 fl. — 400 fl. = 1800 fl.; am 30. Juli trägt der Schuldner 236 fl. ab; die Zinsen von 1800 fl. vom 20. Juli bis zum 30. Juli, also für 10 Tage, betragen 3 fl.; am 30. Juli beträgt die Schuld 1800 fl. — 236 fl. = 1564 fl.; am 10. December zahlt der Bankier 364 fl.; die Zinsen von 1564 fl. vom 30. Juli bis zum 10. December, also für 130 Tage, betragen 33 fl. 53 kr.; am 10. December beträgt die Schuld 1564 fl. + 364 fl. = 1928 fl.; hiervon betragen die Zinsen vom 10. December bis zum Tage des Abschlusses der Rechnung, nämlich bis zum 31. December, also für 20 Tage, 6 fl. 25 kr. Addirt man sämmtliche Zinsen, so kommen 74 fl. 53 kr. für den gesuchten Zinsensaldo heraus. Die Rechnungsaufstellung in der üblichen Form ist, wie folgt.

Kapitalien.			Tage	Zinsen zu 6%	
fl.	kr.			fl.	kr.
400	—	Vom 30. Januar bis 30. Januar	10	—	40
300	—				
700	—	„ 30. „ „ 4. März	34	3	58
700	—				
0					
500	—	„ 5. März „ 20. April	45	3	45
560	—				
1150	—	„ 20. April „ 16. Juni	56	10	44
1050	—				
2200	—	„ 16. Juni „ 20. Juli	34	12	28
400	—				
1800	—	„ 20. Juli „ 30. „	10	3	—
236	—				
1564	—	„ 30. „ „ 10. Decbr.	130	33	53
364	—				
1938	—	„ 10. Decbr. „ 31. „	20	6	25
		Zusammen	fl.	74	53

Die Staffelrechnung kann auch in dem Falle, wenn noch nicht verfallene Wechselposten der Rechnung einverleibt werden sollen, in Anwendung kommen. Zur Erläuterung des dabei vorkommenden Verfahrens diene obiges, für diesen Fall aufgestellte Beispiel.

Die Kapitalposten und entsprechenden Verfallzeiten sind wie folgt.

Soll.		*Haben.*	
Verfallzeit.	fl.	Verfallzeit.	fl.
Jan. 31	400	Jan. 31	300
April 30	500	April 30	300
Mai 31	700	Juli 31	800
Juli 31	400	Juni 15	200
Aug. 31	500		
Juni 30	100		

Die Kapitalposten, welche nicht über den Abschlußtag (im obigen Beispiel der ult. Juni) hinauslaufen, werden wie vorher berechnet. Für diese Posten ist daher die Berechnung wie folgt.

Kapitalien.			Tage	Zinsen zu 6%	
fl.	kr.			fl.	kr.
400	—	Vom 31. Januar bis 31. Januar	—	—	—
300	—				
100	—	„ 31. „ „ 30. April	90	1	30
500	—				
600	—	„ 30. April „ 31. Mai	30	3	—
300	—				
300	—				
700	—				
1000	—	„ 31. Mai „ 15. Juni	15	2	30
200	—				
800	—	„ 15. Juni „ 30. „	15	2	—

Für die im Soll stehenden 400 fl., welche erst am 31. Juli ausbezahlt werden, kann der Schuldner nicht am ult. Juni belastet werden, sondern nur für den am 30. Juni zum Zinsfuß 6 berechneten Werth jener Summe; da sie also um die 6-procentigen Zinsen für 30 Tage vermindert werden muß, an der Summe selbst hingegen nichts geändert werden darf, so muß der Schuldner für den Interessenbetrag credidirt werden. Dasselbe gilt von den am 31. August verfallenden 500 fl.; d. h. die Zinsen von dieser Summe für 60 Tage müssen ebenfalls auf das Haben der Rechnung gebracht werden.

Der Schuldner hat einen Wechsel im Betrag von 800 fl. übermacht, welche erst am 31. Juli, also 30 Tage nach dem Abschlußtage der Rechnung, gezahlt werden; derselbe kann also eben so wenig für den vollen Werth, sondern nur für den am ult. Juni stattfindenden Werth creditirt werden; da aber ebenfalls am Betrage dieses Wechselpostens nichts geändert werden darf, so muß der Schuldner für die entsprechenden Zinsen belastet werden. Deßhalb müssen in einem solchen Falle in der Staffelrechnung zwei Columnen vorkommen, nämlich eine für

diejenigen Zinſen, welche in's Soll gehören, und eine andere für die Zinſen, welche in's Haben geſtellt werden müſſen. Die tabellariſche Aufſtellung für obiges Beiſpiel iſt, wie folgt:

Kapitalien.				Tage.		Soll.		Haben.	
	fl.	kr.		Soll	Hab.	fl.	kr.	fl	kr.
Soll	400	—	Vom 31. Jan. bis 31. Jan.	—	—	—	—	—	—
Haben	300	—		90	—	1	30	—	—
Soll	100	—	„ 31. „ „ 30. April	30	—	3	—	—	—
„	500	—							
„	600	—	„ 30. April „ 31. Mai						
Haben	300	—							
Soll	300	—							
„	700	—							
„	1000	—	„ 31. Mai „ 15. Juni	15	—	2	30	—	—
Haben	300	—							
Soll	800	—	„ 15. „ „ 30. „	15	—	2	—	—	—
„	400	—	„ 31. Juli „ 30. „	—	30	—	—	2	—
„	500	—	„ 31. Aug. „ 30. „	—	60	—	—	5	—
Haben	800		„ 31. Juli „ 30. „	30	—	4	—	—	—
						13	—	7	—
			Zinſenſaldo	—	—	—	—	6	—
						13	—	13	—

66. Im Vorhergehenden wurden bei den gegenſeitigen Zinsvergütungen gleiche Zinsfüße angenommen; da es indeſſen geſchehen kann, daß der Bankier im Laufe der Rechnung Schuldner wird, in dem Falle z. B., wenn Derjenige, welcher auf ihn traſſirt hat, die Anſchaffung oder Deckung vor der Verfallzeit der Tratte macht, oder Wechſel zum Einkaſſiren übermacht, ſo daß der Conto-Corrent-Empfänger im Vorſchuß iſt, ſo bedingt ſich der Bankier entweder:

1) daß er in dieſem Falle keine Zinſen dafür vergütet, weil er die vielleicht nur in kurzen Friſten zu ſeiner Diſpoſition ſtehenden Gelder nicht benutzen könne; oder
2) daß er den Zinsfuß höher anſetzt, wenn er im Vorſchuß iſt, und die Zinsvergütung zu einem niedrigern Zinsfuß leiſtet, wenn er im Laufe der Rechnung Schuldner wird.

Im beiden Fällen kann die Zinsrechnung vermittelſt der Zinszahlen oder neben jedem Poſten eingeſtellten Zinſen begreiflicher

Weise nicht in Anwendung kommen, und man muß sich alsdann der Staffelrechnung bedienen, welche, weil sie ohne Ausnahme angewendet werden kann, den Vorzug vor allen andern Zinsrechnungsarten verdient.

Als Beispiel zur ersten Bedingung diene folgendes Kapitalienverzeichniß.

Soll.		*Haben.*	
Verfallzeit.	fl.	Verfallzeit.	fl.
Januar 1.	1000	Februar 1.	1300
Februar 15.	400	Mai 15.	700
März 1.	1000		
Mai 1.	800		

Die Zinsen von 1000 fl. zu 5 Procent, vom 1. Januar bis zum 1. Februar, betragen 4 fl. 10 kr.; am 1. Februar erhielt der Bankier 1300 fl., also 300 fl. mehr, als er zu fordern hatte; dafür erhält der Remittent keine Zinsen. Am 15. Februar zahlt der Bankier wieder 400 fl. für Rechnung des Conto-Corrent-Empfängers; da er aber 300 fl. von demselben in Händen hat, so kann er nur 100 fl. in Rechnung bringen; die Zinsen davon vom 15. Februar bis zum 1. März betragen 12½ kr. Am 1. März wird das Guthaben um 1000 fl. vermehrt; die Zinsen von 1100 fl. betragen vom 1. März bis zum 1. Mai 9 fl. 10 kr. Am 1. Mai wird die Schuld um 800 fl. vermehrt; die Zinsen von 1900 fl. vom 1. bis zum 15. Mai betragen 3 fl. 57½ kr. Am 15. Mai wird die Forderung vermindert um 700 fl., und sie beträgt also nur noch 1200 fl.; die Zinsen davon vom 15. Mai bis zum 1. Juli betragen 7 fl. 30 kr. Sämmtliche Zinsen betragen 25 fl.

Die Aufstellung der Rechnung in tabellarischer Form ist wie folgt:

Kapitalien fl.	kr.		Tage.	Zinsen. fl.	kr.
1000	—	Vom 1. Januar bis 1. Febr.	30	4	10
1300	—				
300	—				
400	—				
100	—	„ 15. Februar „ 1. März	15	—	12½
1000	—				
1100	—	„ 1. März „ 1. Mai	60	9	10
800	—				
1900	—	„ 1. Mai „ 15. „	15	3	57½
700	—				
1200	—	„ 15. „ „ 4. Juli	45	7	30
			fl.	25	—

Vermittelst der Zinszahlen ist die Berechnung wie folgt:

Soll.	*Haben.*
180 × 1000 = 180000	150 × 1300 = 195000
135 × 400 = 54000	45 × 700 = 31500
120 × 1000 = 120000	Ausgleichung = 175500
60 × 800 = 48000	
402000	402000

Zinsensaldo zu 5 % $= \frac{175500}{7200} = 24$ fl. 22 kr., was um 38 kr. vom Resultat der vorigen Berechnung abweicht; so viel betragen nämlich die 5-procentigen Zinsen von 300 fl. für 15 Tage, welche, nach der angenommenen Bedingung, dem Conto-Corrent-Empfänger nicht vergütet werden.

Werden, der andern Bedingung gemäß, die Zinsen in dem in Rede stehenden Falle zu einem geringern Zinsfuße vergütet, so wird die Staffelrechnung wie auf unten folgende Art eingerichtet. In's Soll der Zinsen kommen diejenigen Interessen,

welche dem Banquier vergütet werden, in's Haben die Zinsen, welche er dem Conto-Corrent-Empfänger zu vergüten hat.

Conto-Corrent.

Soll.					*Haben.*				
1843			fl.	kr.	**1843**			fl.	kr.
Januar	18	———	1000	—	Januar	11	———	1000	—
Febr.	12	———	500	—	März	6	———	800	—
April	10	———	700	—	Juni	5	———	600	—
Mai	20	———	1000	—	„	30	Saldo . . .	809	36
		Zinsen. . .	9	36					
			3209	36				3209	36
Juni	30	Saldo . . .	809	36					

Zinsrechnung.

Kapitalien.				Tage.		Soll 6 %		Hab. 4 %	
	fl.	kr.		Soll	Hab	fl.	kr.	fl	kr.
Haben	1000	—	Vom 11. Januar bis 18. Jan.	—	7	—	—	—	46
Soll	1000	—							
Soll	500	—	„ 12. Februar „ 6 März	24	—	2	—	—	—
Haben	800	—							
„	300	—	„ 6. März „ 10. April	—	34	—	—	1	8
Soll	700	—							
„	400	—	„ 10. April „ 20. Mai	40	—	2	40	—	—
„	1000	—							
	1400	—	„ 20. Mai „ 5. Juni	15	—	3	40	—	—
Haben	600	—							
Soll	800	—	„ 5. Juni „ 30. Juni	25	—	3	20		
						11	80	1	54
				—	—	—	—	9	36
			Zinsensaldo . . .			11	30	1	30

IV. Von der Staatsschuldentilgung.

67. Wir haben uns hier mit der Tilgung derjenigen Staatsschulden zu beschäftigen, welche durch Anleihen entstehen. Staats- Verschiedene Arten der Staatsanleihen.

anleihen finden in der Weise statt, daß der Staat entweder durch Zwangsmaßregeln Kapitalien bei den Unterthanen borgt, oder im Wege freiwilliger Uebereinkunft Kapitalien erhebt. Die Anleihen der letztern Art kommen in verschiedenen Formen vor, und auf die Wahl derselben haben Veranlassung und Zweck der Anleihen einen wesentlichen Einfluß. In letzterer Beziehung theilt man die durch freiwillige Anleihen entstandene Staatsschuld in die schwebende (dette flottante) und fundirte Schuld (dette fondée) ein. Wenn nämlich unvorhergesehene Umstände die Staatseinkünfte vermindern, oder die Staatsausgaben vermehren, was aber in kurzer Zeit vermittelst der Einkünfte wieder gehoben werden kann, so nimmt der Staat Gelder auf und stellt dafür Schuldscheine aus, welche zur festgesetzten Zeit wieder eingelöst werden; dahin gehören z. B in England die Schatzkammerscheine, in Frankreich die königlichen Bons. So ist, in Beziehung auf letztere, der Finanzminister ermächtigt, Zinsen tragende und zu bestimmten Zeiten (gewöhnlich 4, 6, 9 bis 12 Monate Dato) rückzahlbare Schuldscheine bis zum Belauf einer bestimmten Summe zu creiren. Diese Bons werden auf der Börse durch die Sensale negociirt. Die in solchen verzinslichen Papieren liegende Schuld gehört zur schwebenden Schuld. Solche Anleihen sind Anticipationen, in sofern sich der Staat gewisse Einkünfte, die erst später auf dem gewöhnlichen Wege in die Staatscasse fließen würden, sich zum Voraus von Interessenten baar bezahlen läßt, so daß ein verzinsliches Schuldkapital auf den laufenden Einkünften haftet. Solche Schulden hingegen, die den vorübergehenden Zweck der Anticipation von Einkünften nicht haben können, sondern als eine stehende Schuld zu betrachten sind, und in Ansehung der Mittel zur Bestreitung der Zinsen, zur Rückzahlung der Kapitalien und der zur Sicherstellung der Gläubiger überhaupt zu treffenden Maßregeln nach festen Grundsätzen behandelt werden, nennt man fundirte Schulden.

Die Verbindlichkeiten, welche der Staat bei den eigentlichen Staatsanleihen, durch welche die fundirten Schulden entstehen, in Ansehung seiner Gläubiger übernimmt, können von verschiedener Art seyn.

Gewöhnlich sind die Kapitalien entweder unaufkündbar von

Seiten der Gläubiger, aber aufkündbar von Seiten des Staats, oder rückzahlbar unter festen Bedingungen.

Ist das Kapital unaufkündbar von Seiten der Gläubiger, so verschafft sich der Darleiher in Betracht der Zinsen, welche er halbjährlich oder jährlich vom Staate bezieht, und wenn wir annehmen, daß er sich bei der Anleihe lediglich in der Absicht betheiligt, seine Gelder verzinslich anzulegen, eigentlich eine Rente, und, weil er der Regierung gegenüber für immer auf die Verfügung über sein Kapital verzichtet hat, so pflegt man die davon fallenden Zinsen immerwährende Renten (rentes perpétuelles) zu nennen.

Die Darleiher nehmen auf den Umstand, daß sie bei solchen Anleihen ihre Kapitalien nicht aufkündigen dürfen, keine Rücksicht, wenn sie anders nur zur Erwartung berechtigt sind, daß die Abtragung der Zinsen jederzeit pünktlich erfolgen werde, und zwar um so mehr, als sie, wenn sie die Kapitalien wieder einziehen wollen, ihre vom Staat erhaltenen Schuldscheine wieder verkaufen dürfen.

Sind die Kapitalien rückzahlbar unter festen Bedingungen, so können die Anleihen wieder von verschiedener Art seyn; es werden nämlich entweder

1) die Zinsen und die Termine für die Rückzahlung der Kapitalien festgesetzt; oder

2) es wird den Darleihern Kapital und Zinsen auf eine Weise entrichtet, wodurch ein Theil der Gläubiger auf Unkosten des andern gewinnen, oder zum Vortheil desselben verlieren kann. Weil solche Abzahlungen auf dem Wege der Verlooſung bewerkstelligt werden, so nennt man die Anleihen, welche auf diese Art getilgt werden, Lotterie-Anleihen. Endlich können auch Anleihen gemacht werden

3) gegen Annuitäten oder Zeitrenten,

4) gegen Leibrenten und

5) gegen Tontinen.

Art und Weise Anleihen zu negociren

68. Die Staatsverwaltung kommt nicht mit den einzelnen Darleihern in Berührung, sondern sie überläßt die ganze Anleihe Denjenigen, welche in offner Mitbewerbung die billigsten Bedingungen machen, oder für die festgesetzten Bedingungen von den einzelnen Kapitalisten für beliebige Summen Subsriptionen annehmen. Im ersten Falle erfolgt von Seiten der Re-

gierung eine Bekanntmachung, welche die Bedingungen der Anleihe, so wie Bestimmungen über Leistung und Verhalten der Soumittenten enthalten; in letzterer Beziehung also

1) Bestimmung über die zur Sicherheit für die Vollziehung des Geschäfts vom Anlehens-Unternehmer zu stellende Caution;

2) Bestimmung der Zeit, zu welcher die Concurrenten ihre Soumissionen oder Anerbietungen (verschlossen) zu übergeben und die Bescheinigung über die gestellte Caution vorzulegen haben;

3) Bestimmung der Zeit, zu welcher sich die Soumittenten oder ihre Stellvertreter einzufinden haben, um der Eröffnung der Soumissionen beizuwohnen;

4) die Erklärung, daß die Soumittenten innerhalb des zwischen der Niederlegung und Eröffnung der Soumissionen liegenden Zeitraums für die gemachten Angebote verbindlich sind, den Fall etwa ausgenommen, daß in dieser Zwischenzeit ein wichtiges politisches Ereigniß zur öffentlichen Kunde gekommen wäre, welches einen nachtheiligen Einfluß auf den Geldmarkt haben dürfte;

5) die Erklärung, daß, falls mehrere Personen zur Abgabe einer Soumission sich vereinigen, solche für die Erfüllung der durch dieselben eingegangenen Verbindlichkeiten solidarisch verhaftet sind;

6) Bestimmungen in Betreff der Größe und Termine der Einzahlungen, mit weitern Bestimmungen für den Fall der nicht vorschriftmäßigen Einzahlung;

7) Angabe des Soumissions-Formulars, etwa mit der Erklärung, daß jede Abweichung davon zur Folge hat, daß die Soumission nicht berücksichtigt wird.

Bei dieser Begebungsweise findet mittelbar auch eine Concurrenz der kleinern Kapitalisten statt, indem große Häuser, welche, der Regierung gegenüber, unmittelbar in Mitbewerbung stehen, vor der Uebernahme des Anleihens mit minder reichen Kapitalisten oder Handelshäusern eventuelle Contracte abschließen können. Wer nun die geringste Provision fordert, d. h. für jedes Hundert des verschriebenen Kapitals oder *Nominalkapitals* das Meiste in Baarem bietet, dem wird die Anleihe zugeschlagen. Die Regierung fertigt hierauf den Uebernehmern eine Hauptschuldverschreibung aus, welche alle Vertragsbedingungen des Anleihens, sowie die Angabe der Stücklung der Obligationen enthält. Hierbei wird gewöhnlich

die Einrichtung getroffen, daß die Uebernehmer des Anleihens gleich Anfangs einen Theil der Einzahlung, und den Rest terminweise zu liefern haben. So hat z. B. die Einzahlung des Großherzogl. Badischen Eisenbahn-Anleihens von 12 Millionen Gulden gegen Ausfolgung einer entsprechenden Anzahl von Partial-Obligationen zu geschehen, und zwar im Jahr 1843 am Ersten jeden Monats mit 500000 fl., in den Jahren 1844 und 1845 am Ersten jeden Monats mit 250000 fl. Die Verzinsung der Obligationen beginnt mit dem 1. Januar 1843. Erfolgt die Einzahlung nicht auf obige Termine, so hat die Eisenbahnschuldentilgungs-Kasse das Recht, von dem Verfalltage an, die Zinsen des nicht rechtzeitig einbezahlten Kapitals nach dem Zinsfuße des Anleihens zu verlangen. Wird die Zahlung um 15 Tage verzögert, so steht ihr die Befugniß zu, die Obligationen, welche der Anlehens-Unternehmer in Empfang hätte nehmen sollen, auf Rechnung desselben zu verwerthen, und in soweit der Erlös für Kapital, Kosten und Schaden nicht zureicht, sich an die Caution zu halten *).

---

*) Wenn in England Anleihen durch den Verkauf verschiedener Fonds erhoben werden, so nennt man den Gesammtbetrag der Papiere, die für ein dargeliehenes Kapital von 100 Pfund Sterling gegeben werden, Omnium, und die einzelnen Gattungen dieser Papiere Scrip. Der Preis der Omniums wird durch den Curs der einzelnen Fonds bestimmt, und steht zur Zeit des Abschlusses eines Anleihens in der Regel über Pari, da sich keine Darleiher einfinden, wenn sie keinen Vortheil dabei haben. Der Gewinn am Preise heißt Bonus. Wenn z. B. 110 Nominal-Kapital einer gewissen Gattung dreiprocentigen Fonds für 60 Pfund Sterling, und 70 Nominal-Kapital einer andern Gattung dreiprocentiger Fonds für 40 Pfund Sterling gegeben werden, und wenn die erste Gattung der dreiprocentigen Fonds auf 57¾ (per 100 Nominal-Kapital) und die andere Gattung auf 56¼ stehen,

so giebt 110 der einen Gattung zu 57¾ . . .	$63^{21}/_{40}$	Pfund	Sterling
70 der andern „ „ 56¼ . . .	$39^{15}/_{40}$	„	„
der Werth des Omniums beträgt	$103^{36}/_{40}$	„	„
die dargeliehene Summe beträgt	100	„	„
und der Bonus ist	$3^{36}/_{40}$	„	„

Bei der monatlichen Einzahlung von 10 Procent (instalment) erhalten die Darleiher für je 100 Pfund Sterling in Geld (in Beziehung auf obiges Beispiel) zwei Scheine, welche die Inhaber veräußern dürfen, nämlich einen für die eine Gattung der dreiprocentigen Fonds und den zweiten für die andere Gattung. Diese Scheine zusammen, sind das

Staatsschuldscheine

69. Die Staatsschuldscheine können entweder auf den Namen der Darleiher, oder auf den Inhaber (au porteur) lauten. Die Interessen-Anweisungen, welche den Inhabern der Obligationen verabfolgt werden, heißen Coupons (von couper), weil mehrere solcher Anweisungen auf einen Bogen gedruckt sind, so daß die Inhaber zur Einziehung der jährlichen oder halbjährlichen Zinsen eine solche Anweisung vom Bogen abzuschneiden haben. Damit die Inhaber der Obligationen für die Zukunft der Verpflichtung überhoben werden, dieselben Behufs der Erhebung neuer Coupons bei der Staatsverwaltung einreichen zu müssen, so werden gewöhnlich bei der Ausgabe der Coupons zugleich Zinsentalons oder Anweisungen auf die in der Folge wieder zu ertheilenden Coupons ausgegeben.

Lautet die Schuldurkunde auf Inhaber, so werden derselben ebenfalls auf den Inhaber lautende Coupons beigefügt, entweder für die ganze Dauer eines in bestimmten Terminen rückzahlbaren Anleihens, oder bei solchen, die von Seiten der Gläubiger unaufkündbar und nicht in bestimmten Terminen rückzahlbar sind, für eine Reihe von Jahren, nach deren Umlauf neue Coupons ausgegeben werden. Die Zinsen der auf Namen lautenden Obligationen werden gewöhnlich gegen Vorlage gestempelter Quittungen erhoben.

Die Obligationen können auch in der Weise ausgestellt werden, daß sie für jeden Inhaber gültig sind, aber auf Verlangen des Inhabers auf dessen Namen inscribirt, auch auf andere transcribirt oder durch Aufhebung der Inscription wieder die Eigenschaft einer auf Inhaber lautenden Obligation erhalten können.

Wo, wie z. B. in Frankreich, das System der Inscriptionen oder Einschreibungen besteht, erhalten die Darleiher keine eigentlichen Schuldverschreibungen; die dargeliehenen Summen werden in das sogenannte Hauptbuch der öffentlichen

---

oben angeführte Omnium. Sind alle Zahlungen entrichtet, so werden die Scheine des Omniums von der Regierung zurückgenommen. Da diese Scheine Anweisungen auf Staatsschuldscheine sind, so nimmt der Werth des Omniums zu oder ab, je nachdem die Effecten steigen oder fallen. Während der Einzahlungszeit ist daher das Omnium ein Gegenstand der Speculation.

Schuld (grand-livre de la dette publique) eingetragen, und die Darleiher erhalten nur in Betreff der Einschreibung eine Bescheinigung (extrait d'inscription).

Bei der Zinserhebung der inscribirten Kapitalien werden, der gewöhnlichen Anordnung zufolge, die Inscriptionsscheine vorgelegt, welche sodann gestempelt werden. Die nicht am Ort der Schuldverwaltung wohnenden Inscriptionen-Besitzer müssen daher ihre Scheine in den Händen eines Bevollmächtigten daselbst lassen, oder solche demselben zur jedesmaligen Zinsenerhebung einsenden.

Da, wie aus dem Obigen ersichtlich, die Zinserhebung der Inscriptionen, namentlich in einem andern, als dem schuldenden Staate mit Weitläufigkeiten verknüpft ist, und auch die Veräußerung derselben in diesem Falle viele Förmlichkeiten mit sich bringt, so giebt es Unternehmer, welche sogenannte Certificate über Inscriptionen ausgeben. Solche, mit Coupons versehene, Certificate enthalten die von der betreffenden Behörde beglaubigte Bescheinigung, daß der entsprechende Betrag im öffentlichen Schuldbuche eingetragen ist, und nur gegen Vorzeigung des Certificats veräußert oder übertragen werden könne. So erklären z. B. die Ausgeber der Certificate über russische Inscriptionen in denselben, daß die russischen Orginalinscription von 1000 Rubel in Bankassignationen (Papiergeld) bei der holländischen Regierung deponirt sey, und daß man die Orginalinscription zu jeder Zeit gegen Auslieferung des Certificats erhalten könne. Die Certificate haben Coupons zu 30 Rubel jeder; auf der Rückseite des Coupons steht bemerkt, daß sie in Amsterdam, Berlin ꝛc. zahlbar seyen, wo man sich aber 14 Tage vor der Verfallzeit zu melden habe, alsdann werden sie mit dem Stempel des betreffenden Handelshauses (Commissionärs der Unternehmer) versehen, und nur an dem Ort des Stempels bezahlt. Die Bezahlung der Coupons wird sodann nach dem jeweiligen Wechselcurs auf Petersburg durch das Haus Hope und Comp. regulirt; nach dieser Festsetzung zahlen alsdann die betreffenden Handelshäuser nach vorhergegangener Bekanntmachung in den öffentlichen Blättern.

Solche, auf Inhaber lautende, Certificate können übrigens auch vom Staate selbst ausgegeben werden, wonach also auch die auf Inhaber lautende und mit Coupons versehene Inscrip-

tion (inscription au porteur) gegen eine auf Namen lautende Inscription (inscription nominative) umgetauscht werden kann.

Verzinsung der Schuldkapitalien.

70. Die auf den Obligationen haftenden Zinsen werden entweder jährlich, oder, was mehrentheils der Fall ist, halbjährig ausbezahlt. Weil aber viele Gläubiger kürzere Zinszahlungstermine vorziehen, so ist es in manchen Ländern den Gläubigern durch die Vertheilung der Kapitalien in verschiedene Fonds möglich gemacht, ihre Zinsen in kürzern Zeitabschnitten zu beziehen. So fallen z. B. in Frankreich die halbjährigen Rentenzahlungen der dreiprocentigen Fonds in die Mitte der halbjährigen Zinsauszahlungsperiode der fünfprocentigen Fonds.

Gelangen die Gläubiger erst nach Jahren zum Wiederbesitz ihrer dargeliehenen Kapitalien, ohne, und zwar vertraggemäß, (wie z. B. bei den meisten Lotterieanleihen) die Zinsen in der Zwischenzeit zu beziehen, so kommen ihnen begreiflicher Weise die Zinsen der nicht empfangenen Zinsen zu gut. Hier sowohl als in allen Fällen, wo es sich um die Berechnung des gegenwärtigen Werths von Kapitalien handelt, welche nach einer Reihe von Jahren fällig sind, müssen also Zinseszinsen (§. 55) in Anschlag gebracht werden.

Zinszinsrechnung.

71. Das durch Zinseszinsen in einer gegebenen Zeit angewachsene Kapital läßt sich, arithmetisch, in der Weise berechnen, daß man die Zinsen des Kapitals für ½ Jahr oder für 1 Jahr, je nachdem halbjährige oder jährliche Verzinsung bedungen ist, berechnet, die Zinsen zum Kapital addirt, von der Summe wieder die Zinsen berechnet, solche zu dieser Summe addirt u. s. w. Beträgt z. B. das Kapital 10000 Gulden und ist der bedungene Zinsfuß = 5, so ist, wenn die jährlichen Zinsen während 4 Jahren nicht entrichtet worden sind, das Kapital nach Ablauf dieser Zeit auf so viel Gulden angewachsen, als sich aus folgender Berechnung ergiebt:

Kapital	fl.	10000,00
Zinsen	„	500,00
	„	10500,00
„	„	525,00
	„	11025,00
„	„	551,25
	„	11576 25
„	„	578,82
	„	12155,07

Die Differenz 12155,07 — 10000 = 2155,07 nennt man Interusurium.

Aus dem, durch Zinseszinsen, nach Verlauf einer gewissen Zeit angewachsenen Kapital läßt sich, umgekehrt, berechnen, wie viel das dargeliehene oder ursprüngliche Kapital beträgt. In Beziehung auf obiges Beispiel kann also die Frage aufgestellt werden, welches Kapital nach 4 Jahren durch Zinseszinsen zu 5 Procent auf 12155,07 Gulden angewachsen ist.

Nach dem 4. Jahre beträgt das gesuchte Kapital 12155,07 fl.; mithin 1 Jahr früher, oder nach dem 3. Jahre so viel, als sich aus folgender Berechnung ergiebt:

105 fl. entstehen aus 100 fl.

1 fl. entsteht „ $\frac{100}{105}$ fl.

12155,07 fl. entstehen „ $\frac{12155{,}07 \times 100}{105} = 11576{,}25$ fl.

Ebenso beträgt das gesuchte Kapital wieder 1 Jahr früher, also nach dem 2. Jahre, so viel, als aus der Berechnung folgt:

105 fl. entstehen aus 100 fl.

1 fl. entsteht „ $\frac{100}{105}$ fl.

11576,25 fl. entstehen „ $\frac{11576{,}25 \times 100}{105} = 11025$ fl.

Ebenso beträgt das gesuchte Kapital wieder 1 Jahr früher, also nach dem 1. Jahre, so viel, als aus der Berechnung folgt:

105 fl. entstehen aus 100 fl.

1 fl. entsteht „ $\frac{100}{105}$ fl.

11025 fl. entstehen aus $\frac{11025 \times 100}{105} = 10500$ fl.

Und wieder 1 Jahr früher, also im Anfang, beträgt das Kapital so viel, als aus der Berechnung folgt:

105 fl. entstehen aus 100 fl.

1 fl. entsteht „ $\frac{100}{105}$ fl.

10500 fl. entstehen aus $\frac{10500 \times 100}{105} = 10000$ fl. in Uebereinstimmung mit dem Resultate der ersten Aufgabe.

Soll die Zeit bestimmt werden, nach deren Ablauf 10000 Gulden auf 12155,07 Gulden anwachsen, so hat man so lange die Zinsen auf Kapital und Zinsen zu schlagen, bis man

Soll vermittelst des ursprünglichen Kapitals, des angewachsenen Kapitals und des Zinsfußes die Zeit bestimmt werden, so muß das ursprüngliche Kapital auf die in der Tabelle angenommene Kapitaleinheit zurückgeführt werden; die Jahreszahl, welche in der Tabelle neben dem durch Berechnung bestimmten, angewachsenen Kapitale steht, ist die gesuchte Zeit; ist aber jenes Kapital in der Tabelle nicht befindlich, so wird von jenem Kapital die nächst kleinere Hülfszahl abgezogen und vermittelst des Rests und der Differenz der nächst größern und nächst kleinern Hülfszahl der Theil des Jahres berechnet.

Es sey z. B. das ursprüngliche Kapital = 1000000, das angewachsene Kapital = 2000000, und der Zinsfuß = 4; hieraus soll die Zeit bestimmt werden. Zur Zurückführung des ursprünglichen Kapitals auf die in der Tabelle angenommene Kapitaleinheit hat man die Proportion:

$$1000000 : 2000000 = 1000 : x = 2000.$$

Die gefundene Zahl 2000 ist in der Tabelle nicht befindlich; die nächstkleinere Hülfszahl ist 1947,90, und die derselben entsprechende Jahreszahl ist 17. Um nun den Theil des Jahres zu bestimmen, zieht man 1947,90 von 2000 ab; der Rest ist 52,12; ferner zieht man die nächstkleinere Hülfszahl 1947,90 von der nächstgrößern Hülfszahl 2025,82 ab; der Rest ist 77,92. Da nun der Differenz 77,92 die Zeit von 1 Jahr entspricht, so entspricht der Differenz 52,1 die aus folgender Proportion berechnete Tagezahl:

$$77{,}92 : 365 = 52{,}1 : x = 244^{201}/_{3896}.$$

Zur Bestimmung des Zinsfußes kann die Zinstabelle nur zur Untersuchung gebraucht werden, innerhalb welcher Grenzen, in ganzen Zahlen, der fragliche Zinsfuß enthalten ist.

Zinstabellen obiger Art gehen gewöhnlich nur bis zum 100ten Jahre; man kann sich derselben aber auch für jede beliebig größere Anzahl von Jahren bedienen. Man erhält die der gegebenen Zeit entsprechende Hülfszahl, wenn man die Zahl der Jahre beliebig in zwei Theile zerlegt, und die jedem Theil entsprechende Hülfszahlen mit einander multiplicirt; das Produkt getheilt durch die Kapitaleinheit giebt die zu bestimmende Hülfszahl.

Denn bezeichnet p den Zinsfuß, ist die Zahl der Jahre $= a + b = c$, das als Einheit angenommene Kapital $= f$, ist die der Zahl der Jahre a entsprechende Hülfszahl $= h$, und

die der Zahl der Jahre b entsprechende Hülfszahl $= h'$, so ist

$$(1+p)^a f = h,\ (1+p)^b f = h'$$

und $(1+p)^a f \times (1+p)^b f = (1+p)^c f^2 = hh'$;

folglich $(1+p)^c f = \frac{hh'}{f}$.

Die erste der im Anhang befindlichen Tabellen enthält die zukünftigen Werthe des Kapitals 1 zum Zinsfuße 2, 2½, 3, 3½, 4, 4½, 5, 5½, und 6 für 1 bis 100 Jahre.

73. Setzt man, allgemein genommen, k für das Kapital, p für den Zinsfuß in Beziehung auf die Kapitaleinheit 1, so daß z. B. dem Zinsfuß 5 für die Kapitaleinheit 100 der Zinsfuß $^1/_{20}$ für die Kapitaleinheit 1 entspricht, so wächst das Kapital a nach dem 1ten Jahre auf $k + kp = k(1+p)$ an, nach dem 2ten auf $k(1+p)^2$, nach dem 3ten auf $k(1+p)^3$ u. s. w., und nach dem $n$ten Jahre auf $k(1+p)^n$.

Bezeichnet man das dem $n$ten Jahre entsprechende angewachsene Kapital durch a, so hat man die Gleichung:

$$k(1+p)^n = a \quad \ldots\ldots \text{(I.)}$$

Hieraus lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$k = \frac{a}{(1+p)^n} \quad \ldots\ldots \text{(II.)}$$

$$n = \frac{log.\ a - log.\ k}{log.\ (1+p)} \quad \ldots \text{(III.)}$$

$$1 + p = \sqrt[n]{\frac{a}{k}} \quad \ldots \text{(IV.)}$$

Ist in Beziehung auf (I) $k = 1000$, $n = 3$, $1+p = \frac{21}{20} = \frac{105}{100}$, so ergiebt sich das angewachsene Kapital aus folgender Berechnung:

$$3\ log.\ 1{,}05 = 0{,}0635679$$
$$log.\ 1000 = 3{,}0000000$$
$$3{,}0635679 = log.\ 1157{,}62.$$

Ist in Beziehung auf (II) $a = 1157{,}62$, $n = 3$, $1 + p = \frac{21}{20} = \frac{105}{100}$, so ergiebt sich das ursprüngliche Kapital aus folgender Berechnung:

$$log.\ 1157{,}62 = 3{,}0635679$$
$$-\ 3\ log.\ 1{,}05 = 0{,}0635679$$
$$3{,}000000 = log.\ 1000.$$

derselben Zeit bringt, als der jährliche Zinsfuß 6, so ist $n = 2$, $p = 0{,}06$ und

$$\log.(1+p)^{\frac{1}{n}} = \frac{\log. 1{,}06}{2} = \frac{0{,}0253059}{2} = \log. 1{,}029563;$$

folglich $r = 0{,}029563$.

1000 fl. z. B. wachsen in 5 Jahren mit den Zinseszinsen zum jährlichen Zinsfuß $p = 0{,}06$ auf $1000 \times 1{,}06^5$, und zum halbjährlichen Zinsfuß $r = 0{,}029563$ in 10 halben Jahren auf $1000 \times 1{,}029563^{10}$ an. Nun ist

$$5 \log. 1{,}06 = 5 \times 0{,}0253059 = 0{,}1265295$$
$$+ \log. 1000 = 3{,}0000000$$
$$3{,}1265295 = \log. 1338{,}22$$

$$10 \log. 1{,}029563 = 10 \times 0{,}01265295 = 0{,}1265295$$
$$+ \log. 1000 = 3{,}0000000$$
$$3{,}1265295 =$$
$$\log. 1338{,}22$$

in Uebereinstimmung mit dem ersten Resultate.

Tilgungsfonds. 76. Wenn aus Staatseinkünften, oder anderweitigen Mitteln, z. B. Einnahmen aus dem Verkaufe von Domänen, jährlich ein gewisses Kapital zur allmählichen Tilgung der Staatsschulden verwendet wird, und die Zinsen der getilgten Kapitalien jenem Kapital, dem Tilgungsfonds, Amortisationsfonds oder Tilgungsstamm beigeschlagen werden, so beträgt derselbe, wenn man ihn durch a, und den Zinsfuß durch p bezeichnet, nach dem 2ten Jahre $a(1+p)$, nach dem 3ten Jahre $a(1+p)^2$, nach dem 4ten Jahre $a(1+p)^3$ und, allgemein, nach dem $n$ten Jahre $a(1+p)^{n-1}$. Denn setzt man k für das Schuldkapital, so sind die einjährigen Zinsen dieses Kapitals $= pk$; nach dem 1ten Jahre ist der Abtrag $= a$, und die Schuld $= k - a$; die Zinsen hiervon betragen $p(k-a) = pk - pa$; die Zinsenersparniß pa im zweiten Jahre wird zum Tilgungsfonds a geschlagen; mithin ist der Abtrag nach dem 2ten Jahre $= a + pa = a(1+p)$ und die Schuld $= k - a - a(1+p)$; die Interessen hiervon sind $= p[k - a - a(1+p)] = pk - p[a + a(1+p)]$; die Zinsenersparniß $p[a + a(1+p)]$ wird zum Tilgungsfonds a geschlagen, und mithin ist nach dem 3ten Jahre der Abtrag $= a + p[a + a(1+p)] = a(1 + 2p + p^2) = a(1+p)^2$, und die Schuld $k - a - a(1+p) -$

$a(1+p)^2$; die Interessen hiervon sind $p[k-a-a(1+p)-a(1+p)^2]$; die Zinsersparniß ist $= p[a+a(1+p)+a(1+p)^2]$; der Abtrag ist daher nach dem 4ten Jahre $= a+p[a+a(1+p)+a(1+p)^2] = a(1+3p+3p^2+p^3) = a(1+p)^3$, und, nach dem $n$ten Jahre $= a(1+p)^{n-1}$.

Hieraus läßt sich berechnen, in welcher Zeit der um die Zinsen der getilgten Kapitalien vermehrte Tilgungsfonds auf ein gegebenes Vielfaches des ursprünglichen Tilgungsfonds steigt. Will man wissen, in wie viel Jahren der Tilgungsfonds auf das $t$fache gestiegen ist, so hat man die Gleichung $a(1+p)^n = ta$, oder $(1+p)^n = t$

woraus $n = \frac{log.\ t}{log.\ (1+p)}$

Für $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, $t = 10$ ist $n = \frac{log.\ 10}{log.\ 1{,}05} = \frac{1}{0{,}0211893} = 47\frac{41029}{211893}$.

Da dem Exponenten $n-1$ die Anzahl n der Jahre entspricht, so ist nach obiger Berechnung der Tilgungsfonds 1 auf 10, oder der Tilgungsfonds a auf 10 a in $248\frac{41029}{211893}$ Jahren gestiegen.

Für $t = 2, = 3, = 4, = 5, = 6, = 7, = 8, = 9, = 10, = 131$ ist, wenn man die Brüche wegläßt, beziehlich $n = 14, = 22, = 28, = 32, = 36, = 39, = 42, = 45, = 47, = 99$.

Hiernach wächst bei einem Zinsfuße von 5 Procent der Tilgungsfonds ungefähr in

15	Jahren	um	den	1fachen,		also	auf	den	2fachen		Betrag
23	"	"	"	2	"	"	"	"	3	"	"
29	"	"	"	3	"	"	"	"	4	"	"
33	"	"	"	4	"	"	"	"	5	"	"
37	"	"	"	5	"	"	"	"	6	"	"
40	"	"	"	6	"	"	"	"	7	"	"
43	"	"	"	7	"	"	"	"	8	"	"
46	"	"	"	8	"	"	"	"	9	"	"
48	"	"	"	9	"	"	"	"	10	"	"
100	"	"	"	130	"	"	"	"	131	"	"

Planmäßige Tilgung.

77. In Beziehung auf die Herleitung im §. 76 beträgt die Schuld nach dem 1ten Jahre $k - a$, nach dem 2ten Jahre $k - [a + a(1+p)]$, nach dem 3ten Jahre $k - [a + a(1+p) + a(1+p)^2]$, nach dem 4ten Jahre $k - (a + a(1+p) + a(1+p)^2 + a(1+p)^3]$, und, allgemein, nach dem $n$ten Jahre

$$k - [a + a(1+p) + a(1+p)^2 + a(1+p)^3 + \ldots . a(1+p)^{n-1}] =$$
$$k - a[1 + (1+p) + (1+p)^2 + (1+p)^3 + \ldots . (1+p)^{n-1}] =$$
$$k - \frac{a[(1+p)^n - 1]}{p}.$$

Ist die Schuld getilgt, so ist

$$k - \frac{a[(1+p)^n - 1]}{p} = 0, \text{ woraus}$$

$$n = \frac{log.\ \frac{pk+a}{a}}{log.\ (1+p)}$$

So ist z. B. in ganzen Zahlen, für $k = 200$, $a = 1$

zum Zinsfuß 5, $n = 49$
" " 4, $n = 56$
" " 3, $n = 66$;
für $k = 100$, $a = 1$
zum Zinsfuß 5, $n = 36$
" " 4, $n = 41$
" " 3, $n = 46$;
für $k = 60$, $a = 1$
zum Zinsfuß 5, $n = 28$
" " 4, $n = 31$
" " 3, $n = 34$;
für $k = 50$, $a = 1$
zum Zinsfuß 5, $n = 25$
" " 4, $n = 28$
" " 3, $n = 30$.

Für $k = 12577880$, $a = 1000000$ und $p = \frac{5}{100}$ erhält man $n = 9{,}99$, wofür man 10 Jahre annehmen kann. Die jährlichen Zinsen vom Kapital 12577880 zu 5 Procent betragen 628894 fl.; soll nun jährlich so viel als Zinsfonds und außerdem ein jährlicher Fonds von 1000000 fl. zur Tilgung verwendet werden, so ist der entsprechende Tilgungsplan wie folgt:

Jahre.	Zinsen.	Abtrag.	An Zinsen erübrigt.	Schuld.
	fl.	fl.	fl.	fl.
1	628894	1000000	—	11577880
2	578894	1000000 50000 1050000	50000	10527880
3	526394	1000000 102500 1102500	102500	9425380
4	471269	1000000 157625 1157625	157625	8267755
5	413387,75	1000000 215506 1215506	215506,25	7052249
6	352612,45	1000000 276281 1276281	276281,55	5775968
7	288798,40	1000000 340095 1340095	340095,60	4435873
8	221793,65	1000000 407100 1407100	407100,35	3028773
9	151438,65	1000000 477455 1477455	477455,35	1551318
10	77565,90	1000000 551328 1551328	551328,10	

Aus dem im Obigen hergeleiteten allgemeinen Ausdruck für die Größe der restirenden Schuld

$$k - \frac{a[(1+p)^n - 1}{p}$$

läßt sich auch bestimmen, in welcher Zeit das anfängliche Schuldkapital auf einen gegebenen Theil t desselben reducirt wird. Aus der Gleichung

$$k - \frac{a[(1+p)^{n-1}]}{p} = tk$$

ergiebt sich

$$n = \frac{log.\ \frac{pk(1-t)+a}{a}}{log.\ (1+p)}$$

Freie Tilgungsweise.

78. Weil der Tilgungsfonds gewöhnlich in einem solchen Verhältniß zur Schuld steht, daß erst nach einer langen Reihe von Jahren die Schuld getilgt werden kann, so ist es unwahrscheinlich, daß nicht im Verlaufe der Zeit ungünstige Umstände eintreten sollten, die den Fortgang der Tilgung unterbrechen, weßhalb ein strenges Einhalten des Tilgungsplans nicht zu erwarten ist, und eine freie Tilgungsweise, im Gegensatze der planmäßigen Tilgung, als zweckmäßiger erscheint. Erstere besteht darin, daß man die Zinsen der eingelösten, also erloschenen Obligationen, nicht mehr berücksichtigt, und mithin nur für die Deckung der laufenden Zinsen Sorge trägt, und außerdem zur jährlichen Verminderung der Schuld so viel verwendet, als es die Umstände gerade gestatten. Immerhin bleibt es indessen zweckmäßig, als Voranschlag einen Tilgungsplan zu entwerfen; für jede Etatsperiode kann derselbe modificirt werden, und auch wohl während längerer Zeit, wenn die Mittel dazu vorhanden sind, entweder in seiner ursprünglichen oder in modificirter Art fortbestehen.

Controlle für die Tilgung einer Schuld.

79. Mögen übrigens die jährlichen oder überhaupt in gleichen Terminen gemachten Zahlungen jeweils mehr oder weniger als der Zinsbetrag des jeweiligen Stands des Schuldkapitals betragen, so muß, wenn die Schuld getilgt ist, die Summe der, mit Berücksichtigung der Zinseszinsen zum Zinsfuß des Anleihens berechneten, gegenwärtigen Werthe der terminlichen Zahlungen für Kapitalbetrag und Verzinsung dem Schuldkapital gleich seyn. Dieß läßt sich wie folgt beweisen.

Bezeichnet k das Kapital, werden ferner die terminlichen, z. B. jährlichen Zahlungen, welche entweder

1) mehr betragen, wie die auf dem Kapital haftenden Interessen, in welchem Falle ein Kapitalabtrag stattgefunden hat, oder

2) gerade so viel, wie die Interessen betragen, in welchem Falle zur betreffenden Zeit kein Kapitalabtrag stattgefunden hat, oder endlich

3) weniger als die Interessen des jeweiligen Stands der Schuld betragen

durch z, z_2, z_3 u. s. w. bezeichnet, und ist der Stand der Schuld zu Ende des 1ten Jahres k_1, zu Ende des 2ten Jahres k_2, und so fort zu Ende des vorletzten Jahres der Tilgung k_{n-1}, so hat man, unter der Voraussetzung, daß die Schuld zu Ende des $n$ten Jahres getilgt ist und für den Zinsfuß p folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
k & (1+p)-z_1 & =k_1\\
k_1 & (1+p)-z_2 & =k_2\\
k_2 & (1+p)-z_3 & =k_3\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
k_{n-3} & (1+p)-z_{n-2} & =k_{n-2}\\
k_{n-2} & (1+p)-z_{n-1} & =k_{n-1}\\
k_{n-1} & (1+p)-z_n & =0
\end{array}$$

Nach der letzten dieser Gleichungen ist

$$k_{n-1}=\frac{z_n}{1+p}$$

Substituirt man diesen Werth von k_{n-1} in die vorletzte der obigen Gleichungen, so erhält man

$$k_{n-2}=\frac{z_{n-1}}{1+p}+\frac{z_n}{(1+p)^2}$$

Substituirt man diesen Werth von k_{n-2} in die drittletzte oder $(n-2)$te der obigen Gleichungen, so erhält man

$$k_{n-3}=\frac{z_{n-2}}{1+p}+\frac{z_{n-1}}{(1+p)^2}+\frac{z_n}{(1+p)^3}$$

Substituirt man diesen Werth von k_{n-3} in die $(n-3)$te der obigen Gleichungen, so erhält man

$$k_{n-4}=\frac{z_{n-3}}{1+p}+\frac{z_{n-2}}{(1+p)^2}+\frac{z_{n-1}}{(1+p)^3}+\frac{z_n}{(1+p)4}$$

Hieraus folgt, daß

$$k=\frac{z_1}{1+p}+\frac{z_2}{(1+p)^n}+\frac{z_3}{(1+p)^3}+\cdots\cdots\frac{z_n}{(1+p)^n}$$

*) Der von uns aufgestellte Beweis läßt sich auf den (freilich in der Praxis nicht vorkommenden) Fall ausdehnen, daß in jedem Jahre

Setzen wir den Fall, daß die Zinsen des Kapitals halbjährlich entrichtet werden, und daß zu Ende jedes Jahres ein Kapitalabtrag stattfindet, so hat man, wenn q den Semestralzinsfuß bezeichnet, (und also $= \frac{p}{2}$ ist, wenn p den Jahreszinsfuß bezeichnet), und wenn die Zinszahlung des 1ten Semesters durch z, ferner Zinszahlung und Kapitalabtrag des 2ten Semesters oder 1ten Jahres durch z_2, eben so die Zinszahlung des 3ten Semesters durch z_3 und Zinszahlung und Kapitalabtrag des 4ten Semesters oder 2ten Jahres durch z_4 u. s. w. bezeichnet werden, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
k\,(1+q) - z_1 &= k\\
k\,(1+q) - z_2 &= k_1\\
k_1\,(1+q) - z_3 &= k_1\\
k_1\,(1+q) - z_4 &= k_2\\
k_2\,(1+q) - z_5 &= k_2\\
k_2\,(1+q) - z_6 &= k_3\\
&\vdots\\
k_{n-3}\,(1+q) - z_{n-4} &= k_{n-2}\\
k_{n-2}\,(1+q) - z_{n-3} &= k_{n-2}\\
k_{n-2}\,(1+q) - z_{n-2} &= k_{n-1}\\
k_{n-1}\,(1+q) - z_{n-1} &= k_{n-1}\\
k_{n-1}\,(1+q) - z_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$$k_{n-1} = \frac{z_n}{1+q}$$

$$k_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{1+q} + \frac{z_n}{(1+q)^2}$$

$$k_{n-2} = \frac{z_{n-2}}{1+q} + \frac{z_{n-1}}{(1+q)^2} + \frac{z_n}{(1+q)^3}$$

$$k_{n-2} = \frac{z_{n-3}}{1+q} + \frac{z_{n-2}}{(1+q)^2} + \frac{z_{n-1}}{(1+q)^3} + \frac{z_n}{(1+q)^4}$$

$$\vdots$$

$$k = \frac{z_1}{1+q} + \frac{z_2}{(1+q)^2} + \frac{z_3}{(1+q)^3} + \ldots\ldots \frac{z_n}{(1+q)^n}$$

---

die Verzinsung nach einem andern Zinsfuße stattfindet. Wird der Zinsfuß für das 1te, 2te, 3te ..... nte Jahr beziehlich durch $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ bezeichnet, so ist

$$k = \frac{z_1}{1+p_1} + \frac{z_2}{(1+p_1)(1+p_2)} + \frac{z_3}{(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)} + \ldots\ldots + \frac{z_n}{(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)\ldots\ldots(1+p^n)}$$

Wenn also die Zinsen halbjährlich entrichtet werden, und dagegen jährlich ein Kapitalabtrag stattfindet, so muß bei der Berechnung der gegenwärtigen Werthe sämmtlicher Zahlungen an Zins und Kapitalabtrag für letztern nicht nach Jahren, sondern, wie für die halbjährlichen Zinszahlungen, nach Halbjahren gerechnet werden.

Tilgungsarten.

80. Was die Tilgung selbst betrifft, so geschieht sie entweder durch Heimzahlung der verschriebenen Kapitalien, also durch Einlösung der Obligationen nach ihrem Nominalwerthe, und zwar auf dem Wege der Verlosung, weil eine willkührliche Bestimmung derjenigen Obligationen, welche eingelöst werden sollen, unstatthaft wäre; oder aber durch Rückkauf der Obligationen nach dem Börsenpreise, und zwar in freier, öffentlicher Mitbewerbung der Verkäufer. Stehen die Obligationen unter ihrem Nominalwerthe, d. h. zahlt man für irgend eine, im Handel angenommene Einheit des verschriebenen Kapitals, gewöhnlich Hundert, weniger als Hundert, so ist der Rückkauf vortheilhafter als die Einlösung nach dem Nominalwerthe. Steht dagegen der Curs so hoch, daß der Staat mehr geben muß, als er bei der Begebung der Obligationen erhalten hat, so ist der Rückkauf nachtheilig.

Zurückführung eines, einem gegebenen Zinsfuße und Tilgungsplane entsprechenden Anleihens auf ein anderes, welches einem andern Zinsfuße, aber dem nämlichen Tilgungsplane entspricht.

81. Weil die Summe der gegenwärtigen Werthe der Abtragszahlungen und Zinsen dem Schuldkapital gleich ist (§. 79), so ist letzteres in dieser Beziehung eine Function vom Zinsfuß. Wenn nun der Staat ein gewisses Kapital zum Zinsfuß p aufnehmen will, so kann die Frage aufgeworfen werden, wie viel sich derselbe für die Verschreibung eines eben so großen Kapitals muß geben lassen, wenn ein anderer Zinsfuß q, welcher größer oder kleiner als p ist, ausbedungen wird, und wenn die Schuld mit den beim Zinsfuß p angenommenen Zahlungen getilgt werden soll.

Ist k das aufzunehmende Kapital, und sind z_1, z_2, z_3 u. s. w. die jährlichen Zahlungen für Kapitalabtragung und Verzinsung zum Zinsfuß p, so ist

$$k = \frac{z_1}{1+p} + \frac{z_2}{(1+p)^2} + \frac{z_3}{(1+p)^3} + \ldots \frac{z_n}{(1+p)^n}$$

Nun sind die Zahlungen z_1, z_2, z_3 u. s. w. auf ihren gegenwärtigen Werth zum andern Zinsfuß q zurückzuführen, um das diesem Zinsfuß entsprechende Kapital zu bestimmen. Ist

$q < p$, so ist $\frac{z_1}{1+q} > \frac{z_1}{1+p}$, $\frac{z_2}{(1+q)^2} > \frac{z_2}{(1+p)^2}$ u. s. w.; bezeichnet man daher den gesuchten Kapitalwerth durch $k + l$, so ist

$$k + l = \frac{z_1}{1+q} + \frac{z_2}{(1+q)^2} + \frac{z_3}{(1+q)^3} + \cdots \frac{z_n}{(1+q)^n}$$

Ist z. B. $z_1 = 24000$, $z_2 = 33200$, $z_3 = 42000$, $z_4 = 10400$ und $p = 0{,}04$, so ist $k = 100000$, und für $q = 0{,}03$ ist $k + l = 102289$, in Uebereinstimmung mit folgenden Tilgungsplänen:

Kapital	100000	Kapital	102289
Zinsen zu 4 Procent	4000	Zinsen zu 3 Procent	3066
	104000		105346
ab	24000	ab	24000
	80000		81436
Zinsen	3200	Zinsen	2439
	83200		83784
ab	33200	ab	33200
	50000		50585
Zinsen	2000	Zinsen	1515
	52000		52199
ab	42000	ab	42000
	10000		10100
Zinsen	400	Zinsen	300
	10400		10400
ab	10400	ab	10400
	0		0

Hiernach ist es einerlei, ob der Staat für verschriebene 100000 fl, welche er zu 4 Procent verzinst, 100000 fl. erhält, oder ob er für 102280 fl., welche er zu 3 Procent verzinslich verschreibt, eben so viel erhält, weil ein zu 4 Procent verzinsliches Schuldkapital von 100000 fl. und ein zu 3 Procent verzinsliches Schuldkapital von 102280 fl. durch die angegebenen Kapitalabtragungen getilgt wird.

Der Curs, d. h. der Preis für die eingeführte Einheit 100 des Schuldkapitals ergiebt sich für obiges Beispiel aus der Proportion:

$$102280 : 100000 = 100 : x = 97{,}77$$

Oder, allgemein,

$$k+l:k=100:x=\frac{100k}{k+l}=100\,\frac{z_1(1+p)^{-1}+z_2(1+p)^{-2}+z_3(1+p)^{-3}+\ldots z_n(1+p)^{-n}}{z_1(1+q)^{-1}+z_2(1+q)^{-2}+z_3(1+q)^{-3}+\ldots z_n(1+q)^{-n}}$$

Sind die Abtragssummen von gleicher Größe, so ist

$$k=\frac{z}{p}\left(1-\frac{1}{(1+p)^n}\right)=\frac{z}{p}\times\frac{(1+p)^n-1}{(1+p)^n}\text{ und }k+l=\frac{z}{q}\times\frac{(1+q)^n-1}{(1+q)^n};$$

Für diese Annahme ist

$$x=\frac{100k}{k+l}=100\times\frac{q(1+q)^n[(1+p)^n-1]}{p(1+p)^n[(1+q)^n-1]}$$

Nach dieser Gleichung hängt die Bestimmung des Curses nicht vom Kapital, sondern nur von der Tilgungszeit und den beiden Zinsfüßen ab. Nimmt man in Beziehung auf diese Gleichung an, daß n unendlich groß ist, so wird $(1+p)^n-1=(1+p)^n$ und $(1+q)^n-1=(1+q)^n$; daher $x=\frac{100q}{p}$.

Dieser Curs entspricht also der Annahme, daß das Kapital nie getilgt, sondern nur verzinst wird. Ist z. B. $p=4$ und $q=3$, so ist $x=75$. Für den Staat kann es also unter der obigen Voraussetzung einerlei seyn, ob er für 100 fl. in 4-procentigem Papier 100 fl., oder für 100 fl. in 3-procentigem Papier 75 fl. erhält, denn wenn er für je 75 fl, die er aufnimmt, 3 fl. Zins zahlt, so entspricht dieser Zins ebenfalls dem Zinsfuß 4.

In Beziehung auf obige Annahmen für den Werth von n kann man weiter folgern, daß sich, für gleiche Abtragssummen und für den Fall, daß $q<p$, der Curs um so niedriger stellt, je größer die Anzahl der Jahre ist, binnen welchen die die Schuld getilgt werden soll.

Ist z. B. $p=4$, $q=3$ und $n=20$, so ist

$$x=100\times\frac{0{,}03\times1{,}03^{20}(1{,}04^{20}-1)}{0{,}04\times1{,}04^{20}(1{,}03^{20}-1)}=91{,}35.$$

Ist dagegen $n=100$, so ist

$$x=100\times\frac{0{,}03\times1{,}03^{100}(1{,}04^{100}-1)}{0{,}04\times1{,}04^{100}(1{,}03^{10}-1)}=77{,}55,$$ also kleiner als im vorigen Falle.

Ist $q > p$, so ist $\frac{z_1}{1+q} < \frac{z_1}{1+p}\ \frac{z_2}{(1+q)^2} < \frac{z_2}{(1+p)^2}$ u. s. w.; in diesem Falle ist der gesuchte Kapitalwerth kleiner als k. Wird derselbe durch $k - l$ bezeichnet, so ist

$$k - l = \frac{z_1}{1+q} + \frac{z_2}{(1+q)^2} + \frac{z_3}{(1+q)^3} + \ldots\ldots \frac{z_n}{(1+q)^n}$$

und der Curs $x = \frac{100\,k}{k-l} = \frac{z_1(1+p)^{-1} + z_2(1+p)^{-2} + \ldots . z_n(1+p)^{-n}}{z_1(1+q)^{-1} + z_2(1+q)^{-2} + \ldots . z_n(1+q)^{-n}}$

Ist $z_1 = z_2 = z_3$ u. s. w., so ist

$$x = 100 \times \frac{q(1+q)^n[(1+p)^n - 1]}{p(1+p)^n[(1+q)^n - 1]},$$ wie vorher.

Unter der Voraussetzung, daß die jährlichen Zahlungen für Kapitalabtrag und Interessen von gleicher Größe sind, läßt sich weiter folgern, daß sich der Curs um so höher stellt, je größer die Anzahl der Jahre ist, binnen welchen die Schuld getilgt wird.

Ist z. B. $p = 3$, $q = 4$ und $n = 20$, so ist

$$x = 100 \times \frac{0{,}04 \times 1{,}04^{20}(1{,}03^{20} - 1)}{0{,}03 \times 1{,}03^{20}(1{,}04^{20} - 1)} = 109{,}47.$$

Wird hiernach 3-procentiges Papier zu 100 begeben, so müßte für 4-procentiges Papier 109,47 gegeben werden.

Nach dem für den ersten Fall, (daß $q < p$) im Obigen aufgestellten Beispiel ist es in Beziehung auf die Tilgungszeit von 20 Jahren einerlei, ob der Staat 100 fl. in 4-procentigem Papier für 100 fl., oder 100 fl. in 3-procentigem Papier für 91,35 fl. hergiebt. Will der Staat zum Curs 91,35 auf 3-procentiges Papier 1000000 fl. aufnehmen, so muß er so viel verschreiben, als aus der Proportion folgt:

$$91{,}35 : 100 = 1000000 : x = 1084690 \text{ fl.}$$

Hätte der Staat für 1000000 fl. in 4-procentigem Papier 1000000 fl. erhalten, so hätte er, um die Schuld in 20 Jahren zu tilgen, nach der Formel $z = \frac{p\,k(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$

$$\frac{0{,}04 \times 1000000 \times 1{,}04^{20}}{1{,}04^{20} - 1} = 73582$$

jährlich zu zahlen. Und wenn er 1094690 fl. in 3-procentigem Papier verschreibt, so muß er jährlich

$$\frac{0{,}03 \times 1094690 \times 1{,}03^{20}}{1{,}03^{20} - 1} = 73581$$

zahlen, was wegen Vernachläßigung von Brüchen bis auf beiläufig 1 fl. mit dem Resultate der für den Zinsfuß 4 angestellten Berechnung übereinstimmt.

Parität der Curse für Anleihen von verschiedenem Zinsfuße.

82. Der Curs P für ein zum Zinsfuß p verzinsliches Anleihen, und der Curs Q für ein zum Zinsfuß q verzinsliches Anleihen können in einem solchen Verhältniß zu einander stehen, daß es für den Staat einerlei ist, ob das eine Anleihen zum Curs P, oder das andere Anleihen zum Curs Q geschlossen wird.

Nehmen wir z. B. an, daß 4-procentiges Papier zum Curs 99 begeben wird, und daß 10000 fl. aufgenommen werden sollen. Zu dem Ende müssen so viel Gulden verschrieben werden, als aus der Proportion folgt:

$$99 : 100 = 10000 : x = 10101.$$

Der Tilgungsplan sey nun wie folgt:

Kapital	10101
Zinsen zu 4 Procent	404
	10505
ab	3505
	7000
Zinsen	280
	7280
ab	4280
	3000
Zinsen	120
	3120
ab	3120
	0

Die gegenwärtigen Werthe der Abtragszahlungen 3505, 4280 und 3120 zum Zinsfuß 3 berechnet, betragen zusammen:

$$\frac{3505}{1{,}03} + \frac{4280}{1{,}03^2} + \frac{3120}{1{,}03^3} = 10292{,}41$$

Soll man nun für 10292,41 fl. in 3-procentigem Papier ebenfalls 10000 fl. erhalten, so ergiebt sich der entsprechende Curs aus der Proportion:

$$10292{,}41 : 10000 = 100 : x = 97{,}15.$$

Der Curs 97,15 für das 3-procentige Papier bildet nun eine Parität mit dem Curs 99 für das 4-procentige Papier.

Denn um 10000 fl. aufzunehmen, müßte man so viel Gulden in 3-procentigem Papier verschreiben, als aus der Proportion folgt:

$$97{,}15 : 100 = 10000 : x = 10292{,}41$$

und dieses Schuldkapital wird ebenfalls durch die Abtragszahlungen 3505, 4280 und 3120 nach obiger Berechnung getilgt, wie zur Controlle derselben aus folgendem Tilgungsplan weiter zu ersehen:

Kapital	10292,41
Zinsen zu 3 Procent	308,76
	10601,17
ab	3505,00
	7096,17
Zinsen	212,78
	7308,95
ab	4280,00
	3028,95
Zinsen	90,84
	3119,79
ab	3120,00
	0

Ist, allgemein, k das aufzunehmende Kapital, p der eine Zinsfuß und P der entsprechende Curs, so ergiebt sich der Nominalwerth von k, d. h. das zu verschreibende Kapital aus der Proportion:

$$P : 100 = k : x = \frac{100\,k}{P}$$

Sind z_1, z_2, z_3, u. s. w. die jährlichen Zahlungen, so ist

$$k = \frac{z_1}{1+p} + \frac{z_2}{(1+p)^2} + \frac{z_3}{(1+p)^3} + \ldots\ldots \frac{z_n}{(1+p)^n}$$

Wird der andere Zinsfuß durch q bezeichnet, und werden die jährlichen Zahlungen z_1, z_2, z_3, u. s. w. nach diesem Zinsfuß auf ihrem gegenwärtigen Werth zurückgeführt, so ist derselbe $>$ oder $<$ als k, je nachdem $q <$ oder $>$ als p ist. Bezeichnet man die Summe dieser gegenwärtigen Werthe durch S, so ist

$$S = \frac{z_1}{1+q} + \frac{z_2}{(1+q)^2} + \frac{z_3}{(1+q)^3} + \ldots\ldots \frac{z_n}{(1+q)^n}$$

Der mit dem Curs P eine Parität bildende Curs Q ergiebt sich demnach aus der Proportion:

$$S : k = 100 : Q = \frac{100\,k}{S}$$

Anwendung der Berechnung der Curspartität.

83. Die Berechnung der Parität findet ihre Anwendung: 1) wenn es bei der Negocirung eines zu einem gewissen Zinsfuß verzinslichen Anleihens den Uebernehmern frei gestellt wird, einen Theil des Anleihens in einem zu einem andern Zinsfuß verzinslichen Papiere zu verlangen;

2) wenn unter mehreren, auf Papiere von verschiedenem Zinsfuße erfolgten Angeboten das vortheilhafteste Angebot ausgemittelt werden soll.

So heißt es z. B. in Beziehung auf den ersten Fall in einer nachträglichen Bekanntmachung vom 24. September 1842 über die Aufnahme des großherzogl. badischen Eisenbahn-Anleihens: (Art. 2). „Wenn ein Concurrent den Zuschlag für 3½-procentige Partial-Obligationen erhalten hat, so steht es ihm frei, auch für einen Theil des Anleihens und zwar für ein Drittheil, die Hälfte oder zwei Drittheile desselben 4-procentige Partial-Obligationen zu verlangen, in so fern er sich die Bestimmung des Nominal-Kapitals dafür in der Größe gefallen läßt, daß dasselbe mit der nämlichen Gesammtleistung der Eisenbahnschuldentilgungs-Kasse, wie bei der Ueberlassung von 3½-procentigen Partial-Obligationen, verzinst und abgetragen werden kann."

In Beziehung auf die andere Veranlassung zur Berechnung der Parität der Curse wollen wir annehmen, daß ein Staat ein Anleihen von 1980000 fl. machen, und in 40 Jahren durch jährliche gleiche Zahlungen abtragen will. Ein Soumittent bietet 86 fl. für 100 fl. in 3-procentigem Papier, und ein anderer Soumittent bietet 99 fl. für 100 fl. in 4-procentigen Papier an. Es fragt sich, welches Angebot das vortheilhaftere ist.

Um 1980000 fl. für 4-procentiges Papier zum Curs 99 zu erhalten, muß der Staat so viel verschreiben, als aus der Proportion folgt:

$$99 : 100 = 1980000 : x = 2000000.$$

Soll nun das Anleihen durch gleiche jährliche Zahlungen nach dem Zinsfuß 4 in 40 Jahren getilgt seyn, so ist der Betrag der jährlichen Zahlung (§. 81)

$$\frac{0{,}04 \times 2000000 \times 1{,}04^{40}}{1{,}04^{40} - 1} = 101047.$$

Die Summe der gegenwärtigen, zum Zinsfuß 3 berechneten Werthe dieser jährlichen Zahlungen ist

$$101047\left(\frac{1}{1,03}+\frac{1}{1,03^2}+\ldots\ldots\frac{1}{1,03^{40}}\right)=$$

$$\frac{101047}{0,03}\left(1-\frac{1}{1,03^{40}}\right)=2335700$$

Der mit dem Curs 99 des 4-procentigen Papiers eine Parität bildende Curs des 3-procentigen Papiers ergiebt sich demnach aus der Proportion:

$$2335700 : 1980000 = 100 : x = 84,77.$$

Ist nun, wie oben angenommen worden ist, das Angebot für das 3-procentige Papier 86, und für das 4-procentige Papier 99, so ist ersteres Angebot das vortheilhaftere; denn hätte man für das 3-procentige Papier 84,77 und für das 4-procentige Papier 99 angeboten, so wäre das eine Angebot so annehmbar wie das andere.

Geht man bei der Berechnung der Parität vom Angebot 86 für 3-procentiges Papier aus, so ergiebt sich für ein Anleihen von 1980000 fl. der entsprechende Nominalwerth aus der Proportion:

$$86 : 100 = 1980000 : x = 2302325.$$

Der Betrag der jährlichen Zahlungen ist

$$\frac{0,03\times 2302325\times 1,03^{40}}{1,03^{40}-1}=99604$$

Die Summe der gegenwärtigen, zum Zinsfuß 4 berechneten Werthe dieser jährlichen Zahlungen ist $\frac{99604}{0,04}\left(1-\frac{1}{1,04^{40}}\right)$ $= 1971462$. Der gesuchte Curs ergiebt sich aus der Proportion:

$$1971462 : 1980000 = 100 : x = 100,43$$

Die Curse 86 für 3-procentiges, und 100,43 für 4-procentiges Papier bilden demnach eine Parität; weil aber für 3-procentiges Papier 86 und für 4-procentiges Papier 99 angeboten ist, so ist, in Uebereinstimmung mit der ersten Berechnung, das Angebot 86 das vortheilhaftere.

84. In den Beispielen im vorigen §. sind die Tilgungen beliebig angenommen worden. Wir haben nun noch die Berechnung der Cursparitäten auf solche Anleihen anzuwenden, deren Tilgungsfonds nach einem beliebigen Gesetz fortschreitet.

Damit die jährlichen Kapitalabtragungen im gehörigen Verhältniß zum Schuldkapital zu stehen kommen, so ist es nöthig, für den Kapitalabtrag des ersten Jahres einen bestimmten Theil des Kapitals anzunehmen, und diesen ersten Kapitalabtrag für die nachfolgenden Jahre nach einem bestimmten Verhältnisse fortschreiten zu lassen. Ist nun k das Kapital, und soll im ersten Jahre f von 1 (also $100f$ Procent) abgetragen werden, und der entsprechende Kapitalabtrag jährlich um g von 1 (also um $100g$ Procent) zunehmen, so ist der Kapitalabtrag zu Ende des

$$\begin{aligned}
&1\text{ten Jahres} = fk\\
&2\text{ten} \quad " \quad = fk(1+g)\\
&3\text{ten} \quad " \quad = fk(1+g)^2\\
&\vdots\\
&n\text{ten} \quad " \quad = fk(1+g)^{n-1}
\end{aligned}$$

Ist die Schuld getilgt, so ist $k = fk(1 + 1 + g + (1+g)^2 + (1+g)^3 + \ldots (1+g)^{n-1}) = \frac{fk}{g}\left[(1+g)^n - 1\right]$.

Vom Kapital ist demnach abgetragen zu Ende

$$\begin{aligned}
&\text{des 1ten Jahres} \frac{fk}{g}\left[(1+g) - 1\right]\\
&" \quad 2\text{ten} \quad " \quad \frac{fk}{g}\left[(1+g)^2 - 1\right]\\
&" \quad 3\text{ten} \quad " \quad \frac{fk}{g}\left[(1+g)^3 - 1\right]\\
&\vdots\\
&" \quad n\text{ten} \quad " \quad \frac{fk}{g}\left[(1+g)^n - 1\right]
\end{aligned}$$

Mithin beträgt die Schuld zu Ende

$$\begin{aligned}
&\text{des 1ten Jahres } k - \frac{fk}{g}\left[(1+g) - 1\right]\\
&" \quad 2\text{ten} \quad " \quad k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^2 - 1\right]\\
&" \quad 3\text{ten} \quad " \quad k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^3 - 1\right]\\
&\vdots\\
&(n-1)\text{ten} \quad " \quad k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1} - 1\right]
\end{aligned}$$

Die jährlichen Zinszahlungen zum Zinsfuß p sind daher für das

1te Jahr

2te „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)p$

3te „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)p$

$\vdots$

$n$te „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1}-1\right]\right)p$

Die jährlichen Zahlungen für Kapitalabtrag und Zinsen betragen demnach zu Ende des

1ten Jahres $pk + fk$

2ten „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)p + fk\,(1+g)$

3ten „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)p + fk\,(1+g)^2$

4ten „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^3-1\right]\right)p + fk\,(1+g)^3$

$\vdots$

$n$ten „ $\left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1}-1\right]\right)p + fk(1+g^{n-1}$

Oder, für das

1te Jahr $pk + fk$

2te „ $pk - \frac{pfk}{g}(1+g) + \frac{pfk}{g} + fk\,(1+g)$

3te „ $pk - \frac{pfk}{g}(1+g)^2 + \frac{pfk}{g} + fk\,(1+g)^2$

4te „ $pk - \frac{pfk}{g}(1+g)^3 + \frac{pfk}{g} + fk\,(1+g)^3$

$\vdots$

$n$te „ $pk - \frac{pfk}{g}(1+g)^{n-1} + \frac{pfk}{g} + fk\,(1+g)^{n-1}$

Führt man nun die jährlichen Zahlungen zum Zinsfuß m auf ihren gegenwärtigen Werth zurück, so wird die Summe S derselben ausgedrückt durch

$$S = pk(1+m)^{-1} + fk\,(1+m)^{-1}$$
$$+ \; pk(1+m)^{-2} - \frac{pfk}{g}(1+g)(1+m)^{-2} + \frac{pfk}{g}$$
$$(1+m)^{-2} + fk\,(1+g)(1+m)^{-2}$$

$$+ pk(1+m)^{-3} - \frac{pfk}{g}(1+g)^2(1+m)^{-3} + \frac{pfk}{g}$$
$$(1+m)^{-3} + fk(1+g)^2(1+m)^{-3}$$
$$\vdots$$
$$+ pk(1+m)^{-n} - \frac{pfk}{g}(1+g)^{n-1}(1+m)^{-n} + \frac{pfk}{g}$$
$$(1+m)^{-n} + fk(1+g)^{n-1}(1+m)^{-n}$$
$$= pk\left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1}{(1+m)^3} + \cdots \frac{1}{(1+m)^n}\right)$$
$$- \frac{pfk}{g}\left(\frac{1+g}{(1+m)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^3} + \frac{(1+g)^3}{(1+m)^4} + \ldots . \right.$$
$$\left. \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^n}\right)$$
$$+ \frac{pfk}{g}\left(\frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1}{(1+m)^3} + \frac{1}{(1+m)^4} + \ldots . \right.$$
$$\left. \frac{1}{(1+m)^n}\right)$$
$$+ fk\left(\frac{1}{1+m} + \frac{1+g}{(1+m)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^3} + \ldots . . \right.$$
$$\left. \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^n}\right)$$
$$= \frac{pk}{1+m}\left(1 + \frac{1}{(1+m)} + \frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1}{(1+m)^3} \ldots + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{1}{(1+m)^{n-1}}\right)$$
$$- \frac{pfk(1+g)}{g(1+m)^2}\left(1 + \frac{1+g}{1+m} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^2} + \ldots . \right.$$
$$\left. \frac{(1+g)^{n-2}}{(1+m)^{n-2}}\right)$$
$$+ \frac{pfk}{g(1+m)^2}\left(1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{(1+m)^2} + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{1}{(1+m)^{n-2}}\right)$$
$$+ \frac{fk}{1+m}\left(1 + \frac{1+g}{1+m} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^2} + \cdots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{pk}{1+m}\left(\frac{\frac{1}{(1+m)^n} - 1}{\frac{1}{1+m} - 1}\right) - \frac{pfk(1+g)}{g(1+m)^2}\left(\frac{\left(\frac{1+g}{1+m}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1+g}{1+m} - 1}\right)$$

$$+\frac{pfk}{g(1+m)^2}\left(\frac{1}{\frac{(1+m)^{n-1}-1}{1+m}-1}\right)+\frac{fk}{1+m}\left(\frac{\frac{(1+g)^n-1}{1+m}-1}{\frac{1+g}{1+m}-1}\right)$$

$$=k\left\{\frac{p}{m}\left(1-\frac{1}{(1+m)^n}\right)-\frac{pf(1+g)}{g(1+m)(g-m)}\times\left(\left(\frac{1+g}{1+m}\right)^{n-1}-1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{pf}{g(1+m)m}\left(1-\frac{1}{(1+m)^{n-1}}\right)+\frac{f}{g-m}\left(\left(\frac{1+g}{1+m}\right)^n-1\right)\right\}$$

Obige Formel soll nun auf folgenden Fall angewendet werden.

Ein Anleihen von 400000 fl. ist durch den Verkauf von 3-procentigen oder 4-procentigen Obligationen zu machen. Die Zinsen werden jährlich entrichtet, und zur Heimzahlung des Anleihens wird ein Tilgungsfonds festgesetzt, der im ersten Jahre 8 Procent des Kapitals betragen und bis zur Tilgung jährlich mit 10 Procent anwachsen muß. Das höchste Angebot der Soumittenten für 3 procentiges Papier ist 80, und für 4-procentiges Papier 90. Welches ist das vortheilhaftere Angebot?

Zur Beantwortung dieser Frage soll der mit dem Curs 80 des 3-procentigen Papiers eine Parität bildende Curs des 4procentigen Papiers bestimmt werden.

Erhält man für 100 fl. in 3-procentigem Papier 80 fl., so ergiebt sich der entsprechende Nominalwerth aus der Proportion:

$$80 : 100 = 400000 : x = 500000$$

Aus der Gleichung $k=\frac{fk}{g}[(1+g)^n-1]$ ergiebt sich

$$n=\frac{log.(g+f)-log.f}{log.(1+g)}$$

Setzt man in dieser Formel $f=0{,}08$ und $g=0{,}1$, so ist $n=8{,}58$, wonach das Anleihen im Laufe des 9ten Jahres getilgt ist.

Wenn man in dem Ausdruck $\frac{fk}{g}[(1+g)^n-1]$ für die Summe aller Zahlungen, welche innerhalb n Jahren am Kapital abgetragen werden, $n=8$ und die obigen Werthe für f und g setzt, so ist

$$\frac{0{,}08}{0{,}1}\times 500000\ (1{,}1^8-1)=457434$$

wonach im 9ten Jahre noch $500000-457434=42566$ fl. abzutragen sind; in Uebereinstimmung mit folgender Berechnung:

$$500000 \left(\frac{8}{100}\right) = 40000 \text{ für das 1te Jahr}$$

$$40000 \left(\frac{110}{100}\right) = 44000 \text{ „ „ 2te „}$$

$$44000 \left(\frac{110}{100}\right) = 48400 \text{ „ „ 3te „}$$

$$48400 \left(\frac{110}{100}\right) = 53240 \text{ „ „ 4te „}$$

$$53240 \left(\frac{110}{100}\right) = 58564 \text{ „ „ 5te „}$$

$$58564 \left(\frac{110}{100}\right) = 64420 \text{ „ „ 6te „}$$

$$64420 \left(\frac{110}{100}\right) = 70862 \text{ „ „ 7te „}$$

$$70862 \left(\frac{110}{100}\right) = 77948 \text{ „ „ 8te „}$$

$$457434$$

$$42566 \text{ „ „ 9te „}$$

$$500000$$

Der dem Zinsfuß 3 entsprechende Tilgungsplan ist daher wie folgt:

Kapital . . .	500000
Zinsen . . .	15000
	515000
ab 40000 + 15000 =	55000
	460000
Zinsen . . .	13800
	473800
ab 44000 + 13800 =	57800
	416000
Zinsen . . .	12480
	428480
ab 48400 + 12480 =	60880
	367600
Zinsen . . .	11028
	378628
ab 53240 + 11028 =	64268
	314360
Zinsen . . .	9430,8
	323790,8

ab 58564 + 9430,8 = 67994,8
255796,0
Zinsen . . . 7673,88
263469,88
ab 64420 + 7673,88 = 72093,88
191376,00
Zinsen . . . 5741,28
197117,28
ab 70862 + 5741,28 = 76603,28
120514,00
Zinsen . . . 3615,42
124129,42
ab 77948 + 3615,42 = 81563,42
42566,00
Zinsen . . . 1276,98
43842.98
ab 42566 + 1276,98 = 43842,98
0

Die gegenwärtigen Werthe der jährlichen Zahlungen an Kapitalabtrag und Zinsen zu 4 Procent berechnet sind:

55000 × 0,96153 = 52884,15
57800 × 0,92455 = 53439,00
60880 × 0,88899 = 54121,70
64268 × 0,85480 = 54936,28
67994,8 × 0,82192 = 55886,28
72093,88 × 0,79031 = 56976,51
76603,28 × 0,75991 = 58211,59
81563,42 × 0,73069 = 59597,57
43842,98 × 0,70258 = 30803,20
Summe = 476856,28

Soll man nun für 476856 fl. in 4-procentigem Papier ebenfalls 400000 fl. erhalten, so muß der Curs so viel betragen, als aus der Proportion folgt:

$$476856 : 400000 = 100 : x = 83{,}88$$

Weil nun der Curs 83,88 mit dem Curs 80 eine Parität bildet, so ist das Angebot 90 auf 4-procentiges Papier das vortheilhaftere.

Dasselbe Resultat muß sich nun bei der Anwendung der im Obigen hergeleiteten Formel ergeben. Läßt man vorerst die

Zahlung des 9ten Jahres (nämlich 42566 fl.) weg, so ist $n = 8$, und setzt man $k = 500000$, $p = 0{,}03$, $m = 0{,}04$, $f = 0{,}08$ und $g = 0{,}1$, so erhält man nach gehöriger Vereinfachung

$$500000 \left\{ \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^8}\right) - \frac{3 \times 8 \times 110}{10 \times 104 \times 6} \times \left[\left(\frac{110}{104}\right)^7 - 1\right] + \frac{3 \times 8 \times 100}{10 \times 104 \times 4}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^7}\right) + \frac{8}{6}\left[\left(\frac{110}{104}\right)^8 - 1\right]\right\} = 446070$$

Nun muß aber noch die Zahlung vom 9ten Jahre an Kapitalabtrag und Zinsen berücksichtigt werden. Ersterer beträgt nach der im Obigen angestellten Berechnung 42566 fl.; so viel ist also auch zu Ende des 9ten Jahres zu verzinsen; die Zinsen davon zu 3 Procent betragen 1275 fl. und die letzte Zahlung beträgt folglich 42566 + 1275 = 43841 fl. Der gegenwärtige Werth hiervon zu 4 Procent für 9 Jahre ist = 30801,8 und mithin ist S = 446070 + 30801,8 = 476871,8 was mit dem Resultate der ersten, ohne Anwendung der Formel angestellten Berechnung bis auf einen Fehler von 15,52 (wegen Vernachläßigung von Brüchen) übereinstimmt.

Wir wollen nun, in Beziehung auf obiges Beispiel, annehmen, daß ein Tilgungsfonds festgesetzt wird, der im ersten Jahre 4 Procent des Kapitals betragen und bis zur Tilgung jährlich um 2 Procent anwachsen muß. Das höchste Angebot für 3-procentiges Papier ist 80, und für 4-procentiges Papier 90. Welches ist das vortheilhafteste Angebot?

Geht man wieder, zur Beantwortung dieser Frage, von dem Angebot 80 des 3-procentigen Papiers aus, und sucht man den mit diesem Curs eine Parität bildenden Curs des 4-procentigen Papiers, so ist die Berechnung wie folgt.

Erhält man für 100 fl. in 3-procentigem Papier 80 fl., so ergiebt sich der entsprechende Nominalwerth aus der Proportion:

$$80 : 100 = 400000 : x = 500000$$

Setzt man in der Gleichung

$$n = \frac{log.(g+f) - log.f}{log.(1+g)} \quad (\S\ 84)$$

$f = 0{,}04$ und $g = 0{,}02$, so ist $n = 20{,}47$ wonach das Anleihen im Laufe des 21ten Jahres getilgt ist.

Wenn man in dem Ausdruck $\frac{f\,k}{g}\,[(1+g)^n-1]$ für die Summe aller Zahlungen, welche innerhalb n Jahren am Kapital abgetragen sind, $n = 20$ und die obigen Werthe für f und g, so ist

$$\frac{0{,}04}{0{,}02} \times 500000\,(102^{20}-1) = 485949$$

wonach im 21ten Jahre noch $500000 - 485949 = 14051$ abzutragen sind; in Uebereinstimmung mit folgender Berechnung:

$500000 \left(\frac{4}{100}\right) = 20000$ für das 1te Jahr

$20000 \left(\frac{102}{100}\right) = 20400$ „ „ 2te „

$20400 \left(\frac{102}{100}\right) = 20808$ „ „ 3te „

$20808 \left(\frac{102}{100}\right) = 21224{,}16$ „ „ 4te „

$21224{,}16 \left(\frac{102}{100}\right) = 21648{,}64$ „ „ 5te „

$21648{,}64 \left(\frac{102}{100}\right) = 22081{,}61$ „ „ 6te „

$22081{,}61 \left(\frac{102}{100}\right) = 22523{,}24$ „ „ 7te „

$22523{,}24 \left(\frac{102}{100}\right) = 22973{,}70$ „ „ 8te „

$22973{,}70 \left(\frac{102}{100}\right) = 23433{,}17$ „ „ 9te „

$23433{,}17 \left(\frac{102}{100}\right) = 23901{,}83$ „ „ 10te „

$23901{,}83 \left(\frac{102}{100}\right) = 24379{,}86$ „ „ 11te „

$24379{,}86 \left(\frac{102}{100}\right) = 24867{,}45$ „ „ 12te „

$24867{,}45 \left(\frac{102}{100}\right) = 25364{,}79$ „ „ 13te „

$25364{,}79 \left(\frac{102}{100}\right) = 25872{,}08$ „ „ 14te „

$25872{,}08 \left(\frac{102}{100}\right) = 26389{,}52$ „ „ 15te „

$$26389{,}52\left(\frac{102}{100}\right) = 26917{,}31 \text{ für das 16te Jahr}$$

$$26917{,}31\left(\frac{102}{100}\right) = 27455{,}64 \text{ „ „ 17te „}$$

$$27455{,}64\left(\frac{102}{100}\right) = 28004{,}76 \text{ „ „ 18te „}$$

$$28004{,}76\left(\frac{102}{100}\right) = 28564{,}85 \text{ „ „ 19te „}$$

$$28564{,}85\left(\frac{102}{100}\right) = 29136{,}14 \text{ „ „ 20te „}$$

$$\underline{14051{,}00} \text{ „ „ 21te „}$$

$$499997{,}85$$

$$\text{Fehler } \underline{2{,}14}$$

$$500000$$

Läßt man vorerst die Zahlung des 21ten Jahres (nämlich 14051 fl.) weg, so ist $n = 20$, und setzt man $k = 500000$, $p = 0{,}03$, $m = 0{,}04$, $f = 0{,}04$ und $g = 0{,}02$, so erhält man nach gehöriger Vereinfachung

$$500000\left\{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{20}}\right) - \frac{3 \times 4 \times 102}{2 \times 104 \times 2} \times \left[\left(\frac{102}{104}\right)^{19} - 1\right] + \frac{3 \times 4 \times 100}{2 \times 104 \times 4}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{19}}\right) + \frac{4}{2}\left[\left(\frac{102}{104}\right)^{20} - 1\right]\right\} = 450648$$

Die Zahlung für das 21te Jahr ist an Kapitalabtrag 14051 fl. und an Zinsen 451,53 fl.; also zusammen 15502,53 fl. Hiervon beträgt der gegenwärtige Werth zu 4 Procent für 21 Jahre 6351 fl., und mithin ist $S = 450648 + 6351 = 456999$ fl.

Soll man nun für 456999 fl. in 4-procentigem Papier ebenfalls 400000 fl. erhalten, so muß der Curs so viel betragen, als aus der Proportion folgt:

$$456999 : 400000 = 100 : x = 87{,}527543$$

Weil nun der Curs 87,527543 mit dem Curs 80 eine Parität bildet, so ist das Angebot 90 auf 4-procentiges Papier das vortheilhaftere. In diesem Beispiele ist eine größere Zahl für die Parität als im vorhergehenden Beispiele herausgekommen, und zwar aus dem Grunde, weil im letztern eine größere Tilgungszeit angenommen worden ist. (Vergl. § 81).

Geht man von dem Angebot 90 auf 4-procentiges Papier aus, so ist die Berechnung wie folgt.

Der Nominalwerth ergiebt sich aus der Proportion:

$$90 : 100 = 400000 : x = 444444$$

Setzt man in dem Ausdruck $\frac{fk}{g}[(1+g)^n - 1]$ für die Summe aller Zahlungen, welche innerhalb n Jahren am Kapital abzutragen sind, $n = 20$, $f = 0{,}04$ und $g = 0{,}02$ so ist

$$\frac{0{,}04}{0{,}02} \times 444444\,(1{,}02^{20} - 1) = 431955$$

wonach im 21ten Jahre noch $444444 - 431955 = 12489$ fl. abzutragen sind. Hier ist nun $p = 0{,}04$, $m = 0{,}03$ und

$$444444\left\{\frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{1{,}03^{20}}\right) - \frac{4 \times 4 \times 102}{2 \times 103 \times 1} \times \left\{\left(\frac{102}{103}\right)^{19} - 1\right\} + \frac{4 \times 4 \times 100}{2 \times 103 \times 3}\left(1 - \frac{1}{1{,}03^{19}}\right) + \frac{4}{1}\left[\left(\frac{102}{103}\right)^{20} - 1\right]\right\} = 478327$$

Die Zinsen von den im 21ten Jahre noch zu zahlenden 12489 fl. zu 4 Procent betragen 499,55 fl.; die im 21ten Jahre zu leistende Zahlung beträgt daher $12489 + 499{,}55 = 12988{,}56$ fl. und der gegenwärtige Werth hiervon für 21 Jahre zu 3 Procent ist $= 6981$ fl.; daher $S = 478327 + 6981 = 485308$ fl. Soll man für 485308 fl. in 3-procentigem Papier ebenfalls 400000 fl. erhalten, so muß der Curs so viel betragen, als aus der Proportion folgt:

$$485308 : 400000 = 100 : x = 82{,}42$$

Weil der Curs 82,42 für 3-procentiges Papier eine Parität mit dem Angebot 90 auf 4-procentiges Papier bildet, und nur 80 für ersteres angeboten worden sind, so ist das Angebot auf 4-procentiges Papier das vortheilhaftere; in Uebereinstimmung mit der ersten Berechnung.

85. Werden die Zinsen halbjährlich entrichtet, und findet der Kapitalabtrag von Jahr zu Jahr statt, so hat man, wie im §. 79 erwiesen, die gegenwärtigen Werthe der Abtragszahlungen nach Halbjahren zu berechnen. Die halbjährlichen Zinszahlungen sind, wenn man $\frac{p}{2} = q$ setzt

im 1ten Semester } . . . . . qk des 1ten Jahres
„ 2ten „ } . . . . . qk

im 1ten Semester } des 2ten J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)q$
„ 2ten „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)q$

im 1ten Semester } des 3ten J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)q$
„ 2ten „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)q$

im 1ten Semester } des 4ten J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^3-1\right]\right)q$
„ 2ten „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^3-1\right]\right)q$
⋮ ⋮

im 1ten Semester } des $n$ten J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1}-1\right]\right)q$
„ 2ten „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1}-1\right]\right)q$

Die halbjährlichen Zahlungen für Interessen und Kapitalabtrag sind demnach

im 1. Sem. } d. 1. J. $\ldots\ldots qk$
2. Sem. $\ldots\ldots qk+fk$

im 1. Sem. } d. 2 J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)q$
2. „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)-1\right]\right)q+fk\,(1+g)$

im 1. Sem. } d. 3. J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)q$
2. „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^2-1\right]\right)q+fk\,(1+g)^2$

im 1. Sem. } d. 4. J. $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^3-1\right]\right)q$
2. „ $\ldots\ldots\left(k-\frac{fk}{g}\left[(1+g)^3-1\right]\right)q+fk\,(1+g)^3$
⋮ ⋮

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots \left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1} - 1\right]\right) q$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. nten J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots \left(k - \frac{fk}{g}\left[(1+g)^{n-1} - 1\right]\right) q + fk(1+g)^{n-1}$$

Oder:

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots qk$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. 1. J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots qk + fk$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g) + \frac{qfk}{g}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. 2. J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g) + \frac{qfk}{g} + fk\,(1+g)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^2 + \frac{qfk}{g}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. 3. J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^2 + \frac{qfk}{g} + fk\,(1+g)^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^3 + \frac{qfk}{g}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. 4. J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^3 + \frac{qfk}{g} + fk\,(1+g)^3$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{im}\\ 1.\,\text{Sem.}\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^{n-1} + \frac{qfk}{g}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d. } n \text{ J.}\\ 2.\ \ ,,\end{array}\right\} \ldots\ldots qk - \frac{qfk}{g}(1+g)^{n-1} + \frac{qfk}{g} + fk(1+g)^{n-1}$$

Führt man nun die halbjährlichen Zahlungen zum Semestralzinsfuß m auf ihren gegenwärtigen Werth zurück, so wird die Summe S derselben ausgedrückt durch:

$$S = qk\,(1+m)^{-1}$$
$$+ qk\,(1+m)^{-2} + fk\,(1+m)^{-2}$$
$$+ qk\,(1+m)^{-3} - \frac{qfk}{g}(1+g)(1+m)^{-3} + \frac{qfk}{g}(1+m)^{-3}$$
$$+ qk\,(1+m)^{-4} - \frac{qfk}{g}(1+g)(1+m)^{-4} + \frac{qfk}{g}(1+m)^{-4} + fk\,(1+g)(1+m)^{-4}$$
$$+ qk\,(1+m)^{-5} - \frac{qfk}{g}(1+g)^2(1+m)^{-5} + \frac{qfk}{g}(1+m)^{-5}$$

$$+ qk(1+m)^{-6} - \frac{qfk}{g}(1+g)^2(1+m)^{-6} + \frac{qfk}{g}$$
$$(1+m)^{-6} + fk(1+g)^2(1+m)^{-6}$$
$$+ qk(1+m)^{-7} - \frac{qfk}{g}(1+g)^3(1+m)^{-7} + \frac{qfk}{g}$$
$$(1+m)^{-7}$$
$$+ qk(1+m)^{-8} - \frac{qfk}{g}(1+g)^3(1+m)^{-8} + \frac{qfk}{g}$$
$$(1+m)^{-8} + fk(1+g)^3(1+m)^{-8}$$
$$+ qk(1+m)^{-(2n-1)} - \frac{qfk}{g}(1+g)^{n-1}(1+m)^{-(2n-1)}$$
$$+ \frac{qfk}{g}(1+m)^{-(2n-1)}$$
$$+ qk(1+m)^{-2n} - \frac{qfk}{g}(1+g)^{n-1}(1+m)^{-2n} + \frac{qfk}{g}$$
$$(1+m)^{-2n} + fk(1+g)^{n-1}(1+m)^{2n}$$
$$= qk\left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1}{(1+m)^3} + \cdots \frac{1}{(1+m)^{2n}}\right)$$
$$+ fk\left(\frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1+g}{(1+m)^4} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^6} + \cdots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n}}\right)$$
$$- \frac{qfk}{g}\left(\frac{1+g}{(1+m)^3} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^5} + \frac{(1+g)^3}{(1+m)^7} + \cdots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-1}}\right)$$
$$- \frac{qfk}{g}\left(\frac{1+g}{(+m)^4} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^6} + \frac{(1+g)^3}{(1+m)^8} + \cdots \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n}}\right)$$
$$+ \frac{qfk}{g}\left(\frac{1}{(1+m)^3} + \frac{1}{(1+m)^4} + \frac{1}{(1+m)^5} + \cdots \frac{1}{(1+m)^{2n}}\right)$$
$$= \frac{qk}{1+m}\left(1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{(1+m)^2} + \frac{1}{(1+m)^3} + \cdots \right.$$
$$\left. \frac{1}{(1+m)^{2n-1}}\right)$$
$$+ \frac{fk}{(1+m)^2}\left(1 + \frac{1+g}{(1+m)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^4} + \frac{(1+g)^3}{(1+m)^6} + \cdots \right.$$
$$\left. \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}\right)$$
$$- \frac{qfk}{g} \times \frac{1+g}{(1+m)^3}\left(1 + \frac{1+g}{(1+m)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+m)^4} + \right.$$
$$\left. \frac{(1+g)^3}{(1+m)^6} + \cdots \frac{(1+g)^{n-2}}{(1+m)^{2n-4}}\right)$$

$$-\frac{qfk}{g}+\frac{1+g}{(1+m)^4}\left(1+\frac{1+g}{(1+m)^2}+\frac{(1+g)^2}{(1+m)^4}+\right.$$
$$\left.\frac{(1+g)^3}{(1+m)^6}+\ldots\frac{(1+g(^{n-2}}{(1+m)^{2n-4}}\right)$$
$$+\frac{qfk}{g}+\frac{1}{(1+m)^3}\left(1+\frac{1}{1+m}+\frac{1}{(1+m)^2}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{(1+m)^3}+\ldots\frac{1}{(1+m)^{2n-3}}\right)$$

Die erste der obigen Reihen ist $=\frac{qk}{m}\left(1-\frac{1}{(1+m)^{2n}}\right)$

Setzt man, um die zweite Reihe zu summiren,

$$\int=1+\frac{1+g}{(1+m)^2}+\frac{(1+g)^2}{(1+m)^4}+\frac{(1+g)^3}{(1+m)^6}$$
$$+\ldots\ldots\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}$$

so ist $\frac{1+g}{(1+m)^2}\int=\frac{1+g}{(1+m)^2}+\frac{(1+g)^2}{(1+m)^4}+\ldots$
$$\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}+\frac{(1+g)^n}{(1+m)^{2n}}$$

$$\frac{1+g}{(1+m)^2}\int-\int=\frac{(1+g)^n}{(1+m)^{2n}}-1=(1+g)^n(1+m)^{-2n}-1$$

und $\int=\frac{(1+g)^n(1+m)^{-2n}-1}{(1+g)(1+m)^{-2}-1}$; daher ist die zweite Reihe

$$=\frac{fk}{(1+m)^2}\times\frac{(1+g)^n(1+m)^{-2n}-1}{(1+g)(1+m)^{-2}-1}=\frac{fk}{1+g-(1+m)^2}$$
$$\times\left(\frac{(1+g)^2}{(1+m)^{2n}}-1\right)$$

Die dritte Reihe ist

$$=-\frac{qfk}{g}\times\frac{1+g}{(1+m)^3}\,\frac{(1+g)^{n-1}(1+m)^{-2n+2}-1}{(1+g)(1+m)^{-2}-1}$$
$$=-\frac{qfk\,(1+g)}{g(1+m)\,[(1+g)-(1+m)^2]}\left(\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}-1\right)$$

Die vierte Reihe ist

$$=-\frac{qfk}{g}\times\frac{1+g}{(1+m)^4}\times\frac{(1+g)^{n-1}(1+m)^{-2n+2}-1}{(1+g)(1+m)^{-2}-1}$$
$$=-\frac{gfk\,(1+g)}{g(1+m)^2\,[(1+g)-(1+m)^2]}-\left(\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}-g\right)$$

Die fünfte Reihe ist $= \frac{qfk}{g} \times \frac{1}{(1+m)^3} \times$

$$\frac{1-(1+m)^{-2n+2}}{1-(1+m)^{-1}} = \frac{qfk}{g(1+m)^2 m}\left(1 - \frac{1}{(1+m)^{2n-2}}\right)$$

Daher:

$$S = K\left\{\frac{q}{m}\left(1-\frac{1}{(1+m)^{2n}}\right) + \frac{f}{1+g-(1+m)^2}\left(\frac{(1+g)^2}{(1+m)^{2n}}-1\right)\right.$$
$$- \frac{qf(1+g)}{g(1+m)[(1+g)-(1+m)^2]}\left(\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}-1\right)$$
$$- \frac{gf(1+g)}{g(1+m)^2[(1+g)-(1+m)^2}\left(\frac{(1+g)^{n-1}}{(1+m)^{2n-2}}-1\right)$$
$$\left. + \frac{gf}{g(1+m)^2 m}\left(1-\frac{1}{(1+m)^{2n-2}}\right)\right\}$$

86. Zur Vergleichung von Angeboten auf Papiere von verschiedenem Zinsfuße kann man auch auf folgende, nicht von Cursparität ausgehende, Weise rechnen. Um dieses Verfahren sogleich auf einen bestimmten Fall, und zwar auf das im §. 83 erwähnte badische Eisenbahn-Anleihen anwenden zu können, so sollen statt Buchstaben die den Anleihens-Bedingnissen entsprechenden Werthe in Rechnung gebracht werden.

Da nach dem Art. 3 des Gesetzes der Tilgungsfonds zu ½ Procent des Nominalkapitals bestimmt ist, da ferner die Zinsen der getilgten Summen dem Tilgungsfonds nicht zuwachsen, und letzterer jährlich um 6 Procent seines eigenen Betrags anwachsen soll, so ist der Tilgungsfonds

zu Ende des 1ten Jahres	=	0,005 . 1	der Nominalschuld.
„ „ „ 2ten „	=	0,005 . 1,06¹	
„ „ „ 3ten „	=	0,005 . 1,06²	
„ „ „ 4ten „	=	0,005 . 1,06³	
⋮			
„ „ „ $x$ten „	=	0,005 . 106^{x-1}	

Die Tilgung ist beendigt, wenn die Summe der jährlichen Tilgungsbeträge = 1 ist; daher

$$1 = 0{,}005\ (1 + 1{,}06^1 + 1{,}06^2 + 1{,}06^3 + \ldots . 1{,}06^{x-1})$$
$$= \frac{0{,}005\,(1{,}06^x - 1)}{1{,}06-1} = \frac{0{,}005\,(1{,}06^x-1)}{0{,}06};$$

hieraus $x = \frac{log.\ 13}{log.\ 1{,}06} = 44{,}019128$ Jahre.

Wird $x = 44$ gesetzt, und die am Schlusse des 44ten Jahres getilgte Summe durch t bezeichnet, so ist

$$t = \frac{0{,}005}{0{,}006}(1{,}06^{44} - 1) = 0{,}99879015$$

Im 45ten Jahre sind daher noch

$$1 - 0{,}99879015 = 0{,}00120985$$

zu tilgen.

Das Anleihen kann zu 3½ Procent und zu 4 Procent abgeschlossen werden; die Verzinsung geschieht halbjährlich und der in jedem Jahre zu leistende Zinsbetrag wird von der Nominalschuld nach Abzug der getilgten Summen berechnet. Wird daher das Nominalkapital durch N und die jeweils getilgte Summe durch t, t_1, t_2, t_3 ꝛc. bezeichnet, so beträgt die Zinszahlung

	für ein 3½ proc. Anleihen.	für ein 4 proc. Anleihen.
f. d. 1. J. 1. Sem.	0,0175 N	0,02 N
2. „	0,0175 N	0,02 N
2. J. 1. „	0,0175 N $(1-t)$	0,02 N $(1-t)$
2. „	0,0175 N $(1-t)$	0,02 N $(1-t)$
3. J. 1. „	0,0175 N $(1-t_1)$	0,02 N $(1-t_1)$
2. „	0,0175 N $(1-t_1)$	0,02 N $(1-t_1)$
4. J. 1. „	0,0175 N $(1-t_2)$	0,02 N $(1-t_2)$
2. „	0,0175 N $(1-t_2)$	0,02 N $(1-t_2)$
⋮		
44. J. 1. „	0,0175 N $(1-t_{42})$	0,02 N $(1-t_{42})$
2. „	0,0175 N $(1-t_{42})$	0,02 N $(1-t_{42})$

Für ein 3½-procentiges und 4-procentiges Anleihen beträgt zu Ende des 45ten Jahres die Schuld noch 0,00120985 N, welche nebst Zinsen bis zum Zahlungstage zu berichtigen bleibt.

Die Leistungen an Zins und Abtragung der Schuld sind demnach

	für ein 3½ proc. Anleihen	für ein 4 proc. Anleihen.
im 1ten Jahre 1tes Sem.	0,0175 N	0,02 N
2tes „	0,0175 N + 0,0051 N	0,02 N + 0,00.5 N
„ 2ten „ 1tes „	0,0175 N $(1-t)$	0,02 N $(1-t)$
2tes „	0,0175 N $(1-t)$ + 0,005 . $1{,}06^1$ N	0,02 N $(1-t)$ + 0,005 . $1{,}06^2$ N
„ 3ten „ 1tes „	0,0175 N $(1-t_1)$	0,02 N $(1-t_1)$
2tes „	0,0175 N $(1-t_1)$ + 0,005 . $1{,}06^2$ N	0,02 N $(1-t_1)$ + 0,005 . $1{,}06^2$ N
	u. s. w.	u. s. w.

Die Nominalschuld N richtet sich nach dem Curs (§. 82); wird demnach das Kapital des Anleihens durch k und der Curs durch c bezeichnet, so ergiebt sich das Nominalkapital N aus der Proportion:

$$c : 100 = k : N$$

$$\text{woraus } N = \frac{100\,k}{c}$$

Soll nun für ein gegebenes Angebot auf 3½-procentiges und 4-procentiges Papier ausgemittelt werden, welches von beiden das größere sey, so müssen die entsprechenden Curse in obiger Gleichung für c gesetzt und hieraus die denselben entsprechenden Nominalkapitalien bestimmt werden. Substituirt man endlich die solchergestalt erhaltenen Werthe von N in obige Ausdrücke der halbjährlichen und jährlichen Leistungen an Zins und und Kapitalabtrag, und berechnet man nach einem beliebigen Zinsfuße die gegenwärtigen Werthe derselben, so lassen sich die jedem Angebote entsprechenden Summen dieser Werthe mit einander vergleichen. Dasjenige Anleihen, welches die geringste Gesammtleistung der Staatskasse erfordert, ist das vortheilhaftere.

Werden die gegenwärtigen Werthe zum Zinsfuß 3½ berechnet, und bezeichne man den auf den Anfang des 1ten Jahres berechneten Gesammtwerth der Leistungen durch W, so ist

für ein 3½-proc. Anleihen,

$$W = N\left\{\begin{array}{l}
(0{,}0175\,(1-0)\qquad\qquad)\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{0{,}5}\\
+\,(0{,}0175\,(1-0)+0{,}005\,.\,1{,}06^{0})\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{1}\\
+\,(0{,}0175\,(1-t)\qquad\qquad)\left(\frac{100}{103\,5}\right)^{1{,}5}\\
+\,(0{,}0175\,(1-t)+0{,}005\,.\,1{,}06^{1})\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{2}\\
+\,(0{,}0175\,(1-t_1)\qquad\qquad)\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{2{,}5}\\
+\,(0{,}0175\,(1-t_1)+0{,}005\,.\,1{,}06^{2})\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{3}\\
\vdots\\
+\,(0{,}0175\,(1-t_{42})+0{,}005\,.\,1{,}06^{42})\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{42}\\
+\,(0{,}00120985\qquad\qquad)\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{44}
\end{array}\right.$$

für ein 4-proc. Anleihen.

$$W = N \left\{ \begin{array}{ll} (0{,}02\,(1-0) &) \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{0,5} \\ + (0{,}02\,(1-0) + 0{,}005 \,.\, 1{,}06^{0}) & \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{1} \\ + (0{,}02\,(1-t) &) \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{1,5} \\ + (0{,}02\,(1-t) + 0{,}005 \,.\, 1{,}06^{1}) & \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{2} \\ + (0{,}02\,(1-t_1) &) \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{2,5} \\ + (0{,}02\,(1-t_1) + 0{,}005 \,.\, 1{,}06^{2}) & \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{3} \\ \vdots & \\ + (0{,}02\,(1-t_{42}) + 0{,}005 \,.\, 1{,}06^{43}) & \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{44} \\ + (0{,}00120985 &) \left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{44} \end{array} \right\}$$

Bezeichnet man

1) das dem Curs für 3½-procentiges Papier entsprechende Nominalkapital durch $N_{3\frac{1}{2}}$,

2) das dem Curs für 4-procentiges Papier entsprechende Nominalkapital durch N_4,

3) den Faktor von $N_{3\frac{1}{2}}$, durch $S_{3\frac{1}{2}}$,

4) den Faktor von N_4 durch S_4,

5) den Gesammtwerth der Leistungen für 3½-procentiges Papier durch $W_{3\frac{1}{2}}$, und

6) den Gesammtwerth der Leistungen für 4-procentiges Papier durch W_4, so ist

$$W_{3\frac{1}{2}} = N_{3\frac{1}{2}}\, S_{3\frac{1}{2}} \text{ und } W_4 = N_4\, S_4$$

Werden nun für die zu erwartenden Cursangebote die entsprechenden Werthe von N ausgemittelt und in obige Gleichungen substituirt, so erhält man die entsprechenden Werthe von W.

Solche Vorausberechnungen sind aber erforderlich, wenn gleich nach Eröffnung der Soumissionen die Sache entschieden werden soll. Zu dem Ende müssen die als möglich zu erachtenden kleinsten und größten Angebote für jede Papiergattung festgesetzt, und für alle zwischenliegenden Curse nach gehörigen Abstufungen (etwa von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$) die Werthe von $N_{3\frac{1}{2}}$ und

N_4, und hieraus weiter die Werthe von $W_{3\frac{1}{2}}$ und W_4 bestimmt, und mit den entsprechenden Cursen tabellarisch aufgestellt werden.

Wird einem Soumittenten das Anleihen z. B. auf 3½-procentiges Papier zugeschlagen, und soll, wenn er einen Theil des Anleihens in 4-procentigem Papier verlangt, die entsprechende Parität (§. 82) bestimmt werden, so ist der dem ersten Curs entsprechende Werth von $W_{3\frac{1}{2}}$ aus der Tabelle bekannt; setzt man nun

$$W_{3\frac{1}{2}} = W_4 = N_4 S_4$$

so ergiebt sich hieraus $N_4 = \frac{W_{3\frac{1}{2}}}{S_4}$

Die Cursparität p ergiebt sich demnach aus der Proportion:

$$N_4 : 100 = 100 : p$$

Auf obige Berechnungen gründen sich der 2te und 3te Art. der nachträglichen Bekanntmachung vom 24. September 1842 über das badische Eisenbahnanleihen, welche wie folgt lauten:

„Wenn ein Concurrent den Zuschlag für 3½-procentige Partialobligationen erhalten hat, so steht es ihm frei, auch für einen Theil des Anleihens und zwar für ein Drittheil, die Hälfte oder zwei Drittheile desselben, 4-procentige Partialobligationen zu verlangen, in so fern er sich die Bestimmung des Nominalkapitals dafür in der Größe gefallen läßt, daß dasselbe mit der nämlichen Gesammtleistung der Eisenbahnschuldentilgungs-Casse, wie bei der Ueberlassung von 3½-procentigen Partialobligationen, verzinst und abgetragen werden kann."

„Tritt der unter der vorhergehenden Ziffer vorgesehene Fall ein, so wird die Gesammtleistung der Eisenbahnschuldentilgungs-Casse für die zugeschlagenen Partialobligationen in der Weise berechnet, daß sämmtliche Leistungen an Zinsen und Tilgungsfonds mittelst eines Discontozinsfußes zu 3½ Procent und Anwendung der Zinsrabattrechnung auf ihren Werth am Anfang des ersten Jahres zurückgeführt werden. Dieselbe Berechnung wird für die 4-procentigen Partialobligationen, welche der Anlehensunternehmer zu erhalten wünscht, aufgestellt. Die Summe der Werthe für beiderlei Gattungen von Partialobligationen muß gleich seyn."

Hierzu als ausführliches Beispiel nachfolgende, beim Großh. Finanzministerium gefertigte Berechnung*) des vorerwähnten Anleihens. Zu größerer Genauigkeit hat man sich dabei der großen Vega'schen Logarithmentafeln bedient. Die Berechnungen sind übrigens unmittelbar nach den im Obigen aufgestellten Werthen von $W_{3\frac{1}{2}}$ und W_4 gefertigt worden, und es giebt allerdings Fälle, in welchen dergleichen unmittelbare Berechnungen zweckdienlicher als die Berechnung nach der Formel sind; denn ist letztere nur einigermaßen verwickelt, so muß Derjenige, welcher darnach rechnen soll, schon einige Uebung hierin haben, während bei der unmittelbaren Berechnung die einzelnen Werthe auch von Solchen, welche höchstens mit Logarithmen umzugehen wissen, mit Sicherheit bestimmt werden können. Hierbei läßt sich die ganze Berechnung fabrikmäßig einrichten; es können gleichzeitig mehrere solcher Rechner die Sache in Arbeit nehmen, und den höhern Beamten die Zeit und Mühe derselben ersparen.

Zur Bestimmung von $S_{3\frac{1}{2}}$ und S_4 sind die Werthe

1) der einzelnen Tilgungsbeträge t, t_1, t_2 ꝛc.,

2) von $1-t$, $1-t_1$, $1-t_2$ ꝛc.,

3) von $0{,}0175\,(1-0)$, $0{,}0175\,(1-t)$, $0{,}0175\,(1-t_1)$ ꝛc.,

4) von $0{,}02\,(1-0)$, $0{,}02\,(1-t)$, $0\,02\,(1-t_1)$ ꝛc.,

5) von $\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{0{,}5}$, $\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{1}$, $\left(\frac{100}{103{,}5}\right)^{1{,}5}$ ꝛc.

zu bestimmen.

Die Werthe von t, t_1, t_2 ꝛc. für das Nominalkapital 1 ergeben sich aus der Berechnung von

$$0{,}005 \times 1{,}06^0,\ 0{,}005 \times 1{,}06^1,\ 0{,}005 \times 1{,}06^2 \text{ ꝛc.}$$

und finden sich in der 1ten der nachfolgenden Tabellen.

Die Werthe von $S_{3\frac{1}{2}}$ ergeben sich durch Summirung sämmtlicher Endresultate der 2ten Tabelle.

Die Werthe von S_4 ergeben sich durch Summirung sämmtlicher Endresultate der 3ten Tabelle.

Die 4te Tabelle enthält

a) die Kurse von 90 bis 95 nach Abstufungen von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ für 3½-procentiges Papier;

*) Die dem Herausgeber durch die gefällige Vermittlung des Großh. Finanzbeamten, von welchem obige Betrachtungsweise des in Rede stehenden Gegenstandes herrührt, mitgetheilt worden ist.

b) die denselben entsprechenden Nominalkapitalien für ein aufzunehmendes Kapital von 12000000 fl., also die Werthe von $N_{3\frac{1}{2}} = \frac{100\,k}{c}$);

c) die Produkte von $N_{3\frac{1}{2}}$ und $S_{3\frac{1}{2}}$.

Die 5te Tabelle enthält in gleicher Weise die Berechnungen von N_4 S_4 für die Kurse von 100 bis 105 nach den vorher angenommenen Abstufungen.

Die 6te Tabelle enthält die Zusammenstellung der in der 4ten und 5ten Tabelle enthaltenen Endresultate.

Erste Tabelle.

Werthe von $0{,}005 \cdot 1{,}06^0$, $0{,}005 \cdot 1{,}06^0$, $0{,}005 \cdot 1{,}06^2$ ..... $0{,}005 \cdot 1{,}06^{43}$

Jahr	Tilgungsbetrag	Jahr	Tilgungsbetrag	Jahr	Tilgungsbetrag
1	0,005	16	0,01198279	31	0,02871746
2	0,00530	17	0,01270176	32	0,03044050
3	0,0056180	18	0,01346386	33	0,03226693
4	0,00595508	19	0,01427170	34	0,03420295
5	0,00631238	20	0,01512800	35	0,03625513
6	0,00669113	21	0,01603568	36	0,03843043
7	0,00709260	22	0,01699782	37	0,04073826
8	0,00751815	23	0,01801769	38	0,04318044
9	0,00796924	24	0,01909875	39	0,04577126
10	0,00844739	25	0,02024467	40	0,04851754
11	0,00895424	26	0,02145935	41	0,05142859
12	0,00949149	27	0,02274691	42	0,05451431
13	0,01006098	28	0,02411173	43	0,05778516
14	0,01066464	29	0,02555843	44	0,06125227
15	0,01130453	30	0,02709194		

Zweite Tabelle.

Werthe von $S_{3\frac{1}{2}}$

Zu Ende des Jahres	Zu Ende des Semest.	Restschuld $1-s$	Halbjährl. Zins $0{,}0175\,(1-s)$	Tilgungsfonds des Jahres.	Summe der Leistung. Zahl.	Summe der Leistung. Logarithme.	Abzinslicher Faktor. Werth.	Abzinslicher Faktor. Logarithme.	Werth der Leistung am Anfang des 1. Jahres. Logarithme.	Werth der Leistung am Anfang des 1. Jahres. Zahl.
1	1	1,00000000	0,01750000	—	0,01750000	0,2430380487—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{0,5}$	0,9925998251—1	0,2355678738—2	0,017201562
—	2	—	0,01750000	0,00500000	0,02250000	0,3521825181—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{1}$	0,9850596502—1	0,3372421683—2	0,021739130
2	1	0,99500000	0,01741250	—	0,01741250	0,2408611293—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{1,5}$	0,9775894753—1	0,2184506046—2	0,016536767
—	2	—	0,01741250	0,00530000	0,02271250	0,3568649402—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{2}$	0,9701193004—1	0,3263842406—2	0,021202362
3	1	0,98970000	0,01731975	—	0,01731975	0,2385416188—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{2,5}$	0,9626491255—1	0,2011907442—2	0,015898446
—	2	—	0,01731975	0,00561800	0,02293775	0,3605508150—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{3}$	0,9551789506—1	0,3157297656—2	0,020688586
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
44	2	—	0,00109309	0,06125827	0,06234536	0,7948041370—2	$(\frac{100}{103{,}5})^{44}$	0,3426246088—1	0,1374287456—2	0,013722858
45	—	0,00120965	—	0,00120965	0,00120965	0,0827315285—3	$(\frac{100}{103{,}5})^{44}$	0,3426246088—1	0,4258561373—4	0,000266891
									Summe	1,005448671

Dritte Tabelle.

Werthe von S_4

Zu Ende des Jahres	Zu Ende des Semest.	Restschuld $1-\varepsilon$	Halbjährl. Zins $0{,}02\,(1-\varepsilon)$	Tilgungsfonds des Jahres.	Summe der Leistung. Zahl.	Summe der Leistung. Logarithme.	Abzinslicher Faktor. Werth.	Abzinslicher Faktor. Logarithme.	Werth der Leistung am Anfang des 1. Jahres. Logarithme.	Werth der Leistung am Anfang des 1. Jahres. Zahl.
1	1	1,00000000	0,02000000	—	0,02000000	0,3010299957−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{0,5}$	0,9925298251−1	0,2935598208−2	0,019658927
—	2	—	0,02000000	0,00500000	0,02500000	0,3979400087−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{1}$	0,9850596502−1	0,3829996589−2	0,024151588
2	1	0,99500000	0,01990000	—	0,01990000	0,2988530764−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{1,5}$	0,9775894753−1	0,2764425517−2	0,018899162
—	2	—	0,01990000	0,00530000	0,02520000	0,4014005408−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{2}$	0,9701193004−1	0,3715198418−2	0,023524470
3	1	0,98970000	0,01979400	—	0,01979400	0,2965335659−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{2,5}$	0,9626491255−1	0,2591826914−2	0,018168795
—	2	—	0,0197400	0,00561800	0,02541200	0,4050388467−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{3}$	0,9551789506−1	0,3602177973−2	0,022910168
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
44	2	—	0,00124924	0,06125227	0,06250151	0,7958905097−2	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{44}$	0,3426246088−1	0,1385151185−2	0,013756787
45	—	0,00120985	—	0,00120985	0,00120985	0,827315285−3	$(\frac{100}{103}{}^{5})^{44}$	0,3426246088−1	0,4253561373−2	0,000266291
									Summe	1,095956589

Vierte Tabelle.

Werthe von $N_{3\frac{1}{2}}$ $S_{3\frac{1}{2}}$

Kurs.	Nominalschuld.		Logarithme von 1,005449671.	Werth der Gesammtleistung am Anfang des 1. Jahres.	
	Zahl.	Logarithme.		Logarithme.	Zahl.
90,0	13333333	7,1249387255	0,0023599044	7,1272986299	13405981,9
90,1	13318536	7,1244564560		7,1268163604	13391103,3
90,2	13303769	7,1239746953		7,1263345996	13376256,9
90,3	13289037	7,1234935105		7,1258534149	13361444,6
90,4	13274336	7,1230128061		7,1253727105	13346663,5
90,5	13259669	7,1225326827		7,1248925871	13331916,6
90,6	13245038	7,1220530446		7,1244129490	13317200,8

u. s. w.

Fünfte Tabelle.

Werthe von N_4 S_4

Kurs.	Nominalschuld.		Logarithme von 1,005936589.	Werth der Gesammtleistung am Anfang des 1. Jahres.	
	Zahl.	Logarithme.		Logarithme.	Zahl.
100,0	13000000	7,0791813460	0,0397931520	7,1189745980	13151479,1
100,1	11988012	7,0787471690		7,1185403210	13138340,-
100,2	11976048	7,0783135879		7,1181068799	13125228,7
100,3	11964108	7,0778803946		7,1176736766	13112143,4
100,4	11952191	7,0774475845		7,1172408765	13099082,5
100,5	11940299	7,0770152019		7,1168085539	13086049,4
100,6	11928429	7,0765832495		7,1163766015	13073040,3

u. s. w.

Sechste Tabelle.

Skala

über die Werthe der Kurs-Angebote auf ein Anlehen von 12 Millionen Gulden zu 3½ oder 4 Procent.

Kurs für		Werth der Gesammtleistung.	Kurs für		Werth der Gesammtleistung.	Kurs für		Werth der Gesammtleistung.	Kurs für		Werth der Gesammtleistung.
3½	4		3½	4		3½	4		3½	4	
90		13405981	92,1		13100308	93,3		12931815		103	12768425
90,1		13391103		100,4	13093082		101,7	12931641	94,5		12767602
90,2		13376256	92,2		13086099		101,8	12918937		103,1	12756044
90,3		13361444		100,5	13086049	93,4		12917970	94,6		12754105
90,4		13346663		100,6	13073040		101,9	12906259		103,2	12743681
90,5		13331916	92,3		13071921	93,5		12904154	94,7		12740638
90,6		13317200		100,7	13060058		102,0	12893607		103,3	12731345
90,7		13302518	92,4		13057755	93,6		12890367	94,8		12727198
90,8		13287867		100,8	13047102		102,1	12880978		103,4	12719032
90,9		13273249	92,5		13043658	93,7		12876610	94,9		12713786
91		13258663		100,9	13034170		102,2	12868374		103,5	12706743
91,1		13244109	92,6		13029572	93,8		12862882	95		12700404
91,2		13229588		101,0	13021266		102,3	12855795		103,6	12694478
91,3		13215097	92,7		13015516	93,9		12849184		103,7	12688236
91,4		13200639		101,1	13008386		102,4	12843841		103,8	12670018
91,5		13186212	92,8		13001491	91,0		12835514		103,9	12657824
91,6		13171817		101,2	12995533		102,5	12830711		104	12645653
91,7		13157452	92,9		12987496	94,1		12821874		104,1	12633505
	100	13151479		101,3	12982704		102,6	12818205		104,2	12621381
91,8		13143119	93		12973531	94,2		12808263		104,3	12609279
	100,1	13138340		101,4	12969901		102,7	12805724		104,4	12597202
91,9		13128818	93,1		12959595	94,3		12794681		104,5	12585147
	100,2	13125228		101,5	12957122		102,8	12793267		104,6	12573115
92		13114547	93,2		12945690	94,4		12781126		104,7	12561107
	100,3	13112143		101,6	12944369		102,9	12780835		104,8	12549121
										104,9	12537158
										105	12525217

Lotterieanleihen. 87. Bei Lotterieanleihen (§. 67) macht sich der Staat dazu verbindlich, die Anleihe in einer bestimmten Zeit terminweise zurück zu zahlen. Jedes Jahr z. B. wird ein zum Voraus bestimmter Theil des Kapitals getilgt, und es wird durch Verlosung entschieden, welche Schuldscheine oder Obligationen in den einzelnen Jahrgängen eingelöst werden sollen.

Zu dem Ende wird die ganze Anleihe in gleiche Theile getheilt, und für die entsprechenden Summen werden Schuldscheine ausgestellt, welche mit fortlaufenden Nummern versehen sind. Solche Obligationen werden Partialobligationen, Partialloose oder Partiale genannt. In dem von der Staatsverwaltung ausgegebenen Verloosungsplane wird angegeben, wie viele Loose in jedem Jahre zur Ziehung gelangen sollen.

Mit dem größten Theile der Loose kommt entweder weniger als das darin verschriebene Kapital, oder das volle Kapital oder aber das Kapital sammt Zinsen heraus, welche weniger als das dem Zinsfuße des Anleihens entsprechende Interusurium (§. 71) betragen, wodurch bedeutende Summen, Gewinnste oder Prämien genannt, auf den Rest der Loose vertheilt werden können.

Die Inhaber der Lotterieloose erhalten auch wohl jährlich oder halbjährlich die Zinsen des in der Obligation verschriebenen Kapitals, in welchem Falle aber die Gewinnstziehungen in größern Zwischenzeiten stattfinden. Daher die Eintheilung der Lotterieanleihen in verzinsliche und unverzinsliche. Erstere kommen wenig mehr vor.

Die Partialobligationen haben gewöhnlich zwei Nummern, nämlich die Loosnummer und die Seriennummer. Vermittelst letzterer kann den Looseigenthümern auf eine leichte Art zum Voraus bekannt gemacht werden, welche Loose zur Ziehung gelangen werden. Die Anzahl der Loose wird zu dem Ende in gleiche Theile getheilt. Die Loose von Nr. 1 bis 100 z. B. erhalten die Seriennummer 1; die Loose von 101 bis 200 die Seriennummer 2, u. s. w. Zu einer gewissen Zeit oder zu verschiedenen Zeiten des Jahres werden so viele Seriennummern gezogen, als, dem Verloosungsplan zufolge, herauskommen sollen, und nun wird in den öffentlichen Blättern bekannt gemacht, welche Serien gezogen worden sind. Die

Loose, welche die gezogenen Nummern enthalten, werden Serienloose genannt.

Bei der ersten Serienziehung werden so viele Zettel, als es Serien giebt, mit fortlaufenden Nummern versehen. Diese Zettel werden in ein Glücksrad gelegt, und hieraus die dem Plan entsprechende Anzahl Serienzettel gezogen, und so wird mit dem Rest derselben in den nachfolgenden Ziehungsperioden fortgefahren.

Bei der Loosziehung hat man zwei Glücksräder; in dem einen befinden sich die mit den Nummern der Serienloose, und in dem andern die mit den Zahlen der herauskommenden Summen versehenen Zettel. Gleichzeitig wird nun aus jedem Glücksrade ein Zettel gezogen, und die auf dem Gewinnstezettel stehende Summe fällt sodann auf das dem Loszettel ensprechende Loos.

Abkürzung der Ziehungen.

88. Die Gewinnstziehung kann abgekürzt werden, wenn man im Glücksrade die kleinsten Summen, welche planmäßig herauskommen sollen, wegläßt, wonach, wenn die Gewinnste gezogen sind, allen übrigen, nicht zum Vorschein gekommenen Loosen der kleinste Betrag zufällt. Z. B. nach dem Plan der badischen Lotterieanleihe vom Jahr 1840 spielen im ersten Jahre 800, in den Serienziehungen herausgekommene, Loose mit. Unter diesen 800 Loosen erhalten 700 Loose nur 65 fl. und alle übrigen mehr. Nun wird die Gewinnstziehung, in Folge gesetzlicher Anordnung, dadurch abgekürzt, daß nur 100, mit den Gewinnsten 50000, 15000, 8000 u. s. w. bezeichneten Zettel in das Glücksrad gelegt, und nur diese mit eben so viel, nämlich 100, Loosnummer-Zetteln gezogen werden. Schon bei dem badischen Lotterie-Anleihen vom Jahr 1820 ist dieses abkürzende Verfahren eingeführt worden. Der größere Theil des dabei betheiligten Publikums war mit dieser Verloosungsweise nichts weniger als einverstanden, weil man glaubte, hierdurch einem größern Zufalle in Betreff des Gewinnens ausgesetzt zu seyn. Später gewöhnte man sich daran, und man weiß es jetzt nicht anders, wie man zu sagen pflegt. Es läßt sich aber leicht darthun, daß die Betheiligten durch das in Rede stehende Verfahren in keiner Weise verkürzt werden.

Wir wollen vorerst annehmen, daß die Anzahl der Gewinnste = 2, und diejenige der Loose = 4 ist. Die den Per-

sonen A, B, C u. s. w. zugehörigen Loose sollen beziehlich durch *a*, *b*, *c* u. s. w, und der eine Gewinnst durch *m*, so wie der andere Gewinnst durch *n* bezeichnet werden.

Nun kann aus dem Glücksrade gezogen werden

erst *m* und dann *n*

und gleichzeitig aus dem Loosnummer-Rade

a und *b*, oder *a* und *c*, oder *a* und *d*
oder *b* „ *a*, „ *b* „ *c* „ *b* „ *d*
„ *c* „ *a*, „ *c* „ *b* „ *c* „ *d*
„ *d* „ *a*, „ *d* „ *b* „ *d* „ *c*

Mithin kann bei der 1ten Ziehung *a* zum Vorschein kommen, und bei der 2ten entweder *b* oder *c* oder *d*, und es kann *a* in der 2ten Ziehung zum Vorschein kommen, und dagegen in der 1ten entweder *b* oder *c* oder *d*; oder aber, es kann *b* in der 1ten Ziehung zum Vorschein kommen, und in der 2ten entweder *a* oder *c* oder *d*, oder es kann *b* in der 2ten Ziehung zum Vorschein kommen und in der 1ten *a*, oder *c* oder *d*, u. s. w. nach folgender Zusammenstellung

a b	*b a*	*c a*	*d a*
a c	*b c*	*c b*	*d b*
a d	*b d*	*c d*	*d c*
b a	*a b*	*a c*	*a d*
c a	*c b*	*b c*	*b d*
d a	*d b*	*d c*	*c d*

Hieraus geht hervor, daß kein Betheiligter vor dem andern bevorzugt ist, und dasselbe gilt auch natürlich für den Fall, wenn der Gewinnst *m* nach dem Gewinnst *n* folgt.

Ist die Anzahl der Gewinnste = 3, und werden sie durch *m*, *n* und *o* bezeichnet, so können sie in folgender Reihenfolge zum Vorschein kommen:

m n o	*n m o*	*o m n*
m o n	*n o m*	*o n m*

Ist die Anzahl der Loose = 4, und werden sie durch *a*, *b*, *c* und *d* bezeichnet, so kann für irgend eine der obigen Gewinnst-Zusammenstellungen zum Vorschein kommen bei der

1ten Ziehung	2ten Ziehung	3ten Ziehung
a	*b*	*c*
a	*b*	*d*
a	*c*	*b*
a	*c*	*d*
a	*d*	*b*
a	*d*	*c*

Oder:

b	a	c
b	a	d
b	c	a
b	c	d
b	d	a
b	d	c

Oder:

c	a	b
c	a	d
c	b	a
c	b	d
c	d	a
c	d	b

Oder:

d	a	b
d	a	c
d	b	a
d	b	c
d	c	a
d	c	b

Die Zusammenstellung für jeden einzelnen Theilhaber in Betreff der Möglichkeit des Herauskommens in der 1ten, 2ten und 3ten Ziehung ist wie folgt:

a b c	b a c	c a b	d a b
a b d	b a d	c a d	d a c
a c b	b c a	c b a	d b a
a c d	b c d	c b d	a b c
a d b	b d a	c d a	d c a
a d c	b d c	c d b	d c b
b a c	a b c	a c b	a d b
b a d	a b d	a c d	a d c
c a b	c b a	b c a	b d a
c a d	c b d	b c d	b d c
d a b	d b a	d c a	c d a
d a c	d b c	d c b	c d b
b c a	a c b	a b c	a b d
b d a	a d b	a d c	a c d
c b a	c a b	b a c	b a d
c d a	c d b	b d c	b c d
d b a	d a b	d a c	c a d
d c a	d c b	d b c	c b d

Hieraus geht ebenfalls hervor, daß die Glücksfälle für den einen Theilhaber wie für jeden andern sind, und zu demselben Schluß gelangt man für jede andere Anzahl von Betheiligten.

Verloosungsplan. 89. Der jährliche, oder überhaupt periodische, Abtrag einer Lotterieanleihe kann sich entweder gleich bleiben, in welchem Falle das Kapital der Anleihe in eine n-jährige Zeitrente aufzulösen ist, wenn die Anleihe in n Jahren getilgt werden soll; oder aber, es kann der periodische Abtrag von der ersten Periode an allmählig zunehmen, und zwar entweder in beliebigen Zahlen oder nach einem bestimmten Gesetze. Soll z. B. der erste Abtrag x jährlich um p von 1 zunehmen, ist das Kapital $= k$ und der Zinsfuß der Anleihe $= q$, so ist der Abtrag des

$$\begin{aligned} &1\text{ten Jahres} = x \\ &2\text{ten} \quad \text{,,} \quad = x\,(1+p) \\ &3\text{ten} \quad \text{,,} \quad = x\,(1+p)^2 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &n\text{ten} \quad \text{,,} \quad = x\,(1+p)^{n-1} \end{aligned}$$

Die Summe der zum Zinsfuß q berechneten gegenwärtigen Werthe dieser Abträge muß dem Kapital der Anleihe gleich seyn (§. 79); daher

$$k = x\left\{\frac{1}{1+q} + \frac{1+p}{(1+q)^2} + \frac{(1+p)^2}{(1+q)^3} + \ldots \frac{(1+p)^{n-1}}{(1+q)^n}\right\}$$

und

$$(1+p)\,k = x\left\{\frac{1+p}{1+q} + \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^2 + \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^3 + \ldots \left(\frac{1+p}{1+q}\right)^n\right\}$$

Bezeichnet man die Summe der in der Klammer befindlichen Reihe durch r, so ist

$$(1+p)\,k = r\,x \text{ und } x = \frac{(1+p)\,k}{r}$$

Ist demnach das Verhältniß der Vermehrung des erstmaligen Kapitalabtrags, das Kapital der Anleihe und der Zinsfuß desselben gegeben, so läßt sich vermittelst obiger Formel der erstmalige Kapitalabtrag x bestimmen. Bei obiger Herleitung wurde übrigens vorausgesetzt, daß die Auszahlungen gleich nach erfolgter Ziehung stattfinden, was aber in der Regel nicht der Fall ist, indem solche gewöhnlich 3 Monate, 6 Monate ꝛc. später erfolgen. Bei der Berechnung des erstmaligen Abtrags hat man aber hierauf keine Rücksicht zu nehmen, weil in Ansehung der Verzinsung des Gesammtkapitals der Tag der Ziehung vertragsgemäß als Zahlungstermin betrachtet wird. Die

Anordnungen in Betreff der Festsetzung und Repartition der Gewinnste, der Ziehungen für die Serien und Gewinnste, der Zeit der Auszahlungen ꝛc., können überhaupt sehr mannigfaltig seyn.

Der Plan einer Lotterieanleihe wird entweder von der Regierung entworfen, oder letztere überläßt dieß dem Uebernehmer der Loose, in welch' letzterm Falle sie in Betreff der jährlichen Zahlungen, der kleinsten auf die Mehrzahl der Loose zu vertheilenden Summen u. s. w. Grenzen vorschreibt. Als Beispiel hierzu diene folgender Auszug aus dem Gesetz von 21ten Februar 1845 über die Aufnahme eines Kapitals von 14000000 fl. für die großherzogl. badische Eisenbahnschuldentilgungskasse.

Artikel 1. Die Eisenbahnschuldentilgungskasse ist ermächtigt, auf den Grund des ihre Errichtung betreffenden Gesetzes vom 10. September 1842, unter Aufsicht und Leitung des Finanzministeriums, eine Staatsschuld von vierzehn Millionen Gulden zu contrahiren.

Artikel 2. Das Anlehen soll durch Verkauf von Loosen gemacht, vom 1. April 1846 an zu drei und ein halb Procent, in halbjährigen Raten zahlbar, verzinst und in mindestens 30 bis höchstens 40 Jahren getilgt werden.

Artikel 3. Die Verzinsung und Tilgung des Anlehens hat durch Einlösung der verkauften Loose mittelst Entrichtung des auf jedes derselben fallenden Gewinnstes zu geschehen.

Artikel 4. Den Nennwerth eines Looses, die Zahl der Jahre, binnen welcher mit Rücksicht auf die Vorschrift des Art. 2 die Einlösung sämmtlicher Loose erfolgen wird, die Zahl der Ziehungen, mittelst welcher die Loose zur Einlösung bezeichnet werden, die Zahl der Loose für jede Ziehung, den Betrag der Gewinnste für jede Ziehung im Einzelnen und im Ganzen setzt der Verloosungsplan fest.

Dabei müssen folgende Bestimmungen zur Anwendung kommen:

1) Die Loose sollen alle den gleichen Nennwerth, und zwar einen solchen von mindestens fünfunddreißig Gulden erhalten.

2) Es sollen vom 1. April 1846 an jährlich oder halbjährlich Loosziehungen stattfinden und die gezogenen Loose je am 1. April des nächstfolgenden Jahres, beziehungsweise am 1. October des laufenden und am 1. April des nächstfolgenden

Jahres, durch Berichtigung der auf sie fallenden Gewinnste eingelöst werden.

3) Kein Gewinnst soll weniger betragen als der Nennwerth eines Looses nebst den bis zur Zeit der Heimzahlung erwachsenden einfachen Zinsen von zwei Procent jährlich.

4) Die Gesammtsumme der jährlich zu berichtigenden Gewinnste soll entweder forthin beiläufig gleich bleiben oder aber vom ersten Jahre an bis zum Schlusse der Tilgung Jahr für Jahr allmählig zunehmen. Im letztern Falle darf die Gesammtsumme der Gewinnste im ersten Jahre nicht unter fünfmalhunderttausend Gulden betragen.

5) Die Anlehenssumme, die daraus fällig werdenden, in halbjährigen Raten zu berichtigenden Zinsen und die in gleicher Weise zu leistenden Zinsen von jenen Zinsbeträgen, welche nach dem Verloosungsplan nicht zur Verfallzeit, sondern erst in spätern Terminen bezahlt werden, müssen durch die Gewinnste der Gesammtheit der Loosinhaber vollständig zu gut kommen.

Nach dem von dem Anlehensübernehmer entworfenen und von der Regierung genehmigten Verloosungsplane finden viermal im Jahre, nämlich Ende Februar, Mai, August und November die Serienziehungen, und viermal im Jahre, nämlich Ende März, Juni, September und December die Gewinnziehungen statt. Die Zahlungen der Ende März und Juni gezogenen Summen erfolgen am 1ten October desselben Jahres, und die Ende September und December gezogenen Summen werden am 1ten April des folgenden Jahres ausgezahlt. Die Art der Repartition der Gewinnste, welche sich im Verlaufe sämmtlicher Tilgungsperioden ziemlich gleich bleibt, ist aus folgender Anordnung für die vier ersten Gewinnziehungen zu ersehen.

1. Ende März. Zahlung 1. Oct. 1846			2. Ende Juni. Zahlung 1. Oct. 1846			3. Ende September Zahlung 1 Apr. 1847			4. Ende December Zahlung 1. Apr. 1847		
Loose à fl.		fl.	Loose à fl.		fl.	Loose à fl.		fl.	Loose à fl.		fl.
1 . . .		50000	20	1000	20000	1 . . .		50000	20	1000	20000
1 . . .		15000	480	70	33600	1 . . .		15000	480	70	33600
1		5000	500	42	21000	1		5000	500	42	21000
4	2000	8000				4	2000	8000			
13	1000	13000				13	1000	13000			
20	250	5000				20	250	5000			
250	50	12500				250	50	12500			
1710	42	71820				1710	42	71820			
2000		180320	1000		74600	2000		180320	1000		74600

Die Anleihe wird sammt den Zinsen in 40 Jahren getilgt; der Nominalwerth eines Looses ist 35; daher die Anzahl der Loose = 400000, und die Anzahl der Serien ist = 8000. Die Summe der jährlichen Tilgungsbeträge ist im

1ten Jahre	554100	21ten Jahre	509840
2ten „	559520	22ten „	509840
3ten „	562230	23ten „	509840
4ten „	564940	24ten „	509840
5ten „	670400	25ten „	509840
6ten „	674025	26ten „	509840
7ten „	732200	27ten „	509840
8ten „	740400	28ten „	514540
9ten „	746300	29ten „	514540
10ten „	752200	30ten „	514540
11ten „	961700	31ten „	514660
12ten „	972200	32ten „	516080
13ten „	1105950	33ten „	518790
14ten „	1417600	34ten „	521500
15ten „	1433500	35ten „	529920
16ten „	1451450	36ten „	532630
17ten „	1469400	37ten „	535340
18ten „	1485300	38ten „	540760
19ten „	1493250	39ten „	543470
20ten „	1503000	40ten „	546180

Die Nichtangabe des Zinsfußes bei Lotterieanleihen in den Bekanntmachungen und Tilgungsanordnungen derselben, wie solche schon vorgekommen ist, namentlich wieder beim königl. sardinischen Anleihen vom Jahr 1844, läßt sich nicht rechtfertigen. Diejenigen, welche sich mit dem Handel solcher Papiere befassen, verstehen es schon, den Zinsfuß herauszurechnen, und für die eigentlichen Mitspieler ist lediglich der Curs entscheidend, zu welchem sie die Loose kaufen können.

Anleihen durch Zeitrenten und Leibrenten.

90. Bei der Erhebung eines Kapitals gegen Annuitäten oder Zeitrenten (§. 67) wird die Schuld in einem bestimmten Zeitraume durch jährliche gleiche Kapitalabträge getilgt. Die Berechnung des Kapitals, der sogenannten Mise, für eine gegebene Rente, oder der Rente für eine gegebene Mise nach dem bedungenen Zinsfuße muß mit Berücksichtigung der Zinseszinsen angestellt werden (§. 79). Soll z. B. die Mise für eine

Rente von 800 fl. für 10 Jahre zum Zinsfuß 4 berechnet werden, so hat man die gegenwärtigen Werthe sämmtlicher Rentenzahlungen zu addiren. Die Summe ist die gesuchte Mise.

Die gegenwärtigen Werthe sind

für das

1te	Jahr	=	fl. 769,23
2te	„	=	„ 739,64
3te	„	=	„ 711,19
4te	„	=	„ 683,84
5te	„	=	„ 652,54
6te	„	=	„ 632,25
7te	„	=	„ 607,93
8te	„	=	„ 584,55
9te	„	=	„ 562,06
10te	„	=	„ 540,45

Die Summe derselben ist = fl. 6488,68

Giebt nun der Darleiher (der Rentenirer) 6488,68 fl. her, so erhält er jährlich 800 fl.; mit der 10ten Auszahlung ist daher die ganze Schuld getilgt. Da der Rentenirer für 6488,68 fl, welche er (à fonds perdu, wie man zu sagen pflegt) hergiebt, jährlich 800 fl. ausgezahlt erhält, so macht dieß von jedem Hundert des Kapitals 12,32 Procent; er zieht also 7,32 Procent mehr aus seinem Kapital, als bei der gewöhnlichen Kapitalanlage, wenn wir bei dieser den Zinsfuß 5 annehmen. Wer keine Erben zu berücksichtigen hat, oder nicht gesonnen ist, sein Kapital zu vermachen, kann daher auf obige Weise sein Kapital besser als durch die gewöhnliche Anlage benützen, riskirt aber dabei, nichts übrig zu behalten, wenn er sein ganzes Vermögen gegen eine Zeitrente hergegeben hat, und diese überlebt. Diesem Risico kann er aber ausweichen, wenn er mit dem Uebernehmer des Kapitals den Vertrag schließt, daß ihm die Rente lebenslänglich ausgezahlt werde; bei einer solchen Rente, der Leibrente (§. 67), wird aber begreiflich auf das Alter dessen, welcher sie sich verschaffen will, in so fern Rücksicht genommen, als man hieraus vermittelst der sogenannten Mortalitätstabelle zu ersehen hat, wie viele Jahre für die übrige Lebenszeit des zur Acquirirung einer Leibrente sich Anmeldenden angenommen werden dürfen.

Ist, allgemein, das aufgenommene Kapital = k, die Anzahl der Termine = n, der Zinsfuß = p, und der jährliche Ab-

trag $= z$, so schuldet der Anleiher nach Verlauf des 1ten Termins $k(1+p)-z$; nach Verlauf des 2ten Termins schuldet derselbe

$(k(1+p)-z)(1+p)-z = k(1+p)^2-(z(1+p)+z)$;

nach dem 3ten Termine beträgt die Schuld

$(k(1+p)^2-(z(1+p)+z))(1+p)-z =$
$k(1+p)^3-(z(1+p)^2+z(1+p)+z)$;

und nach dem $n$ten Termine beträgt die Schuld

$k(1+p)^n-(z(1+p)^{n-1}+z(1+p)^{n-2}+\ldots.z)$
$= k(1+p)^n-\frac{z((1+p)^n-1)}{p}$

Ist nun nach dem $n$ten Jahre die Schuld getilgt, so ist

$$k(1+p)^n-\frac{z((1+p)^n-1)}{p}=0.$$

Hieraus lassen sich folgende Formeln herleiten:

$$n=\frac{log.\frac{z}{z-pk}}{log.(1+p)};$$

$$z=\frac{pk(1+p)^n}{(1+p)^n-1};$$

$$k=\frac{z}{p}\left(1-\frac{1}{(1+p)^n}\right)$$

$$p=\frac{z}{k}\left(1-\frac{1}{(1+p)^n}\right)$$

Soll z. B. berechnet werden, in wie viel Jahren eine Schuld von 8000 fl. getilgt wird, wenn jährlich 1000 fl. abgetragen werden, und wenn der Zinsfuß zu 5 Procent bedungen ist, so hat man nach der ersten Formel $k=8000$, $z=1000$, $p=\frac{5}{100}$

und $n=\frac{log.\,5-log.\,3}{log.\,1{,}05}=\frac{0{,}2218487}{0{,}0211893}=10{,}46$ Jahre.

Ist die Mise 10000 fl., der Zinsfuß 5 und die Zeit 12 Jahre, und soll hieraus die Rente bestimmt werden, so hat man nach der zweiten Formel

$$z=\frac{\frac{1}{20}.10000\,(1{,}05)^{12}}{(1{,}105)^{12}-1}=\frac{\frac{1}{20}.10000.1{,}7958}{1{,}7958-1}=1128{,}29\text{ fl.}$$

Wird in der zweiten Gleichung $z=\frac{pk(1+p)^n}{(1+p)^n-1}=\frac{pk}{1-\frac{1}{(1+p)^n}}$

angenommen, daß die Anzahl n der Jahre unendlich groß ist, so wird $\frac{1}{(1+p)^n} = 0$ und $z = pk$; d. h. die Rente ist alsdann dem Betrage der Interessen des Kapitals gleich; daher die Benennung immerwährende Rente (§. 67) in Beziehung auf die jährlichen Interessen aus solchen Staatspapieren, zu deren Einlösung der Staat sich nicht verbindlich gemacht hat.

Soll die Mise für eine Rente von 800 fl. für 10 Jahre zum Zinsfuß 4 berechnet werden, so hat man nach der dritten Formel

$$k = \frac{800}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{(1{,}04)^{10}}\right) = 6489{,}72 \text{ fl.}$$

Der Zinsfuß wird nach der vierten Formel durch Näherung gefunden, indem man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens die muthmaßlichen Werthe für p setzt, und daraus den Werth auf der andern Seite des Gleichheitszeichens berechnet, was so lange fortgesetzt wird, bis die Werthe auf beiden Seiten mit dem erforderlichen Grade der Genauigkeit übereinstimmen.

Zur Abkürzung der bei der Zeitrente vorkommenden Berechnungen giebt es Tabellen, welche für verschiedene Zinsfüße die Kapitalien angeben, welche zur Amortisirung eines als Einheit angenommenen Kapitals in einer gegebenen Zeit jährlich zu entrichten sind; wie z. B folgende:

Jahre.	3	4
1	1030	1040
2	522,61	530,20
3	353,53	360,35
4	269,03	275,50
5	218,36	224,63
6	184,60	190,76
7	160,51	166,61
8	142,46	148,53
9	128,43	134,49
10	117,23	123,29

u. s. w.

Die für obige Tabelle angenommene Einheit ist 1000; wonach also z. B. in 8 Jahren eine Schuld von 1000 fl. zum Zinsfuß 4 getilgt wird, wenn jährlich 148,53 fl. entrichtet werden; der Mise 1000 entspricht also eine 8-jährige Rente im Betrage von 148,53. Soll berechnet werden, wie viel jährlich gezahlt werden muß, um in 10 Jahren eine Schuld von 100000 fl. nebst den 4-procentigen Zinsen zu tilgen, so muß die der Zeit und dem Zinsfuße entsprechende Hülfszahl aufgesucht, und im Verhältniß der Kapitaleinheit zu dieser Zahl das gegebene Kapital verkleinert werden; die fragliche Zahl ergiebt sich daher aus der Proportion:

$$1000 : 123{,}29 = 100000 : x = 12329$$

Wird nach dem Kapital gefragt, welches in einer gegebenen Zeit durch jährlich gleiche Abträge getilgt wird, so wird auf ähnliche Art verfahren. Ist z. B. der Abtrag 12329 fl., der Zinsfuß = 4 und die Zahl der Jahre = 10, so wird in der Tabelle nachgesucht, mit welchem jährlichen Abtrag 1000 fl. in 10 Jahren mit den 4-procentigen Zinseszinsen amortisirt werden; diese Zahl ist 123,29; der gegebene Abtrag muß also im Verhältniß von dieser Zahl zur Kapitaleinheit vergrößert werden; daher die Proportion:

$$123{,}29 : 1000 = 12329 : x = 100000$$

Wird die Zeit gesucht, so muß das gegebene Kapital auf die in der Tabelle angenommene Kapitaleinheit zurückgeführt werden; die Zahl der Jahre, welche neben dem zur Kapitaleinheit gehörigen Abtrage steht, giebt die gesuchte Zeit. Z. B. ein Kapital von 100000 fl. ist mit den 4-procentigen Zinseszinsen durch jährliche Abträge von 12329 fl. getilgt worden; es fragt sich, wie oft diese Abträge gezahlt worden sind. Die Zurückführung auf die Kapitaleinheit geschieht durch die Proportion:

$$100000 : 12329 = 1000 : x = 123{,}29$$

und dieser Zahl entspricht die Zeit von 10 Jahren.

Obige Hülfstabelle enthält die einer als Einheit angenommenen Mise (1000) entsprechende Renten; man kann aber auch die Tabelle in der Weise construiren, daß sie die einer als Einheit angenommenen Rente entsprechende Misen angiebt. So enthält z. B. die folgende Tabelle für die Zinsfüße 3 und 4 die der Rente 1 entsprechende Misen.

Jahre.	3	4
1	0,97088	0,96154
2	1,91347	1,88610
3	2,82862	2,77510
4	3,71719	3,62990
5	4,57971	4,45183
6	5,41720	5,24214
7	6,23029	6,00206
8	7,01970	6,73275
9	7,78611	7,43534
10	8,53021	8,11090

u. s. w.

Soll z. B. vermittelst dieser Tabelle berechnet werden, wie viel jährlich gezahlt werden muß, um in 10 Jahren eine Schuld von 100000 fl. nebst den 4-procentigen Zinseszinsen zu tilgen, so hat man die Proportion:

$$8{,}1109 : 1 = 100000 : x = 12329$$

in Uebereinstimmung mit dem vermittelst der ersten Tabelle gefundenen Resultate.

Die Tabellen reichen gewöhnlich bis auf 100 Jahre; wird aber das Kapital einer Zeitrente für eine noch größere Anzahl von Terminen gesucht, so läßt sich die für eine kleinere Anzahl von Terminen berechnete Tabelle gleichwohl auch für diesen Fall in Anwendung bringen.

Ist die Rente $= 1$, der Zinsfuß $= p$, und die Anzahl der Jahre $= n$, so wird der Werth der Rente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \cdots \frac{1}{(1+p)^n}$$

Bezeichnet man die Summe dieser Reihe durch $\int \frac{1}{(1+p)^n}$, so ist

$$\int \frac{1}{(1+p)^n} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{1}{(1+p)^3} + \cdots \frac{1}{(1+p)^n}$$

In gleicher Weise ist

$$\frac{1}{(1+p)^n} \int \frac{1}{(1+p)^{x-n}} = \frac{1}{(1+p)^n} \left(\frac{1}{1+p} + \right.$$

$$\frac{1}{(1+p)^3} + \ldots \frac{1}{(1+p)^{x-n}}) = \frac{1}{(1+p)^{n+1}} + \frac{1}{(1+p)^{n+2}} + \ldots \frac{1}{(1+p)^x}$$

Daher

$$\int \frac{1}{(1+p)^n} + \frac{1}{(1+p)^n} \int \frac{1}{(1+p)^{x-n}} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \ldots \frac{1}{(1+p)^x}$$

Ist z. B. $n = 100$ und $x = 120$, so ist $x - n = 20$ und

$$\int \frac{1}{(1+p)^{100}} + \frac{1}{(1+p)^{100}} \int \frac{1}{(1+p)^{20}} = \int \frac{1}{(1+p)^{120}}$$

Nehmen wir an, daß die letzte der obigen Tabellen nur bis zum 8ten Jahre reiche, und daß man das Kapital einer 10jährigen Rente von 1 fl. zum Zinsfuß 3 bestimmen solle.

In diesem Falle ist $n = 8$, $x = 10$, $x - n = 2$ und

$$\int \frac{1}{(1+p)^8} + \frac{1}{(1+p)^8} \int \frac{1}{(1+p)^2} = \int \frac{1}{(1+p)^{10}}$$

Nun ist ferner $\int \frac{1}{(1+p)^8} = 7{,}0197$, $\frac{1}{(1+p)^8} = 0{,}7894$ und $\int \frac{1}{(1+p)^2} = 1{,}91347$; das gesuchte Kapital ist daher

$$7{,}0197 + 0{,}7894 \times 1.91347 = 8{,}53019$$

was bis auf 0,02 mit der Angabe der Tabelle übereinstimmt.

Die zweite der im Anhang befindlichen Tabellen enthält die gegenwärtigen Werthe der Rente 1 zum Zinsfuß 3, 4, 5 und 6 für 1 bis 100 Jahre.

91. Werden, wie im §. 76 angenommen worden, außer dem zur Tilgung bestimmten Kapitale auch die Zinsen der getilgten Kapitalien zur Tilgung verwendet, so läuft dieß auf dasselbe hinaus, als wenn der Tilgungsfonds $= p\,k + z$ wäre, und die Zinsen der getilgten Kapitalien nicht zur Tilgung verwendet würden. Setzt man daher in der obigen Formel

$$n = \frac{log.\ \frac{z}{z - p\,k}}{log.\ (1+p)}$$

$z = p\,k + z'$, so ist $n = \frac{log.\ \frac{p\,k + z'}{z'}}{log.\ (1+p)}$

in Uebereinstimmung mit der im §. 77 hergeleiteten Formel. Anleihen gegen Zeitrenten und Leibrenten sind daher in ihrer Wirkung vollkommen den Anleihen gleich, welche verzinslich sind, und bei welchen eine jährliche, um die Zinseszinsen anwachsende Kapitalabtragung statt findet. Sie schließen aber, wie alle vertraggemäß in Terminen rückzahlbaren Anleihen die Benutzung günstiger Verhältnisse zur Herabsetzung des Zinsfußes aus, und sie sind daher für den Staat nicht so vortheilhaft, als das später erfundene System der immerwährenden Renten (§. 67). Die Herabsetzung oder Reduction der Zinsen ist nämlich bei denjenigen Schulden, welche die Regierung kündigen darf, ohne Verletzung der den Gläubigern zustehenden Rechte in so fern statthaft, als man ihnen die Wahl lassen kann, entweder ihre Forderungen binnen einer bestimmten Zeit einzuziehen, oder ihre Kapitalien zu einem geringern Zinsfuße stehen zu lassen.

In England kommen die Annuitäten neuerer Zeit auch in Verbindung mit verzinslichen Anleihen vor. Der Curs der Zeitrenten hängt begreiflich vom jeweiligen Zinsfuße und von der Dauer des Rentengenusses ab.

Anleihen durch Tontinen.

92. Die Tontinen (§. 67) unterscheiden sich in so fern von den Leibrenten, als sie auf die Lebensdauer einer Gesellschaft gestellt sind; sie sind demnach gesellschaftliche Renten, die unter die Betheiligten, welche in Klassen von Personen gleichen Alters einzutheilen sind, nach Kopfzahl vertheilt werden, bis endlich der zuletzt Lebende sie allein empfängt.

Die Tontine sollte nach der Idee ihres Erfinders Lorenz Tonti als Mittel zu Staatsanleihen dienen, wozu sie auch von der französischen Regierung benützt wurde. Durch ein arrêt du conseil vom 5. Juli 1770 wurden alle Staatstontinen aufgehoben, weil man sie für nachtheilig für den Staat erkannte, und die noch laufenden Tontinenrenten wurden in Leibrenten verwandelt (s. Encyclopédie méthodique Tom. III Art. Tontines).

In unserer Zeit werden die Tontinen, in unterschiedlichen Modificationen, als Versorgungsanstalt (V. II.) errichtet.

V. Vom Verkehr mit Staatspapieren.

Cursnotirung der Staatspapiere.

93. Der Curszettel der Staatspapiere entsteht auf dieselbe Weise, wie derjenige der Wechsel (§. 49).

Gewöhnlich wird der Curs aus sämmtlichen Geschäften einer und derselben Art als Durchschnittspreis oder Mittelpreis (cours moyen) berechnet.

Hat der Curszettel die Rubriken „Geld" und „Papier", so zeigt die erste Aufschrift an, daß sich für die betreffenden Papiere zu den unter dieser Rubrik verzeichneten Cursen Kauflustige vorfanden, und die zweite Aufschrift zeigt an, daß die betreffenden Papiere zu den unter dieser Rubrik verzeichneten Cursen als Waare angeboten, und dafür zu haben waren.

Die Einheit ist entweder ein bestimmtes Nominalkapital (gewöhnlich 100), und bei Lotterieloosen der Nominalwerth eines Looses, oder aber es ist bei derartigen Papieren der Curs vom Loos zu verstehen.

In Paris und London sind die laufenden Zinsen im Curs mitbegriffen. Wenn z. B. die französischen fünfprocentigen Renten, die halbjährlich am 22ten März und 22ten September bezahlt werden, am 22ten Juni zu 99 notirt sind, so ist der Curs eigentlich nur 97 Franken 75 Cent, weil die dreimonatlichen Zinsen im Betrage von 1 Fr. 25 Cent. im Curs mitbegriffen sind. Dieser Zinsbetrag wird im Französischen jouissance genannt, und die Cursnotirung ist in Beziehung auf obiges Beispiel: Rentes cinq pour cent consolidés, jouissance du 22 mars 99.

In manchen Curszetteln werden auch die am Börsentage stattgefundenen Schwankungen der Curse angemerkt. Z. B der Frankfurter Curszettel der Staatspapiere giebt unter der gemeinschaftlichen Rubrik, „Geld" den niedrigsten und höchsten Curs an, und die unter der Rubrik „Schluß 1 Uhr" notirten Curse sind so zu verstehen, wie solche zu Ende der Börse, also in Folge des letzten Aus- oder Angebots, geblieben sind.

In Betreff der ausländischen Staatseffekten wird zur Reduction des ausländischen Geldes in inländisches gewöhnlich ein bestimmtes Verhältniß angenommen, so daß bei der Cursnotirung der ausländischen Papiere zweierlei Curse vorkommen, nämlich der unveränderliche oder fixe Curs in Betreff

der Geldreduction, und der im Curszettel enthaltene, auf jenen, gewöhnlich als bekannt vorausgesetzten, und deßhalb im Curszettel ausgelassenen fixen Curs sich gründende veränderliche Curs des Papiers. Im Frankfurter Curszettel z. B. ist die Einheit für die 3½-procentigen preußischen Staatsschuldscheine 100 Thlr. preuß., der Curs ist ebenfalls in preußischen Thalern zu verstehen, und letztere werden zu 1 fl. 45 kr. berechnet. Bei den österreichischen Papieren dagegen findet die Geldreduction nach dem Silberpari statt; d. h. die Einheit ist 100 fl. im 20-Guldenfuß, der Curs ist ebenfalls in fl. des 20-Guldenfußes zu verstehen, und letztere werden im Verhältniß von 20 : 24 oder 5 : 6 in fl. des 24-Guldenfußes verwandelt. Bei den holländischen Papieren wird der holländische Gulden dem fl. des 24-Guldenfußes gleichgesetzt. Bei den Certificaten Falconet (für neapolitanische Inscriptionen) wird der Ducado zu 2⅕ fl. des 24-Guldenfußes gerechnet; die Einheit ist 100 Ducati; der Curs in demselben Gelde ꝛc. ꝛc.

Die Verwandlung des ausländischen Geldes in inländisches geschieht auch wohl nach dem Wechselcurs auf irgend einen Platz, namentlich bei Certificaten.

Vergütung der Zinsen beim Verkauf der Papiere.

94. Die auf den Obligationen haftenden Zinsen werden beim Verkauf der Papiere vom Käufer vergütet, weil die Zinsen nur nach Ablauf der bestimmten Zahlungstermine erhoben werden können; da sie ferner der Verkäufer nach dem Nominalkapital bei der Kasse ausgezahlt erhält, so findet auch die Vergütung derselben von Seiten des Käufers nach dem Nominalkapital, und nicht nach dem cursmäßigen Kapitale statt. Bei dieser Zinsvergütung wird der Monat gewöhnlich zu 30 Tagen angenommen und der Tag, an welchem der Verkauf statt findet, bei der Zinsvergütung gewöhnlich nicht mit gerechnet.

Sind z. B. in Frankfurt a. M. 1000 fl. in 5-procentigen österreichischen Metalliques, vom Jahr —, deren Zinsen vom 1. October an laufen, zum Curs 110 (nämlich zu 110 fl. des 20-Guldenfußes für 100 fl. des 20-Guldenfußes) am 7. Januar verkauft worden, so hatte der Käufer dafür so viel zu zahlen, als sich aus folgender Rechnung ergiebt.

1000 fl. k. k. öster. Metalliques à 110 fl.	1320	—
Zinsen vom 1. Octb. = 96 Tage zu 5% „	13	20
Im 24-fl. Fuß fl.	1333	20

95. Das Kaufgeschäft in Staatspapieren ist entweder ein Tagskauf oder ein Zeitkauf. Kaufgeschäft in Staatspapieren.

Wenn sich Jemand verbindlich macht, einem Andern Papiere zu einem festgesetzten Curs sofort zu liefern, und wenn sich der Andere verbindlich macht, solche gegen sogleich zu erfolgende Zahlung anzunehmen, so heißt dieses Geschäft Tagskauf, auch fester Kauf, Comptantkauf, Kauf per Kassa, Tagsgeschäft; franz. négociation au comptant, marché au comptant. Erfolgt übrigens die Zahlung vermittelst Wechsel oder durch Abrechnung, so wird dadurch das Wesen des Geschäftes nicht geändert.

Auf größern Handelsplätzen, und da wo es die Gesetze gebieten, wird der Kaufvertrag durch Vermittlung eines Sensals geschlossen.

Umständlicher wird beim Tagskauf der inscribirten Fonds (§. 69) verfahren.

In Frankreich z. B., wo überhaupt die Negociation der Staatspapiere unter Mitwirkung von zwei Sensalen stattfinden muß, giebt Derjenige, welcher kaufen will, seinem Sensal den Betrag der Rente und das Angebot an; dieser schließt nun mit dem Sensal des Verkäufers das Geschäft ab und besorgt sodann die Umschreibung der Rente auf den Namen des Käufers.

Der Zeitkauf unterscheidet sich im Wesentlichen dadurch vom Tagskauf, daß die Ablieferung der Papiere nicht gleich beim Abschluß des Vertrags, sondern an einem bestimmten spätern Tage zu erfolgen hat. Statt Zeitkauf sagt man auch Kauf auf Lieferung, Lieferungshandel, Lieferungsgeschäft, franz. marché à terme.

96. Wenn beim Kauf auf Lieferung am festgesetzten Termin der Verkäufer die Papiere nicht liefern, oder der Käufer die erhandelten Papiere nicht abnehmen kann, so ist der betreffende Theil dadurch berechtigt, sich vom Andern die Cursdifferenz, d. h. die Differenz des bedungenen und des am Lieferungstermin statt findenden Curses auszahlen zu lassen.

A z. B. macht sich dazu verbindlich, dem B 100000 fl. in Metalliques zum Curs 100 Ende des Monats zu liefern, und B macht sich anheischig, solche gegen baare Zahlung zu übernehmen. Steht nun am Lieferungstage der Curs auf 101, so

muß A dem B 1000 fl. als Cursdifferenz vergüten, denn Letzterer könnte durch den Verkauf des Papiers 1000 fl gewinnen, weil er die Papiere, die ihm 100000 fl kosten würden, für 101000 verkaufen könnte. Ist dagegen der Curs auf 99 gefallen, so muß B dem A die Cursdifferenz vergüten, weil es für Letztern vortheilhafter wäre, wenn ihm Ersterer die Papiere abnähme. Hierdurch sind dann auch die sogenannten Differenzgeschäfte entstanden, bei welchen der Kauf fingirt ist, und die Contrahenten nur die Absicht haben, die Cursdifferenz zu vergüten. Ein solcher Vertrag ist also nichts weiter als eine Wette auf das Steigen und Fallen der Curse.

97. Der Zeitkauf ist entweder ein fester oder ein bedingter Kauf. Bei dem festen Zeitkauf wird im Vertrag der Tag bestimmt, an welchem der eine Contrahent die Papiere liefern, und der andere nehmen und bezahlen muß. Ist dagegen der eine oder andere Contrahent nicht unbedingt zur Erfüllung des Vertrags verbunden, so ist ein solcher Zeitkauf ein bedingter Zeitkauf.

Die Lieferungszeit beim festen Zeitkaufe (marché ferme) ist theils nach der Gattung der Papiere, theils nach Gewohnheiten verschieden. Gewöhnlich sind für die verschiedenen Zeitkäufe überhaupt gewisse Lieferungstermine (von 1, 2 bis 3 Monaten) allgemein angenommen. In Paris z. B. werden die Zeitkäufe auf monatliche Liquidation (oder gegenseitige Abrechnung über die in einem bestimmten Zeitraum gemachten Papiergeschäfte), nämlich ultimo des laufenden oder des nächstfolgenden Monats geschlossen. Auf den Pariser Curszetteln bezeichnen die den Cursen beigefügten Worte: fin courant und fin prochain die bei dem Zeitkaufe bedungenen Lieferungstermine; fin courant bezeichnet, daß die Lieferung auf den Letzten des laufenden Monats, und fin prochain, daß solche auf den Letzten des nächsten Monats bedungen ist.

Die Bedingungen beim bedingten Zeitkaufe betreffen entweder die Erfüllungsart, oder die Erfüllungszeit oder den Vorbehalt des Rücktritts.

Was die Erfüllungsart betrifft, so kann sich der eine Contrahent dem andern verbindlich machen, nach dessen, an einem gewissen Tage zu erklärenden Wahl, entweder eine bestimmte Summe in Papieren gegen einen zum voraus festgesetzten

Curs am bedungenen Termin zu liefern, oder eben so viel zu einem etwas höhern Preise anzunehmen. Hierbei ist es aber nicht nöthig, daß eine und dieselbe Gattung von Papieren geliefert oder bezogen werden soll, sondern es kann auch auf zwei Sorten geschlossen werden; z. B preußische Staatsschuldscheine zu liefern und Metalliques zu beziehen. Derjenige, welcher die Wahl hat, heißt Wähler, der andere Contrahent ist der Steller.

Macht sich der Wähler dazu verbindlich, einen Theil der bedungenen Papiere, und zwar zu einem höhern Curs zu beziehen, so ist der Vertrag oder Schluß fest hinsichtlich vorerwähnten Theils der bedungenen Papiere, und offen auf den übrigen Theil derselben. Der Wähler ist also berechtigt, blos jenen Theil, oder, wenn er will, die ganze Parthie sich liefern zu lassen. Der andere Contrahent macht sich sowohl für das Eine als für das Andere verbindlich, und der Wähler muß den einen Theil beziehen. Endlich kann es auch dem Wähler freigestellt werden, außer den bedungenen Papieren noch eine weitere Parthie um den nämlichen oder einen höhern Curs zu verlangen, und der andere Contrahent kann die Befugniß haben, noch eine weitere Parthie zu liefern.

Bei dem bedingten Zeitkaufe mit freier Wahl der Erfüllungszeit wird dem Käufer die Wahl der Lieferungszeit innerhalb gewisser Grenzen überlassen. Der Vertrag kann entweder dahin lauten, daß sich der Käufer die Papiere während einer bestimmten Zeit an jedem beliebigen Tage vom Verkäufer kann verabfolgen lassen, oder daß der Verkäufer erst nach Ablauf einer bestimmten Zeit verbunden ist, innerhalb einer weitern Frist die Papiere an jedem dem Käufer beliebigen Tage zu liefern.

Bei dem bedingten Zeitkaufe mit dem Vorbehalte des Rücktritts, dem sogenannten Prämiengeschäfte (marché à prime, marché libre), steht es entweder dem Käufer gegen Bezahlung der Prämie, d. h. einer in Procenten der Kaufsumme bestehenden Betrage frei, die Papiere zu nehmen oder auch nicht zu nehmen, oder es steht dem Verkäufer gegen Entrichtung der Prämie frei, die Papiere zu liefern oder nicht zu liefern.

98. Derjenige, welcher im Besitze von Staatspapieren ist, und im Augenblick Geld nöthig hat, kann sich solches in der Weise verschaffen, daß er Papiere unter der Bedingung ver-

Vom Prolongationsgeschäft u. vom Gebrauche der Staatspapiere zu Discontgeschäften.

kauft, daß sie ihm der Käufer zu einer bestimmten Zeit und zu einem zum voraus festgesetzten Curs wieder zurückliefern muß. Der Käufer hat hierbei die Absicht, Kapitalien für kurze Fristen zu verzinsen. Staatspapiere können also ebenso wie Wechsel zu Discontgeschäften benutzt werden. Ein solches Kaufgeschäft heißt Prolongationsgeschäft (marché à report). Wenn der Verkäufer die zum Rückkauf erforderliche Summe am Lieferungstermin nicht herbeischaffen kann, so muß er den Vertrag mit dem Käufer erneuern, und es muß ein neuer Preis für die am andern Termine zu liefernden Papiere bestimmt werden. In der französischen Börsensprache heißt dieß: se faire reporter. Will sich aber der betreffende Contrahent in eine solche Prolongation des Vertrags nicht einlassen, so muß ihm der zum Rückkauf verpflichtete Contrahent einen Käufer verschaffen und ihn für die etwaige Differenz der Curse, zu welchem der Dritte die Papiere kauft und er selbst sie zurück zu kaufen verpflichtet war, entschädigen.

Die Differenz der Preise bei dem Tageskaufe und dem befristeten Rückkaufe wird Report (vom Franz. report) genannt, und man versteht auch hierunter den, dieser Differenz und der Lieferungszeit entsprechenden Zinsfuß, welcher sich nach dem gleichzeitigen Discont richtet.

Z. B. A verkauft am 20. August an B 10000 fl. in 5-procentigen Metalliques zum Curs 99; B übernimmt dagegen die Verbindlichkeit, sie nach 3 Monaten zu 98⅞ zurückzuliefern, wogegen ihm die vom 1. Juli laufenden Interessen überlassen werden. A erhält also

für 10000 fl. Metalliques zu 99	9900 fl. — kr.
für Interessen vom 1. Juli bis zum 20. August, 49 Tage zu 5 Procent	68 „ 3 „
zusammen	9968 fl. 3 kr.

Am 20. November erhält A die Papiere zurück, und muß bezahlen:

für 10000 fl. Metalliques zu 98⅞ . . .	9887 fl. 30 kr.
für Interessen vom 1. Juli bis zum 20. November, 139 Tage zu 5 Procent . .	193 „ 3 „
zusammen	10080 fl. 33 kr.

B erhält also 112 fl. 30 kr. mehr als er vor 3 Monaten

ausgelegt hat. Es ist also dasselbe, als ob er einen in 3 Monaten fälligen Wechsel im Betrage von 10080 fl. 33 kr. discontirt hätte.

Der Zinsfuß oder Report ist daher $= \frac{12 \times 100 \times 112\frac{1}{2}}{3 \times 10080\frac{33}{60}} = 4{,}46$

99. Staatspapiere werden auch zur Sicherstellung von Darleihen, Wechselforderungen ꝛc. in Versatz gegeben, und zwar, je nach Umständen, zu mehr oder weniger Procenten unter ihrem Nominalwerthe. Geht der Curs unterdessen so weit herunter, daß dadurch die Papiere weniger als der beim Abschluß angenommene Werth betragen, so muß der Entlehner sofort einen Nachschuß leisten. In Paris werden solche Geschäfte, Versatzgeschäfte, Depotgeschäfte (emprunts oder prêts sur dépôt d'effets publics) gewöhnlich auf 3 Monate geschlossen, und der Entlehner muß sich dazu verbindlich machen, auf Verlangen binnen 24 Stunden Nachschuß zu leisten. Thut er dieß nicht, oder kann er am Termin die Schuld nicht tilgen, so werden die in Versatz gegebenen Renten auf Rechnung des Schuldners öffentlich verkauft. In Deutschland macht sich der Entlehner im Vertrage dazu verbindlich, auf Verlangen einen verhältnißmäßigen Nachschuß zu leisten, wenn die in Versatz gegebenen Papiere auf so und so viel (Curs) zurückgehen, unter der weitern Bedingung, daß der Darleiher befugt ist, die Papiere durch einen öffentlichen Sensalen auf der Börse verkaufen zu lassen, und sich aus dem Erlös bezahlt zu machen, oder aber die Papiere zum Tagescurs zu behalten, wenn der Schuldner seinen Verpflichtungen nicht nachkommen kann. Versatzgeschäft.

100. Die im Staatspapierhandel vorkommenden Kaufgeschäfte lassen sich auf mannigfache Weise mit einander combiniren, und hieraus entstehen die verschiedenen Börsenoperationen, welche zum Theil in der Weise stattfinden, daß sie lediglich als Hazardspiele bezeichnet werden müssen. Sämmtliche Börsenoperationen lassen sich auf die Speculation auf das Steigen (opération à la hausse) und auf diejenige auf das Fallen (opération à la baisse) zurückführen. Bei der ersten Speculationsart bringt das Steigen, und bei der andern bringt das Fallen der Curse dem Speculanten den Gewinn. Börsenoperationen in Staatspapieren.

Zur Veranschaulichung der Sache wollen wir einen habitus

der Pariser Börse die ganze Schule dieser Operationen durchmachen lassen.

Es wäre zu philisterartig für ihn, in Erwartung des Steigens der Curse Papiere zu kaufen, um sie, wenn der Curs gestiegen ist, wieder zu verkaufen, sondern er operirt, wenn wir annehmen, daß er à la hausse speculirt, und weil der Curs beim Prämienkauf höher als beim festen Kaufe ist, wie folgt.

Er kauft fest eine Rente von z. B. 3000 Franken, oder 100000 Franken in 3-procentigen Renten zum Curs 77,5 und zahlt also dafür 77500 Fr. Gleichzeitig verkauft er 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,1 auf Prämie, wonach er, wenn der Käufer die Papierie nimmt, 78100 Fr. erhält, und mithin 600 Fr. gewinnt. Nimmt aber der Käufer die Papiere nicht, und nehmen wir an, daß die bedungene Prämie 1 Procent beträgt, so muß der Käufer 1000 Fr. Prämie zahlen. In Folge dieses Prämiengewinns kommt dem Speculanten die gekaufte Rente auf 77500 — 1000 = 76500 Fr. zu stehen, und dieser Betrag entspricht dem Curs 76,5. Stellt sich der Curs unter 76,5 so verliert er, wenn er genöthigt ist, die Rente zu versilbern.

Wenn es aber wahrscheinlich ist, daß eine bevorstehende Erhöhung des Curses mehr als die Differenz betragen werde, welche dermalen zwischen den, dem festen und Prämienkaufe entsprechenden Curse stattfindet, so operirt der Speculant wie folgt.

Er kauft auf Prämie, z. B. zu 1 Procent, 100000 Franken in 3-procentigen Renten zum Curs 78,1 und verkauft sie, wenn der Curs den muthmaßlich höchsten Punkt erreicht hat, wieder fest.

Hier ist der mögliche Verlust auf den Betrag der Prämie beschränkt. Stellt sich der Curs auf 77,1, so verliert der Speculant 1000 Fr., und es ist alsdann einerlei, ob er die Papiere nimmt oder nicht; denn wenn er sie nicht nimmt, so muß er 1000 Fr. Prämie zahlen. Ist aber Curs zwischen 77,1 und 78,1, so beträgt der Verlust weniger als die Prämie.

Nehmen wir jetzt an, daß der Speculant zu einem hohen Curs gekauft hat, und daß der Curs fällt, so operirt er wie folgt, um den Verlust zu vermindern.

Er habe z. B. gekauft 100000 Fr. in 3 procentigen Renten zu 78,1 also für 78100 Fr. Fällt der Curs auf 77, so ver-

kauft er sie zu diesem Curs, also für 77000 Fr. und er hat demnach einen Verlust von 1100 Fr. Zugleich kauft er 100000 Fr. per Ende nächsten Monats zu 77,3 (einschließlich der Zinsen), wofür er 77300 Fr. zu zahlen hat, und verkauft sie gleichzeitig zu 77,85 und 1 Procent Prämie für 77850 Fr. Wird die Rente genommen, so gewinnt er 550 Fr., wodurch der frühere Verlust vermindert wird. Wird die Rente nicht gewonnen, so gewinnt er die Prämie im Betrage von 1000 Fr. Von der Kaufsumme im Betrage von 77300 Fr. gehen also ab 1000 Fr.; bleiben 76300 Fr.; hierzu der frühere Verlust von 1100 Fr. macht 77400 Fr., was dem Curs 77,4 entspricht. Demnach ist der Speculant Käufer von 100000 Fr. per Ende des nächsten Monats, die anfänglich auf 78,1 Fr. per 100 Fr. zu stehen kommen; und jetzt nur 77,4 Fr. per 100 Fr. kosten.

Lassen wir jetzt den Speculanten à la baisse operiren.

Zu dem Ende verkauft er Papiere auf Prämie à découvert, d. h. ohne sie bei dem Abschluß des Kaufvertrags zu besitzen; z. B. 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 80,05; Prämie 1½ Procent.

Fällt der Curs unter 78,55 (nämlich 80,05 — 1,5), so nimmt der Käufer die Rente nicht, und der Speculant gewinnt die Prämie im Betrage von 1500 Fr. Nimmt aber der Käufer die Rente, so muß sie der Speculant selbst erst kaufen, weil er à découvert verkauft hat. Kann er sie unter 80,05 erhalten, so gewinnt er die entsprechende Differenz; muß er aber mehr als 80,05 dafür zahlen, so hat er Verlust.

Will dagegen der Speculant vorsichtiger zu Werke gehen, so kauft er Papiere auf Prämie und verkauft sie gleichzeitig fest; denn bei dieser Speculationsart ist der mögliche Verlust auf die Differenz der dem festen Kaufe und Prämienkaufe entsprechenden Curse beschränkt. Kauft er z. B. auf Prämie zu ½ Procent 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 79,25, also für 79250 Fr., und verkauft er eben so viel fest zu 78,85, also für 78850 Fr., so kann er nicht mehr als die Differenz 400 verlieren, wenn der Curs nicht unter 78,85 fällt; fällt er aber z. B. auf 78,1, so nimmt er die auf Prämie gekaufte Rente nicht, und kauft dagegen 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu diesem Curse, also für 78100 Fr.; für die verkauften Papiere erhält er 78850 Fr.; daher ein Gewinn von 750 Fr.;

hiervon geht aber die Prämie im Betrage von 500 Fr. ab, und daher bleibt ein Gewinn von 250 Fr. übrig.

Hat der Speculant auf das Fallen operirt, und steigt der Curs, so verkauft er, um den Verlust zu vermindern, so viel auf Prämie, als er schon früher verkauft hat.

Er soll z. B. 100000 Fr. in 3=procentigen Renten zu 76 verkauft haben; der Curs steigt, und er verkauft nun eben so viel auf Prämie zu 1 Procent zum Curs 79,6.

Wird die Rente genommen, so ist er Verkäufer von 200000 Fr. zum mittlern Curs $\frac{76 + 79{,}6}{2} = 77{,}8$, und er hat daher den Curs von 76 auf 77,8 gebracht, und also um 1,8 Fr. verbessert.

Wird die Rente nicht genommen, so gewinnt er die Prämie im Betrage von 1000 Fr; wodurch der Curs um 1 Fr. aufgebessert wird.

Wenn bevorstehende Ereignisse einen bedeutenden Einfluß auf den Curs erwarten lassen, so operirt der Speculant zugleich à la hausse und à la baisse, und zwar auf verschiedene Arten.

Z. B. er kauft auf Prämie und verkauft die Hälfte der gekauften Renten fest.

Er kaufe auf Prämie zu ½ Procent 100000 Fr. in 3=procentigen Renten zu 78,2; die Hälfte hiervon verkaufe er fest zu 77,6; er hat dafür 38800 Fr. zu empfangen. Der Curs steige auf 79,95; verkauft er nun die andere Hälfte der gekauften Rente zu diesem Curs, so erhält er dafür 39975 Fr.; er erhält demnach 38800 + 39975 = 78775 Fr. und da er 78200 Fr. für die gekaufte Rente zu zahlen hat, so gewinnt er 575 Fr.

Fällt hingegen der Curs, so nimmt er die auf Prämie gekaufte Rente nicht, und kauft dagegen die zu liefernde Rente von 1500 Fr.; zahlt er dafür zum Curs 76,5 38025 Fr., so hat er einen Gewinn von 38800 — 38025 = 775 Fr; davon geht aber ab die zu zahlende Prämie im Betrage von 500 Fr., und es bleibt ihm daher noch ein Gewinn von 775 — 500 = 275 Fr.

Bei der Operation à la hausse und à la baisse kann auch der Speculant fest kaufen und doppelt so viel als er gekauft hat auf Prämie verkaufen. Er kaufe fest 50000 Fr. in 3=procentigen Renten zu 78; dafür hat er zu zahlen 39000 Fr.;

dagegen verkaufe er auf Prämie zu 1 Procent 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,7.

Wird die Rente genommen, so hat er 50000 Fr. in 3-procentigen Renten anzukaufen; ist es wahrscheinlich, daß der Curs steigen werde, so kauft er sogleich; ist der Curs im Fallen, so wartet er, mit gehöriger Berücksichtigung des Lieferungstermins so lange mit dem Ankauf, bis der Curs den muthmaßlich niedrigsten Punkt erreicht hat; steht er z. B. auf 78,7, so beträgt die Ankaufssumme 39175; seine Auslage ist daher 39000 + 39175 = 78174 Fr.; die Verkaufssumme dagegen beträgt 78700 Fr., und der Gewinn beträgt daher 525 Fr.

Wird dagegen die Rente nicht genommen, so hat der Speculant 50000 Fr. in 3-procentigen Renten zu verkaufen; ist der Curs im Fallen, so verkauft er sogleich; ist er im Steigen, so wartet er, bis er den muthmaßlich höchsten Punkt erreicht hat. Steht er z. B. auf 77,45, und verkauft er zu diesem Curs, so beträgt die Verkaufssumme 38725 Fr.; die Ankaufssumme beträgt 39000 Fr.; daher ein Verlust von 275 Fr.; da er aber die Prämie im Betrage von 1000 Fr. gewinnt, so bleibt ihm ein Gewinn von 725 Fr. übrig.

Hat unser Speculant à la hausse speculirt, und geht der Curs herunter, so verwandelt er ohne Weiteres die Speculation à la hausse in eine à la baisse, und zwar durch folgendes Manöver.

Er habe z. B. 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 80 gekauft für 80000 Fr. Fällt der Curs auf 79,5, und verkauft er zu diesem Curs für 79050 Fr., so verliert er 950 Fr. Ist es aber wahrscheinlich, daß der Curs noch tiefer fallen werde, so verkauft er eine doppelt so große Rente; er ist alsdann eines Theils Käufer von 3000 Fr. Rente, und andern Theils Verkäufer einer Rente von 6000 Fr.; er hat demnach 3000 Fr. à découvert verkauft, und er kann daher das Fallen des Curses zu seinem Vortheil benutzen.

Hat dagegen der Speculant à la baisse speculirt, und geht der Curs herauf, so verwandelt er die Speculation à la baisse in eine à la hausse auf eine dem obigen Verfahren entgegengesetzte Weise. Hat er z. B. eine Rente von 3000 Fr. zu 78 verkauft, und ist der Curs auf 78,6 gestiegen, so kauft er eine Rente von 6000 Fr. zu diesem Curs. Da er nun eines Theils Verkäufer einer Rente von 3000 Fr. und andern Theils Käufer

von 6000 Fr. Rente ist, so ist er Käufer einer Rente von 3000 Fr. zu 78,6. Das Steigen des Curses kann also theilweise oder ganz den Verlust decken, welchen die ursprüngliche Speculation zur Folge hätte haben können, und wohl gar einen Gewinn abwerfen.

Will der Speculant auf gemäßigtere Weise operiren, so kauft und verkauft er gleichzeitig gegen Prämie (opération de primes contre primes); denn diese Speculationsweise, welche die mannigfaltigsten Combinationen zuläßt, ist mit weniger Gefahr verbunden als diejenigen, bei welchen feste Käufe und Verkäufe vorkommen.

Der Speculant kaufe z. B. gegen Prämie zu 1 Procent 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,1 für 78100; gleichzeitig verkaufe er zu ½ Procent Prämie 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,9 für 78900 Fr.; daher ein Gewinn von 800 Fr., wenn die Rente von beiden Theilen genommen wird. Wird sie nicht genommen, so zahlt der Speculant eine Prämie von 1000 Fr.; und er erhält dagegen eine solche von 500 Fr.; daher ein Verlust von 500 Fr.

Die zu 78,9 verkaufte Rente kommt nach Abzug der Prämie von ½ Procent auf 78,4 zu stehen; stellt sich am Lieferungstage der Curs unter 78,4, so wird der Käufer die Rente nicht nehmen; stellt sich derselbe z. B. auf 78,2, so kann der Speculant zu diesem Curs verkaufen für 78200 Fr.; überdem erhält er die Prämie von 3000 Fr. zu ½ Procent im Betrage von 500 Fr; also zusammen 78700 Fr.; da er aber die Rente zu 78,1 für 78100 Fr. gekauft hat, so bleibt ihm ein Gewinn von 600 Fr.

Der Speculant kann auch gegen Prämie zu 1 Procent kaufen, und doppelt so viel zu ½ Procent Prämie verkaufen.

Er kaufe z. B. gegen Prämie zu 1 Procent 100000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,1, also für 78100 Fr.; gleichzeitig verkaufe er zu ½ Procent Prämie 200000 Fr. in 3-procentigen Renten zu 78,9, also für 157800 Fr.

Steigt der Curs, und ist es deswegen wahrscheinlich, daß der Käufer die Rente nehmen werde, so hat der Speculant 100000 Fr. fest zu kaufen; erhält er sie zu 78,3, so hat er 78300 Fr. dafür zu zahlen; die 200000 Fr. kommen ihm also auf 78100 + 78300 = 156400 Fr. zu stehen, und da er 157800 Fr. dafür erhält, so gewinnt er 1400 Fr.

Werden die Renten von beiden Theilen nicht genommen, so

wird weder gewonnen noch verloren, weil die Prämie von 100000 Fr. zu 1 Procent so viel beträgt, wie diejenige von 200000 Fr. zu ½ Procent.

Stellt sich der Curs unter 78,4 (Differenz zwischen 78,9 und 0,5 [½ Procent Prämie]), so wird der Käufer die Rente von 6000 Fr. nicht nehmen; stellt sich derselbe z. B. auf 78,2, so nimmt der Speculant die zu 78,1 gekaufte Rente für 78100 Fr.; diese Rente kann er zu 78,2 für 78200 Fr. verkaufen; überdem erhält er die Prämie im Betrage von 1000 Fr.; also zusammen 79200; er gewinnt demnach 79200 — 78100 = 1100 Fr.

Heuergeschäft.

101. Es läßt sich nicht verkennen, daß die im Obigen dargestellten Börsenoperationen, welche indessen nur auf einigen der größern Handelsplätze Europa's, namentlich in London, Paris, Amsterdam ꝛc. vorkommen, und dort eben so verderblich wie öffentliche Glücksspiele wirken, gut ausgedacht sind. Der Speculationsgeist ist aber in Beziehung auf Lotterieanleihen noch weiter gegangen, denn er hat dafür gesorgt, daß selbst Diejenigen, welche keine Loose besitzen, sich bei den Ziehungen betheiligen können. Dies geschieht durch Vermiethen oder Verheuren der Loose für die Dauer der Ziehung gegen eine angemessene Vergütung oder Prämie in der Weise, daß wenn mehr als die im Verloosungsplan bestimmte geringste Summe auf das Loos fällt, dem Miether der Gewinn gebührt, wonach derselbe aber dem Vermiether ein noch nicht herausgekommenes Loos, oder dessen cursmäßigen Werth zu verabfolgen hat. Der Vermiether oder Verheurer hat dabei den Vortheil, den Zinsfuß seines in Loosen angelegten Kapitals höher zu stellen, indem er einen höhern Zins einem ungewissen Gewinn vorzieht. Der Miether oder Heurer, welcher indessen die geheuerten Loose nicht in seine Hände bekommt, hat dabei den Vortheil, ohne im Besitz von Loosen zu seyn, vermittelst einer geringen baaren Einlage mitzuspielen. Zur weitern Erleichterung der Betheiligung werden auch Theile eines Looses verheuert.

Das Verheuren kann sich auch auf die Serienziehung eines Lotterieanlehens beziehen, wonach der Heuerer ein Serienloos (§. 87) erhält, wenn das von ihm gewählte und geheuerte Loos in der Serienziehung herauskommt; derselbe hat dagegen dem Verheurer ein noch nicht in der Serienziehung herausgekommenes Loos oder dessen cursmäßigen Werth zu verabfolgen.

Sowohl bei dem einen als andern Verheuren wird ein soge-

nannter Promessenschein vom Verheurer ausgefertigt und unterzeichnet, worin er sich, wenn auf die Gewinnziehung geheuert wird, verbindlich macht, die auf die geheuerten Nummern fallenden Gewinnste gegen Auslieferung eines andern Looses baar auszuzahlen, oder auch das gewinnende Loos auszuliefern, oder endlich den Ueberschuß in Beziehung auf die kleinste, auf ein Loos fallende Summe auszuzahlen. Bei dem Verheuern auf die Serienziehung macht er sich dagegen verbindlich, ein Serienloos gegen ein noch nicht herausgekommenes Loos auszuliefern, wenn die vom Heuerer gewählte Nummer in der Serienziehung herauskommt.

Berechnung des Spielwerths der Promessen.

102. Bei der Berechnung des Spielwerths der Promessen kommt es darauf an, ob die Loose in Serien eingetheilt sind oder nicht; und im ersten Falle, ob auf die Serienziehung oder auf die Gewinnziehung geheuert werden soll.

Der Berechnung des Spielwerths unter diesen verschiedenen Voraussetzungen legen wir die nachfolgenden fünf letzten Ziehungen des badischen Lotterieanleihens vom Jahr 1840 (§. 88) zum Grunde.

25te Ziehung.			26te Ziehung.			27te Ziehung.		
Loos	fl.		Loos	fl.		Loos	fl.	
1	"	35000	1	"	35000	1	"	40000
1	"	10000	1	"	10000	1	"	10000
1	"	5000	1	"	7000	1	"	7000
1	"	3000	1	"	3000	1	"	5000
2	"	3000	4	"	6000	4	"	6000
4	"	4000	5	"	5000	7	"	7000
10	"	2500	10	"	4000	10	"	3000
20	"	3000	20	"	4000	20	"	4000
30	"	3000	30	"	3000	25	"	3750
80	"	6400	77	"	6930	80	"	8000
8850	à fl. 71	628350	9650	à fl. 72	709800	11350	à fl. 73	828550
9000 Loose		fl. 703350	1000 Loose		fl. 793130	11500 Loose		fl. 922300

28te Ziehung.			29te Ziehung.		
Loos	fl.		Loos	fl.	
1	"	40000	1	"	50000
1	"	10000	1	"	15000
1	"	7000	1	"	10000
1	"	5000	1	"	5000
4	"	6000	2	"	3000
7	"	7000	5	"	5000
10	"	3000	10	"	3000
20	"	4000	20	"	4000
25	"	3750	40	"	6000
80	"	8000	128	"	18800
12350	à fl. 74	913900	12791	à fl. 75	959325
12500 Loose		fl. 1007650	13000 Loose		fl. 1073125

Nehmen wir vorerst an, daß die Loose nicht in Serien eingetheilt sind. Dem Plan zufolge sind nach der 24ten Ziehung noch 9000 + 10000 + 11500 + 12500 + 13000 = 56000 Loose vorhanden. In der 25ten Ziehung werden 9000 Loose für 703250 fl. gezogen; auf 8850 Loose zu 71 fl., als geringste Summe, kommen 628350 fl. Der Vertrag kann nun z. B. darin bestehen, daß der auf eine gewisse Nummer Spielende seine Prämie oder Einlage verliert, wenn diese Nummer mit der geringsten Summe herauskommt; daß ihm hingegen, wenn eine größere Summe auf die Nummer fällt, der Gewinn nach Abzug der geringsten auf ein Loos fallenden Summe (hier 71 fl.) ausgezahlt werde.

Nimmt man an, daß der Verheurer Besitzer der sämmtlichen noch vorhandenen 56000 Loose sey, so wird er durch die größern, auf ein Loos fallenden Rückzahlungssummen eine Einnahme von 703250 — 628350 = 74900 fl. machen. Diese Einnahme geht ihm verloren, wenn er über alle Loose Promessen ausgiebt; er erhält dagegen die Prämien, und außerdem, weil von 9000 Loosen 150 Loose mit den größern Summen herauskommen, dem angenommenen Vertrag zufolge, 71 × 150 = 10650 fl. Soll nun die Einnahme der Ausgabe gleich seyn, und also weder gewonnen noch verloren werden, was bei der Berechnung des sogenannten Spielwerths angenommen werden muß, und bezeichnet man denselben durch x, so hat man zur Bestimmung desselben die Gleichung:

$$56000\,x + 10650 = 74900, \text{ woraus } x = 1{,}14.$$

Dieser Berechnung liegt die Annahme zum Grunde, daß der Verheurer eine große Anzahl von Loosen verheuert, weil alsdann die verschiedenen Wechselfälle sich so gegen einander ausgleichen, daß sich das Verhältniß der Einnahme zur Ausgabe je mehr und mehr nähert. Soll also gewonnen werden, so muß der Miethpreis oder die Prämie höher als die berechnete Durchschnittszahl angesetzt werden.

Nach der 25ten Ziehung sind noch 47000 Loose vorhanden; unter der im Obigen angenommenen Voraussetzung ist die Ausgabe = 793130 — 709200 = 83930, und die Einnahme = $47000\,x + 150 \times 72 = 47000\,x + 10800$; daher $x = 1{,}55$.

Nach der 26ten Ziehung sind noch 37000 Loose vorhanden; die Ausgabe ist = 922300 — 828550 = 93750, und die

Einnahme $= 37000\,x + 150 \times 73 = 37000\,x + 10950$; daher $x = 2{,}23$.

Nach der 27ten Ziehung sind noch 25500 Loose vorhanden; die Ausgabe ist $= 1007650 - 913900 = 93750$ und die Einnahme $= 25500\,x + 150 \times 74 = 25500\,x + 11100$; daher $x = = 3{,}24$.

Nach der 28ten Ziehung sind noch 13000 Loose vorhanden; die Ausgabe ist $= 1073125 - 959325 = 113800$, und die Einnahme $= 13000\,x + 209 \times 75 = 13000\,x + 15675$; daher $x = 7{,}54$.

Die Spielwerthe nehmen, wie aus dem Obigen ersichtlich, mit jeder Ziehung zu, und am bedeutendsten ist der Spielwerth für die letzte Ziehung; so bedeutend stellen sich auch die Spielwerthe heraus, wenn die Loose in Serien eingetheilt sind, und wenn auf Serienloose geheuert wird, weil hier mit einer kleinern Anzahl von Loosen, die ohne Ausnahme bei der Gewinnziehung herauskommen, gerechnet wird.

Bei dem Heuern auf die Serienziehung wählt der Heuer die Serie eines in den Serienziehungen noch nicht herausgekommenen Looses und zahlt die Prämie; kommt nun das Loos in der Serienziehung heraus, so gehört dasselbe dem Heurer, und der Verheurer erhält ein anderes Loos oder die cursmäßige Vergütung.

Soll, in Beziehung auf das badische Lotterieanleihen, der Spielwerth der Promessen für die 25te Ziehung berechnet werden, und nehmen wir an, daß der Verheurer alle die noch nicht gezogenen 56000 Loose besitze, so geht ihm die ganze Rückzahlung, nämlich 703250 fl. verloren, wenn er über alle Loose Promessen ausgiebt; er erhält dagegen, wenn wir die geringste Summe, welche auf ein Loos fallt, als den Werth eines Nichtserienlooses annehmen, $9000 \times 71 = 639000$ fl.; die Promessen kommen ihm also zu stehen auf $703250 - 639000 = 64250$ fl.; der Spielwerth der Promesse für ein Loos ist demnach

$$\frac{64250}{56000} = 1{,}14.$$

Das Heuergeschäft wird übrigens häufig von Betrügern betrieben, welche Loose verheuern, die sie nicht besitzen; daher das Verbot des Verheuerns in manchen Ländern, so z. B. im Großherzogthum Baden. In der desfallsigen Verordnung vom

13ten Nov. 1823 heißt es: — „Da aber dieses Verheuern nichts anders als ein Glücksspiel, bei welchem Gewinn und Verlust von einer ungewissen Begebenheit, nämlich davon abhängt, ob die geheuerten Nummern der Partialobligationen bei der Ziehung der letztern herauskommen, mithin in dieser Hinsicht eine wahre Privat-Geldlotterie, und als solche um so verderblicher ist, als durch den vermeintlichen geringen Einsatz der Reiz zum Spielen vermehrt wird, als sie dem Spielenden keine Sicherheit gewährt, und als sie zu den gröbsten Betrügereien leichte Gelegenheit und Veranlassung giebt, so muß dieses Geschäft um so mehr den gesetzlichen Bestimmungen über Glücksspiele überhaupt und über Lotterie insbesondere unterliegen."

Versicherungsgeschäft.

103. Nachdem nun dafür gesorgt ist, daß auch Diejenigen, welche keine Loose besitzen, sich auf die Ziehung freuen können, so bliebe, um ihr Glück vollends zu gründen, nichts weiter übrig, als sie gegen die Gefahr des Nichtgewinnens zu assecuriren. In der That ist man auch, wenigstens für Diejenigen, welche Besitzer von Loosen sind, darauf bedacht gewesen, und hierdurch ist den bisherigen Operationen in Staatspapieren die Krone aufgesetzt worden!

Wenn nämlich der Curs der Partialloose höher steht, als die geringste Summe, welche bei der Ziehung auf ein Loos fällt, so verliert der Inhaber eines solchen mit der geringsten Summe herauskommenden Looses so viel, wie die Differenz in Beziehung auf den cursmäßigen Werth des Looses beträgt. Die Gefahr eines solchen Verlusts hat nun das Assecuriren gegen solchen in der Weise veranlaßt, daß gegen Zahlung einer der Gefahr angemessenen Versicherungsprämie der Versicherer sich verbindlich macht, die ihm aufgegebenen, d. h. genau bezeichneten Loose, auf Verlangen des Inhabers gegen andere, noch nicht herausgekommene Loose umzutauschen, wenn die versicherten Loose mit der geringsten Summe, oder überhaupt mit einer Summe herauskommen, welche weniger als der cursmäßige Werth eines Looses beträgt.

Dergleichen Versicherungen kommen indessen nicht blos bei den Lotterieloosen, sondern auch bei andern Papieren in Anwendung, welche im Handel über Pari stehen und daher durch Rückzahlung nach dem Nominalwerthe Verlust befürchten lassen.

Berechnung der natürlichen Versicherungsprämie.

104. Zur Berechnung der natürlichen, d. h. ohne Rücksicht auf Gewinn bestimmten Prämie, nehmen wir vorerst an, daß die Nummern in keine Serien eingetheilt sind, und es soll z. B. für die 25te Ziehung des badischen Lotterieanleihens nach dieser Voraussetzung die Berechnung angestellt werden.

Wenn der Versicherer alle Loose, also 56000 Loose versichert, so erhält er, weil 8850 Loose mit der geringsten Summe 71 herauskommen, $8850 \times 71 = 628350$ fl.; er zahlt dagegen 8850 mal so viel, als ihm ein Loos nach dem Curs zu stehen kommt; seine wirkliche Ausgabe beträgt also so viel, wie die Differenz von 628350 fl. und $8850 \times$ Curs; wird also diese Differenz durch die Anzahl der versicherten Loose getheilt, so ist der Quotient die gesuchte natürliche Prämie für ein Loos.

Auf eine ähnliche Art wird gerechnet, wenn der Gewinnziehung Serienziehungen vorhergehen.

VI. Oeffentliche Glücksspiele.

Rechtmäßige Wette.

105. Die öffentlichen Glücksspiele werden, als Regal, entweder vom Staat oder von Privatpersonen, die der Staatskasse einen Pachtzins entrichten, veranstaltet.

Der dem Einsatz des Spielers entsprechende Gewinn muß, an und für sich betrachtet, der Gefahr des Verlierens angemessen seyn, und also nach Verhältniß der dem Spieler günstigen und ungünstigen Fälle regulirt werden. So hat z. B. Derjenige, welcher darauf wettet, eine bestimmte der 6 Nummern eines Würfels zu treffen, nur den 6ten Theil des auf die Wette gesetzten Preises, oder 1 gegen 5 einzulegen, weil er unter den 6 möglichen Würfen nur einen für sich und der Gegner deren 5 für sich hat. Wenn der Gewinn auf diese Weise festgesetzt wird, so ist die Wette rechtmäßig oder pari.

Soll das Verhältniß der Einlage zum Gewinn sich nach dem Verhältniß der dem Spieler günstigen und ungünstigen Fälle richten, so muß die Anzahl dieser Fälle aus der Beschaffenheit des Spiels ermittelt werden.

Mit zwei Würfeln z. B., von welchen der eine durch A und

der andere durch B bezeichnet werde, können, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich, 36 verschiedene Würfe fallen.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Wenn nun darauf gewettet wird, daß ein bestimmter Wurf unter den 36 möglichen Würfen getroffen werde, z. B. daß der Würfel A mit 3 und der Würfel B mit 4 falle, so ist die Anzahl der günstigen Fälle = 1, und der ungünstigen = 35. Wird dagegen darauf gewettet, daß der Würfel A mit 3 oder 4, und der Würfel B mit 4 oder 3 falle, so ist die Anzahl der günstigen Fälle 2 und die der ungünstigen 34. Wird darauf gewettet, daß überhaupt die Summe 7 dieser Zahlen geworfen werde, so ist die Anzahl der günstigen Fälle = 6, und der ungünstigen Fälle = 30, weil die Zahl 7 auf sechserlei Arten aus den Zahlen von 1 bis 6 entstehen kann, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich:

A	1	2	3	4	5	6
B	6	5	4	3	2	1

Für alle übrigen Zahlen sind die Zusammenstellungen wie folgt:

A	1
B	1

A	2	1
B	1	2

A	3	2	1
B	1	2	3

A	4	3	2	1
B	1	2	3	4

A	5	4	3	2	1
B	1	2	3	4	5

A	2	3	4	5	6
B	6	5	4	3	2

A	3	4	5	6
B	6	5	4	3

A	4	5	6	A	5	6	A	6
B	6	5	4	B	6	5	B	6

Das Verhältniß der günstigen zu den ungünstigen Fällen ist also für

2 und 12 wie 1 : 35
3 „ 11 „ 2 : 34
4 „ 10 „ 3 : 33
5 „ 9 „ 4 : 32
6 „ 8 „ 5 : 31
7 „ 6 : 30

Mathematische Wahrscheinlichkeit.

106. Nach der obigen Berechnung ist bei dem Wurfe mit 2 Würfeln eher zu erwarten, daß die Zahl 7 herauskomme, als daß die Zahl 3 geworfen werde, indem erstere Zahl auf sechserlei Arten und letztere nur auf zweierlei Arten herauskommen kann. Weil mit zwei Würfeln 36 verschiedene Würfe fallen können, so wird das Maaß der Erwartung des Zutreffens für die Zahl 7 durch das Verhältniß $\frac{7}{36}$, und das Maaß des Zutreffens für die Zahl 3 durch das Verhältniß $\frac{2}{36}$ ausgedrückt, und das Maaß der Erwartung des Zutreffens eines Ereignisses ist überhaupt das Verhältniß der günstigen Fälle zu allen möglichen Fällen. Dieses Verhältniß wird *mathematische Wahrscheinlichkeit* genannt, und ist einem ächten Bruche gleich, dessen Zähler die Anzahl der günstigen, und dessen Nummer die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle ausdrückt. In Beziehung auf obiges Beispiel ist also die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 7 zu werfen, $= \frac{6}{36}$, und die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 3 zu werfen, $= \frac{2}{36}$. Ist, überhaupt, die Anzahl der einem Ereigniß günstigen Falle $= m$, und die der ungünstigen Fälle $= n$, und sind alle Fälle gleich möglich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen desselben $= \frac{m}{m+n}$, und für das Gegentheil $= \frac{n}{m+n}$. Addirt man diese beiden Wahrscheinlichkeiten, so erhält man $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} =$

$\frac{m+n}{m+n} = 1$. Weil es gewiß ist, daß die Erscheinung entweder eintreffen oder nicht eintreffen werde, so wird die Gewißheit durch die Einheit ausgedrückt, und hat man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Erscheinung gefunden, so wird sie für das Gegentheil gefunden, wenn man die erste von der Einheit abzieht. Es ist also in Beziehung auf obiges Beispiel die Wahrscheinlichkeit, daß die Zahl 7 nicht herauskommen werde, $= 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36}$, oder daß die Zahl 3 nicht herauskommen werde, $= 1 - \frac{2}{36} = \frac{34}{36}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei oder mehreren Ereignissen das eine oder das andere zutreffe, besteht begreiflicher Weise aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten eines jeden dieser Ereignisse. Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen, ist $= \frac{6}{36}$, und die Wahrscheinlichkeit, 3 zu werfen, ist $= \frac{2}{36}$; die Wahrscheinlichkeit 7 oder 3 zu werfen ist also $= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Zahlen von 2 bis 12 zu werfen, besteht aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Fälle; die Summe derselben besteht aber nach der im §. 105 angestellten Berechnung aus:

$\frac{1}{36}$	für	die	Zahl	2
$\frac{2}{36}$	"	"	"	3
$\frac{3}{36}$	"	"	"	4
$\frac{4}{36}$	"	"	"	5
$\frac{5}{36}$	"	"	"	6
$\frac{6}{36}$	"	"	"	7
$\frac{5}{36}$	"	"	"	8

$$\frac{4}{36} \text{ " " " } 9$$
$$\frac{3}{36} \text{ " " " } 10$$
$$\frac{2}{36} \text{ " " " } 11$$
$$\frac{1}{36} \text{ " " " } 12$$

und $\frac{36}{36} = 1$, als Probe für die Richtigkeit der Zusammensetzung, weil nothwendiger Weise eine von den Zahlen von 2 bis 12 mit zwei Würfeln geworfen wird.

Das Eintreffen eines Ereignisses kann auch durch das vorherige Eintreffen mehrerer andern, deren jedes seine eigene Wahrscheinlichkeit hat, bedingt seyn, und in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit des erstern dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten gleich; denn je größer oder kleiner die erste Wahrscheinlichkeit wird, desto größer oder kleiner wird auch die nachfolgende seyn. Es soll z. B. bestimmt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, aus einem Kartenspiel von 32 Karten ein Bild von bestimmter Farbe, z. B. von Eckstein, zu ziehen, wenn das Spiel nach den 4 Farben in 4 Haufen von 8 Blättern getheilt ist.

Soll der Erfolg günstig seyn, so ist es erforderlich, daß man nach dem Haufen in Eckstein greife, und hierzu ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{4}$. Nun sind aber unter den 8 Blättern dieses Haufens nur 3 Treffer enthalten, und die Wahrscheinlichkeit, einen davon zu erhalten, ist $= \frac{3}{8}$; weil man aber vorher nach dem Haufen in Eckstein gegriffen haben muß, und die Wahrscheinlichkeit, daß dies geschehe, $= \frac{1}{4}$ ist, so reducirt sich die erste Wahrscheinlichkeit auf $\frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$.

Die Zusammensetzung der Wahrscheinlichkeit durch Addition und Multiplication kann z. B. im folgenden Falle stattfinden. Es soll bestimmt werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mit zwei Würfeln das erste mal 9, und wenn dieses nicht zutrifft,

das zweite mal 8 zu werfen. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Wurf 9 gebe ist $= \frac{4}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß diese Zahl nicht herauskomme, ist $= 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$; die Wahrscheinlichkeit, daß in diesem Falle 8 geworfen werde, ist $= \frac{32}{36} \times \frac{5}{36} = \frac{10}{81}$; die Wahrscheinlichkeit, daß man das erste mal 9, und, wenn dies nicht zutrifft, das zweite mal 8 werfen werde, besteht also aus der Summe der gefundenen Wahrscheinlichkeiten und ist $= \frac{4}{36} + \frac{10}{81} = \frac{19}{81}$.

Bisher haben wir die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses an und für sich, d. h. die absolute Wahrscheinlichkeit desselben in Betrachtung gezogen; wenn man aber die Wahrscheinlichkeiten mehrerer Ereignisse mit einander vergleicht, so betrachtet man die relative Wahrscheinlichkeit derselben.

Es ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen, $= \frac{6}{36}$, und 4 zu werfen, $= \frac{3}{36}$. Wenn nun zwei Spieler auf die Bedingung mit einander spielen, daß dem ersten unter allen möglichen Würfen nur der Wurf 7, und dem andern nur der Wurf 4 als Treffer gelten solle, so kommen nur 9 mögliche Fälle hierbei in Betracht, wovon 6 zu Gunsten des Ersten, und 3 zu Gunsten des Andern. Die relative Wahrscheinlichkeit zum Gewinn ist also für den Ersten $= \frac{6}{9}$, und für den Andern $= \frac{3}{9}$. Man gelangt zu denselben Resultaten, wenn man die absoluten Wahrscheinlichkeiten eines jeden Falles durch die Summe der beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten dividirt; denn

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{6}{6+3} = \frac{6}{9}, \text{ und } \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{3}{6+3} = \frac{3}{9}.$$

Sind also überhaupt die absoluten Wahrscheinlichkeiten zweier

Ereigniſſe $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$, ſo ſind die relativen Wahrſcheinlichkeiten eines jeden dieſer Ereigniſſe beziehlich

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}} = \frac{a}{a+c}; \quad \frac{\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{c}{b}} = \frac{c}{a+c}.$$

Berechnung des Spielwerths.

107. Der Spielwerth, d. h. das Verhältniß des Gewinns zum Einſatz wird bei den öffentlichen Glücksſpielen nicht durchgehends in Uebereinſtimmung mit dem Grundſatz der rechtmäßigen Wette, ſondern kleiner angeſetzt, wie aus den nachfolgenden Unterſuchungen einiger der bekannteſten Glücksſpiele, nämlich der Zahlenlotterie und dem Rouletteſpiel beiſpielsweiſe zu erſehen.

1) Bei dem Lotto (Lotto di Genua, genueſiſche Zahlenlotterie) werden bekanntlich von 90 Nummern 5 aus dem Glücksrade gezogen, und als Treffer bezahlt, je nachdem ſie einzeln oder zu Amben, Ternen, Quaternen und Quinen beſetzt worden ſind. Es kommt alſo hier darauf an, auszumitteln, wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinen mit 90 Nummern und 5 Nummern gemacht werden können.

Es geben 90 Nummern

$$\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005 \text{ Amben},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480 \text{ Ternen},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 511038 \text{ Quaternen},$$

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4394268 \text{ Quinen}.$$

Die 5 Nummern, welche aus dem Glücksrade gezogen werden, geben:

$$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \text{ Amben},$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \text{ Ternen},$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \text{ Quaternen},$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1 \text{ Quine}.$$

Da nun unter 90 Nummern nur 5 Treffer sind, so hat man 5 günstige Fälle gegen 90 Fälle überhaupt; die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{5}{90}$ oder $\frac{1}{18}$, daß eine bestimmte Nummer, ein sogenannter Auszug oder eine Externe getroffen werde.

Kommt die Nummer, auf welche man gesetzt hat, heraus, so zahlt z. B. die königl. bayerische Lotterie die Einlage 15 mal zurück. Sollte aber die Wettung zwischen dem Spieler und dem Lotto pari seyn, so müßte die Einlage 18 mal zurückgezahlt werden; denn wenn der Spieler unter dieser Bedingung alle 90 Nummern besetzt, so bringen ihm fünf Auszüge die Einlage 90 mal zurück, so daß auf keiner Seite etwas gewonnen oder verloren wird; da aber die Einlage nur 15 mal zurückbezahlt wird, so liegt der Vortheil mit $\frac{3}{18}$ auf der Seite des Lottos.

Der bestimmte Auszug, d. h. der Auszug der Nummer in einer bestimmten Stelle von der 1ten bis zur 5ten hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{90}$, indem es ebenso ist als wenn nur eine von den fünf Nummern gezogen würde, und die Einlage wird von der bayerischen Lotterie nur 75 mal bezahlt; folglich steht sie um $\frac{15}{20}$ im Vortheil gegen den Spieler.

Weil, nach dem Obigen, mit 90 Nummern 4005 Amben, und mit 5 Nummern nur 10 Amben gemacht werden können, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man eine von denselben treffen werde $= \frac{10}{4005}$ oder $\frac{1}{400\frac{1}{2}}$.

Hiernach müßte die Einlage für eine Ambe 400½ mal, wenn sie gezogen wird, bezahlt werden; die bayerische Lotterie zahlt sie aber nur 270 mal zurück, oder die Einlage für 10 Amben wird nur 2700 mal zurückgezahlt, anstatt 4005 mal; die Lotterie steht also hierbei mit $\frac{1305}{4005}$ im Vortheil.

Man spielt auf eine bestimmte Ambe, wenn man auf eine der Verbindungen zu 2 und 2 setzt. Nach dem Obigen geben aber 90 Nummern $90 \times 89 = 8010$ solcher bestimmten Ambe; die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $\frac{1}{8010}$, und die Ein-

lage dafür wird von der bayerischen Lotterie nur 5100 mal zurück gezahlt, so daß sie dabei um $\frac{291}{801}$ im Vortheil steht.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man eine Terne treffen werde, ist nach dem Obigen $\frac{10}{117480}$ oder $\frac{1}{11748}$; für die Quaterne ist sie $\frac{3}{511038}$ oder beiläufig $\frac{1}{102207}$, und für die Quine ist sie $\frac{1}{43949268}$. Da nun die bayerische Lotterie die Ternen 5400 mal und die Quaternen 60000 mal zurückzahlt, so steht sie bei den Ternen um $\frac{6248}{11748}$, und bei den Quaternen um $\frac{42207}{102207}$ im Vortheil. Auf Quinen kann bei der bayerischen Lotterie, deren Gewinnsttarif mit denjenigen anderer Zahlenlotterien mehr oder weniger übereinstimmt, nicht gesetzt werden, weil die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens so außerordentlich klein ist. Wenn in jedem Monat 8 Ziehungen und also im Jahr 96 Ziehungen stattfänden, so würde ein Zeitraum von $\frac{43949268}{96} = 457804$ Jahren erforderlich seyn, um alle Quinen zu ziehen, wobei aber noch vorausgesetzt wird, daß sie regelmäßig nach einander und ohne Wiederholung zum Vorschein kommen. Aus demselben Grunde müßten dann aber auch die bestimmte Ambe, die Ternen und Quaternen vom Lotto ausgeschlossen seyn. *)

Der Gewinn des Lotto-Unternehmers ist indessen nicht so groß, als man aus obigen Berechnungen schließen sollte. Wenn

*) Weniger schädlich als die Zahlenlotterie ist die Classenlotterie, die man auch zur Unterscheidung vom Lotto Lotterie im engern Sinne nennt. Hier wird eine große Anzahl von Nummern oder Loosen in mehreren Ziehungen ausgespielt. Vor der ersten Ziehung werden die Loose um einen bestimmten Preis an die Spieler verkauft, und diese Loose nennt man Loose der ersten Classe. Die herausgekommenen Nummern bleiben bei der folgenden Ziehung weg, die übrigen müssen aber wieder zu einem bestimmten Preis verkauft werden, und heißen Loose der zweiten Classe, und auf gleiche Weise wird für die folgenden Ziehungen verfahren. So hat man z. B. bei der Frankfurter Stadtlotterie 6 Classen, und die Einlagen betragen für die 1te Classe 6 fl., für die 2te 14 fl., für die 3te 24 fl., für die 4te 32 fl., für die 5te 16 fl. und für die 6te 8 fl. Zur Erleichterung der Spielarten und zur Bequemlichkeit der Einleger werden ganze und getheilte Loose für jede Classe, auch ganze Loose für alle 6 Classen, letztere gegen Vorausbezahlung von 90 fl. ausgegeben; dagegen erhalten

das große Mißverhältniß zwischen dem Einsatz und dem entsprechenden Gewinn seine ganze Wirkung haben sollte, so müßte auf alle Nummern und Combinationen mit gleichen Einsätzen gespielt werden, was aber nicht geschieht. Obgleich nun, in der Regel, sowohl in Betreff der Spielarten als auch in der Auswahl der Nummern und im Betrage der Einsätze den Spielliebhabern volle Freiheit zugestanden wird, so finden doch Be-

---

die Inhaber solcher Loose, welche in einer der 5 ersten Classen herauskommen, nebst dem Gewinn die weiter vorausgezahlte Einlage wieder zurück.

Gewöhnlich ist die Einrichtung getroffen, daß in der letzten Ziehung (der sogenannten Hauptclasse, weil sie die höchsten Gewinste hat) nur eine gewisse Anzahl der gezogenen Loose gewinnen kann, und daß dagegen in allen frühern Ziehungen alle herauskommenden Nummern Treffer sind, welche (nach Ausweis des veröffentlichten Lotterieplans, wie bei den Lotterieanleihen) mehr oder weniger gewinnen.

Der Betrag der Treffer wird mit der Einnahme ausgeglichen; damit aber, nach Abzug der Unkosten dem Unternehmer ein Gewinn übrig bleibe, so werden bestimmte Procente von den Preisen abgezogen; so z. B. bei der Frankfurter Stadtlotterie von den Kapitalpreisen von 1000 fl. und aufwärts 12 Procent, und von allen andern Preisen unter 1000 fl. 10 Procent. Zur weitern Erläuterung wollen wir annehmen, daß 20000 Loose ausgetheilt werden, wovon in jeder der 4 ersten Ziehungen 1000, und in der 5ten und letzten 16000 Nummern gezogen werden. Die in den 4 ersten Classen herauskommenden Nummern sind Treffer, und in der Hauptclasse kommen nur 10000 Loose mit Gewinn, und die übrigen 6000 als Nieten heraus. Der Preis eines Looses werde wie folgt angesetzt: für die 1te Classe 1 fl., für die 2te 2 fl., für die 3te 3 fl., für die 4te 4 fl. und für die 5te 2 fl.; also zu 12 fl. für sämmtliche Classen. Die Einnahme für die 1te Classe ist also 20000 × 1 fl. = 20000 fl.; weil nach der 1ten Ziehung nur noch 19000 Loose vorhanden sind, so betragen solche zu 2 fl. 38000 fl.; ferner 18000 Loose zur 3ten Classe zu 3 fl. betragen 540000 fl. 17000 Loose zur 4ten Classe zu 4 fl. betragen 68000 fl. und endlich 16000 Loose zur 5ten Classe zu 2 fl. betragen 32000 fl.; die Gesammteinnahme ist mithin = 212000 fl.

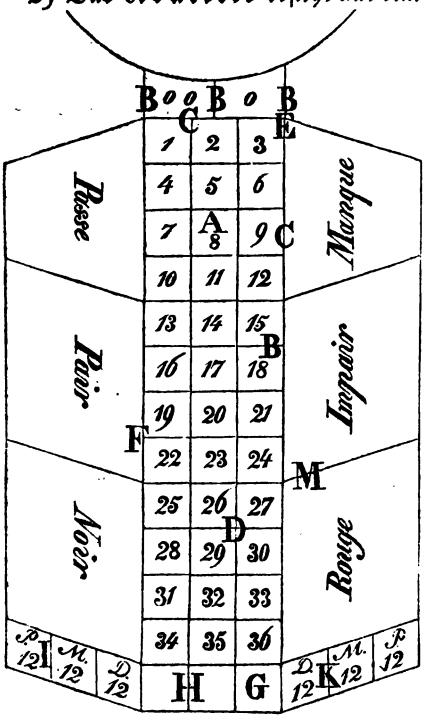
Die Vertheilung der Gewinnste kann also, wenn die Summe derselben die Einnahme ausgleichen soll, wie folgt angeordnet werden:

Für die	1te	Classe fl.	8000
" "	2te	" "	10000
" "	3te	" "	14000
" "	4te	" "	20000
" "	5te	" "	160000
		zusammen fl.	212000

Wären die Preise nach dem Ertrag des Gewinns für jede Classe festgesetzt worden, so würden die Loose der 4 ersten Classen wohlfeiler,

schränkungen statt, in so fern solche durch das Zusammentreffen vieler gleicher Spielarten oder überspannte Einsätze für nothwendig erachtet werden.

2) Das Roulette besteht aus einem kreisförmigen Behälter im Mittelpunkte einer Doppeltafel. Das Roulette und die Tafel sind in 38 Fächer eingetheilt, deren jedes eine der Zahlen von 1 bis 36, die einfache Null (zéro simple) (0), und die doppelte Null (zéro double) (00) enthält, aus welchen 38 Zeichen die Combinationen des Spiels hergenommen sind.



Die eine Hälfte dieser Zahlen ist grade (pair), die andere ungrade (impair), und eben so ist die eine Hälfte der Fächer, die in dem Rou-

---

dagegen das Loos für die 5te Classe, und der Preis für die sämmtlichen Classen höher gebracht worden seyn, wie aus folgender Berechnung zu ersehen.

1te	Classe	8000	fl.	für	20000	Loose	macht	für 1 Loos	fl.	$\frac{2}{5}$
2te	"	10000	"	"	19000	"	"	" 1 "	"	$\frac{10}{19}$
3te	"	14000	"	"	18000	"	"	" 1 "	"	$\frac{7}{9}$
4te	"	20000	"	"	17000	"	"	" 1 "	" 1	$\frac{3}{17}$
5te	"	160000	"	"	16000	"	"	" 1 "	" 10	

zusammen fl. $12\frac{12799}{14535}$

Um nämlich den Absatz der Loose für die letzte Classe sicher zu stellen, läßt man nicht nur die höchsten Preise darin gewinnen, sondern man schlägt auch den Verkaufspreis für die Loose zu den niederen Classen höher als bei der letzten Classe an, wodurch es möglich wird, diese unter dem Werth zu geben, den sie nach Verhältniß des wahrscheinlichen Gewinns besitzen. Ein weiteres Reizmittel zur Weckung der Spiellust sind die sogenannten Freiloose, welche den in jeder einzelnen Classe gewinnenden Nummern für die nächste Ziehung unentgeldlich verabfolgt werden.

lette enthalten sind roth (rouge), die andere schwarz (noir).

Einer der Spielgehülfen (croupiers) läßt den Theil des Roulette, welcher Cylinder heißt, und die mit Zahlen bezeichneten Fächer enthält, auf einem Zapfen sich im Kreise bewegen, wobei er die Zuschauer (galerie) zum Spielen einladet; hierauf läßt er eine elfenbeinerne Kugel in den andern unbeweglichen Theil des Roulette rollen, aber in einer Richtung, welche der Bewegung des Cylinders entgegengesetzt ist. Ist die Kugel in eines der Fächer gefallen, so ruft der das Spiel leitende Croupier die herausgekommene Zahl sogleich aus, mit Beifügung der Benennung der Glücksstellen (chances), die alle von dieser Zahl abhängen, nämlich: rouge oder noir, pair oder impair, passe oder manque.

Die einfache Null ist rouge-impair; die doppelte Null ist noir-pair; die einfache Null und alle Zahlen von 1 bis 18 werden zu manque; die doppelte Null und alle Zahlen von 19 bis 36 werden zu passe gerechnet.

So giebt es also auf dem Roulette 6 einfache, in der Abbildung durch ihre Benennungen bezeichnete Einsatzstellen, nämlich rouge, noir, pair, impair, passe und manque.

Auf den drei obenbemerkten, jeweils beim Fallen der Kugel herauskommenden Glücksstellen gewinnt man den einfachen Werth des Einsatzes; die andern drei entgegengesetzten verlieren. In diesem Falle ist also der Gewinn nach dem Grundsatz der rechtmäßigen Wette angesetzt, denn die Hälfte der Zahlen von 1 bis 36 nebst der einfachen Null sind roth, und die andere Hälfte der Zahlen von 1 bis 36 nebst der doppelten Null sind schwarz; die einfache Null und die Zahlen von 1 bis 18 werden zu manque und eben so viele Zahlen (von 19 bis 36) nebst der doppelten Null werden zu passe gerechnet; sodann besteht die Zahl 36 aus 18 graden und 18 ungraden Zahlen, wozu noch die einfache Null als ungrade, und die doppelte Null als grade Zahl gerechnet wird. In allen diesen Fällen ist also die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen der besetzten Stellen $=\frac{1}{2}$, wonach auf einen günstigen ein ungünstiger Fall kommt.

Setzt man auf eine Linie, welche zwei einfache Einsatzstellen trennt z. B. M, so gewinnt man nur dann, wenn beide Ein-

satzstellen durch eine der Zahlen, von welchen sie abhängen, herauskommen.

Setzt man z. B. auf die Linie zwischen manque und impair, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß manque und impair herauskommen, $= \frac{10}{38}$. Denn weil 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 manque, und 00, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 passe sind, so muß eine der ungraden Zahlen der ersten Reihe herauskommen, wenn gewonnen werden soll; die Anzahl der darin enthaltenen ungraden Zahlen ist $= 10$; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{10}{38}$; also das Verhältniß der günstigen zu den ungünstigen Fällen $= 10 : 28 = 1 : 2\ ^4/_5$.

Bei dieser Spielart gewinnt man nur den einfachen Werth des Einsatzes; man gewinnt und verliert dagegen nichts (und man kann also über den Einsatz verfügen), wenn entweder manque oder impair herauskommt, was auch für die übrigen solcher Einsatzstellen gilt.

Weil ferner in der Reihe von passe 10 grade Zahlen enthalten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß passe und pair herauskommen, $= \frac{10}{38}$, also dieselbe, welche für manque und impair herausgekommen ist.

Setzt man auf die Linie zwischen rouge und impair, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß rouge und impair herauskommen, ebenfalls $= \frac{10}{38}$; denn

rouge sind die Zeichen 0, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36
noir „ „ „ 00, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 34, 35.

Soll also gewonnen werden, so muß eine von den in der Reihe der rothen Zahlen enthaltenen ungraden Zahlen herauskommen; die Anzahl derselben ist $= 10$; daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{10}{38}$. Weil endlich in der Reihe der schwar-

zen Zahlen 10 grade Zahlen enthalten sind, so ist auch für pair und noir die Wahrscheinlichkeit $= \frac{10}{38}$.

Außer den obigen 6 einfachen Einsatzstellen giebt es auf dem Roulette noch 10 andere, welche in der Figur mit Buchstaben bezeichnet, und deren Benennungen wie folgt sind: en plein; à cheval; transversale pleine; carré; transversale à cinq numéros; transversale à six numéros; bas de colonnes; entre deux colonnes; sur les numéros dits 12 premiers; sur les numéros dits 12 du milieu; sur les numéros dits 12 derniers; sur 24 numéros.

Man spielt en plein, wenn man auf eine beliebige Zahl setzt; z. B. A. Kommt die Zahl heraus, so erhält man das Sechsunddreißigfache des Einsatzes (den Einsatz mitbegriffen.) Die Wahrscheinlichkeit für das Herauskommen der Zahl ist aber $= \frac{1}{38}$, weil die Anzahl der Zeichen $= 38$ ist, die Bank ist daher um $\frac{2}{38} = \frac{1}{19}$ im Vortheil.

Man spielt à cheval, wenn man auf die Linie setzt, welche zwei Zahlen trennt, z. B. B. Kommt eine der durch diese Linie getrennten Zahlen heraus, so erhält man das Achtzehnfache des Einsatzes; die Wahrscheinlichkeit ist aber $\frac{2}{38}$ oder $\frac{1}{19}$.

Man spielt transversale pleine, wenn man setzt:

1) auf die äußere Linie von 3 Zahlen, z. B. C;

2) auf den Mittelpunkt der Linie, welche die Null von den Zahlen 1 und 2, oder 2 und 3 trennen;

3) auf den Mittelpunkt der Linien, welche die einfache und doppelte Null von der Zahl 2 trennen, wie in der Figur durch den Buchstaben C angedeutet ist.

Wer hier gewinnt erhält das Zwölffache des Einsatzes; die Wahrscheinlichkeit ist aber $\frac{3}{38}$ oder $\frac{1}{12\frac{2}{3}}$.

Man spielt ein carré, wenn man auf den Durchschnittspunkt von 2 Linien setzt, welche 4 verschiedene Zahlen trennen, z. B. D. Kommt eine davon heraus, so erhält man das Neunfache des Einsatzes; die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{4}{38} = \frac{1}{9\frac{1}{2}}$.

Die transversale à 5 numéros wird gespielt, wenn man auf die Querlinie setzt, welche die einfache und doppelte Null von den Zahlen 1, 2 und 3 trennt; z. B. E. Kommt eine dieser Nullen oder Zahlen heraus, so erhält man das Siebenfache des Einsatzes, die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{5}{38} = \frac{1}{7\frac{3}{5}}$.

Setzt man auf die Querlinie von 6 Zahlen (transversale à 6 numéros), z. B. F. so erhält man, wenn eine dieser Zahlen herauskommt, den Sechsfachen Einsatz; die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{6}{38} = \frac{1}{6\frac{1}{3}}$.

Wenn man in eines der leeren Fächer unten an den Zahlreihen setzt, z. B. G, und eine der Zahlen, welche in der daran stoßenden Reihe enthalten ist, (die Null ausgenommen) herauskommt, so erhält man den dreifachen Einsatz; die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{12}{38} = \frac{1}{3\frac{1}{6}}$.

Setzt man auf die Linie, welche zwei dieser leeren Fächer trennt, z. B. H., und kommt eine der 24, in beiden entsprechenden Reihen enthaltenen Zahlen heraus, so erhält man $1\frac{1}{2}$ mal den Einsatz; die Wahrscheinlichkeit ist $= \frac{24}{38} = \frac{1}{1\frac{7}{12}}$.

Ebenso verhält es sich mit den Fächern, die sich unten an den einfachen Einsatzstellen befinden, und auf die 12 ersten (d. h. 1 bis 12), 12 mittlern (13 bis 24) und 12 letzten 25 bis 36) Zahlen Bezug haben. Sie sind en plein mit I, und à cheval mit K bezeichnet. Die Spielregeln sind dieselben wie für das de colonnes.

Kommt zéro-rouge heraus, so gewinnt der darauf stehende Einsatz das 36-fache des Einsatzes (den Einsatz mitbegriffen); nach dem Grundsatz der rechtmäßigen Wette müßte aber das 38-fache gegeben werden, weil die Anzahl sämmtlicher Zeichen = 38 ist. Der weitere Vortheil des Bankhalters besteht darin, daß wenn zéro-rouge herauskommt, nur der darauf stehende Einsatz gewinnt, und alle andern Einsatzstellen dagegen verlieren, ausgenommen rouge, impair, manque, welche weder gewinnen, noch verlieren, und also über ihren Einsatz verfügen können.

Eben so verhält es sich mit double-zéro; wer darauf setzt

gewinnt, wenn sie herauskommt das Sechsunddreißigfache; alle andern Einsatzstellen verlieren, ausgenommen wer auf noir, pair, passe gesetzt hat. In Folge dieser besondern Spielregel modificiren sich daher auch die meisten der im Obigen berechneten Wahrscheinlichkeiten zum Vortheil des Bankhalters.

Mathematische Hoffnung.

108. Hat man bei dem Zutreffen eines ungewissen Ereignisses, für welches man m günstige und n ungünstige Fälle hat, eine Summe g zu erwarten, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen $\frac{m}{m+n}$, und der Werth der ungewissen Summe g ist $= \frac{m}{m+n} \times g$. Ein solches Produkt, wovon der eine Faktor aus einer ungewissen Summe und der andere aus der Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, besteht, giebt den Werth der Erwartung oder die mathematische Hoffnung. *)

*) Der Vortheil, welchen ein Gewinn Jemanden verschafft, hängt übrigens von seinem Vermögensstande ab. So ist z. B. ein Gewinn von 100 fl. für eine Person, welche 1000 fl. besitzt, von keinem größern Vortheil als ein Gewinn von 1000 fl., für eine andere Person, welche 10000 fl. im Vermögen hat. Wenn ferner bei der Werthsbestimmung eventueller Summen das vorhandene Vermögen in Anschlag gebracht wird, so ist eine und dieselbe Summe von größerer Wichtigkeit wenn man sie verliert als wenn man sie gewinnt. Besitzt man z. B. 1000 fl. und verliert man 500 fl., so wird dadurch das Vermögen auf die Hälfte heruntergebracht; wenn man aber 500 fl. gewinnt, so wird dadurch das Vermögen nicht verdoppelt, sondern es beträgt in diesem Falle 1000 + 500 = 1500 fl., und es verhält sich das jetzige Vermögen zum anfänglichen Vermögen wie

$$1500 : 1000 = 1 : \tfrac{2}{3}$$

Das Verhältniß des jetzigen Vermögens zum anfänglichen Vermögen im Falle des Verlusts ist dagegen

$$1000 : 500 = 1 : \tfrac{1}{2}$$

Die Differenz dieser Verhältnisse ist $= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, und mithin wird durch den Verlust von 500 fl. das Vermögen um $\frac{1}{6}$ stärker vermindert, als durch den Gewinn von 500 fl. vergrößert.

Hier läßt sich die Frage aufwerfen, wie groß der Verlust seyn müsse, um bei einem bestimmten Vermögen von gleicher Wichtigkeit mit einem bestimmten Gewinn zu seyn.

Bezeichnet a das Vermögen und g den Gewinn, so wird das Verhältniß des Gewinns zu dem dadurch vermehrten Vermögen durch

Soll z. B. Jemand 30 Gulden erhalten, wenn er mit einem gewöhnlichen Würfel eine bestimmte der 6 Nummern desselben trifft, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Zutreffen $= \frac{1}{6}$, und folglich der Werth seiner Erwartung oder die mathematische Hoffnung $= \frac{1}{6} \times 30 = 5$, und die mathematische Hoffnung für das Gegentheil ist $= \frac{5}{6} \times 30 = 25$.

Anderes Beispiel. Es befinden sich 16 Zettel in einer Urne; 8 derselben sind mit einer der Zahlen von 1 bis 8, und die übrigen mit Null bezeichnet. Wer gegen die Einlage von 3 Gulden einen derselben ziehen will, kann so viel Gulden gewinnen, als die Zahl dieser Zettel angiebt. Es fragt sich, wie viel die Erwartung werth ist.

Die Wahrscheinlichkeit für irgend einen der Zettel ist $\frac{1}{16}$. Man kann demnach für die Wahrscheinlichkeit

---

$\frac{g}{a+g}$ ausgedrückt; bezeichnet x den gesuchten Verlust, so ist $\frac{x}{a}$ das Verhältniß des Verlusts zum anfänglichen Vermögen; daher aus

$$\frac{x}{a} = \frac{g}{a+g}$$

$$x = \frac{a\,g}{a+g}$$

Ist z. B. $a = 300$ und $g = 60$, so ist der Verlust $= \frac{18000}{360} = 50$. Durch den Verlust 50 reducirt sich das Vermögen auf 250; durch den Gewinn 60 stellt sich das Vermögen auf 360; das Verhältniß der Verminderung ist daher $\frac{250}{300} = \frac{5}{6}$, und das Verhältniß der Vermehrung ist ebenfalls $= \frac{300}{360} = \frac{5}{6}$. Aus der Gleichung

$$x = \frac{a\,g}{a+g}$$

folgt

$$x = \frac{g}{1+\frac{g}{a}}$$

Der Werth von x nähert sich also dem Werth von g um so mehr, je kleiner der Bruch $\frac{g}{a}$ ist; mithin können Gewinn und Verlust bei gleicher Größe nur in dem Falle von gleicher Wichtigkeit seyn, wenn sie im Verhältniß zum anfänglichen Vermögen unendlich klein sind.

1	Gulden	zu	ziehen	$\frac{1}{16}$	Gulden	geben
2	"	"	"	$\frac{2}{16}$	"	"
3	"	"	"	$\frac{3}{16}$	"	"
4	"	"	"	$\frac{4}{16}$	"	"
5	"	"	"	$\frac{5}{16}$	"	"
6	"	"	"	$\frac{6}{16}$	"	"
7	"	"	"	$\frac{7}{16}$	"	"
8	"	"	"	$\frac{8}{16}$	"	"

für alle Treffer folglich $\frac{36}{16} \times 2\frac{1}{4}$ fl.

Dieses Resultat stimmt mit der Annahme überein, daß 16 Spieler sich dazu vereinigen, eine solche Urne zu veranstalten und um ihre Preise zu ziehen. Denn in diesem Falle müßte Jeder $2\frac{1}{4}$ fl. dazu einlegen, und es würde also Jeder gleichmäßig $2\frac{1}{4}$ fl. daran wagen, mehr oder weniger bis zu 8 Gulden dafür zurück zu ziehen.

Derjenige, welcher die Urne zu 3 Gulden für die Einlagen ausstellt, gewinnt also $\frac{3}{4}$ Gulden an jeder Einlage, in der Erwartung, und muß, der Wahrscheinlichkeit gemäß, durchschnittlich in 16 Spielen 12 Gulden, als dem Unterschied von $2\frac{1}{4}$ mal 16 und 3 mal 16, auf die Dauer in der Wirklichkeit gewinnen. Auf diesen wahrscheinlichen Erfolg, den die Erfahrung sogar in den meisten Fällen zur Gewißheit macht, sind die öffentlichen Glücksspiele berechnet. Und so klein auch der Vortheil zu seyn scheint, welcher den Unternehmern eingeräumt wird, wenn sie die Gewinnste etwas geringer als nach dem Grundsatz der rechtmäßigen Wette ansetzen, so sichert er denselben doch einen ansehnlichen Gewinn auf die Dauer, vorausgesetzt, daß sie die erforderlichen Mittel haben, um den ungewöhnlichen Unglücksfällen, die von Zeit zu Zeit eintreten,

begegnen zu können. Bei dem Trente-un-Spiele *) z. B. ist der Vortheil des Bankhalters für jedes einzelne Spiel nur $\frac{11}{1000}$ jedes Einsatzes; weil aber bei diesen Spielen in wenigen Stunden eine sehr große Anzahl von Parthien gespielt werden können, so entspringt daraus für den Bankhalter doch ein sicherer Gewinn, und wofür in Paris eine Pacht von 5 bis 6 Millionen bezahlt werden konnte. Nach Poisson **) waren dieses und ähnliche Spiele noch verderblicher als die Lotterie; denn die darin auf's Spiel gesetzte Kapitalsumme betrug jedes Jahr mehrere hundert Millionen Franken und überstieg bei weitem die Summe, welche in die ganze französische Lotterie gesetzt wurde.

*) Die Combinationen dieses Spiels, welches in Deutschland auch Rouge et noir genannt wird, sind einfacher als diejenigen des Roulette-Spiels. Es giebt nämlich hier nur vier einfache Einsatzstellen, die rouge et noire, couleur et contre-couleur ou inverse genannt werden. Die Regeln und Gewinnste sind bei diesen Einsatzstellen dieselben, wie bei den einfachen Einsatzstellen des Roulette; d. h. der Gewinner zieht das Doppelte des Einsatzes, diesen mitbegriffen. Zum Spiele selbst bedient man sich sechs gewöhnlicher, aber vollständiger Kartenspiele, deren also jedes 52 Karten enthält.

**) In seinem Werke: Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Paris 1837.

III.

Zahlenverhältnisse der Bevölkerung.

Specifische Bevölkerung.

109. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines Landes, und B die Einwohnerzahl desselben, so ist, im Durchschnitt, die der Einheit des Flächeninhalts entsprechende Einwohnerzahl $= \frac{B}{F}$. Bezeichnen ferner f, f' f'' u. s. w. die Flächeninhalte der einzelnen Landestheile, und beziehlich b, b', b'' u. s. w. die Einwohnerzahlen derselben, so sind, im Durchschnitt, die der Einheit des Flächeninhalts entsprechenden Einwohnerzahlen derselben $\frac{b}{f}$, $\frac{b'}{f'}$, $\frac{b''}{f''}$ u. s. w. Setzt man π, π', π'' u. s. w. für letztere Werthe, und P für $\frac{B}{F}$, so sind

P, π, π', π'', u. s. w. die specifischen Bevölkerungen, oder, wenn man diese Größen durch P dividirt,

1, $\frac{\pi}{P}$, $\frac{\pi'}{P}$, $\frac{\pi''}{P}$ u. s. w. die mit P verglichenen specifischen Bevölkerungen des Landes.

Die Kenntniß der specifischen Bevölkerung ist aber erforderlich, wenn der Grad der Dichtigkeit der Bevölkerung der einzelnen Theile eines Landes bei statistischen Fragen in Erwägung gezogen werden muß.

Als Beispiel hierzu diene die im Annuaire du Bureau des Longitudes vom Jahr 1843 enthaltene Tabelle der specifischen Bevölkerung Frankreichs.

Die der Construction der Tabelle, nach der letzten Volkszählung, zu Grunde gelegte Einwohnerzahl des ganzen Landes ist 34213929, und da der Flächeninhalt der 86 Departements = 527686,19 Quadrat-Kilometer, so ist, in Beziehung auf obige Bezeichnung,

$$\frac{B}{F} = P = \frac{3421392900}{52768619} = 64{,}838$$

Die auf 1 Quadrat-Kilometer kommenden Einwohnerzahlen der Departements Seine, Norden, Rhône ꝛc. sind beziehlich 2512,42, 191,12, 179,45 ꝛc.; daher, in Beziehung auf obige Bezeichnung,

$$\pi = 2512{,}42,\ \pi' = 191{,}12,\ \pi'' = 179{,}45 \text{ ꝛc.}$$

und also, wenn man diese und die nachfolgenden Werthe durch $P = 64{,}838$ dividirt,

$$\frac{\pi}{P} = 38{,}856,\ \frac{\pi'}{P} = 2{,}947,\ \frac{\pi''}{P} = 2{,}767 \text{ u. s. w.}$$

Die Werthe von π und $\frac{\pi}{P}$ können wie folgt zusammengestellt werden.

Namen der Departements.	Werthe von π.	Werthe v. $\frac{\pi}{P}$
Seine	2512,42	38,756
Norden	191,12	2 947
Rhône	179,45	2,767
Nieder-Seine	122,32	1,888
⋮	⋮	⋮
Ober-Saône	65,47	1,010
Lot and Garonne	65,40	1,009
Tarn und Garonne	65,21	1,006
Frankreich überhaupt	64,84	1
Laône und Loire	64,40	0,994
Morbihan	63,79	0,984
Jura	63,74	0,983
⋮	⋮	⋮
Lozère	27,35	0,422
Corsica	25,32	0,391
Ober-Alpen	23,96	0,370
Nieder-Alpen	22,86	0,353

Bewegung der Bevölkerung.

110. Die Bewegung Bevölkerung ergiebt sich aus dem Verhältniß der Geburten zu den Sterbfällen. Zu dieser Art von Untersuchungen diene beispielsweise nachfolgendes Verzeichniß der in den Jahren 1817 bis 1840 in Frankreich stattgefundenen Geburten und Sterbfälle.

Jahre.	Geburten				Summe der Geburten.	Sterbfälle		Summe der Sterbfälle.	Vermehrung der Bevölkerung.
	ehel. Kinder		unehel. Kinder						
	männl.	weibl.	männl.	weibl.		männl.	weibl.		
1817	456570	425002	31887	30666	944125	382813	365410	748223	195902
1818	440972	414332	30216	58335	913855	376412	375495	751907	161948
1819	475651	446606	33660	32001	987918	398260	389795	788055	199863
1820	460463	432121	33915	32434	958933	389822	380884	770706	188227
1821	463069	432803	34552	32934	963358	377062	374152	751214	212144
1822	465274	437774	35820	33928	972796	391443	382719	774162	198634
1823	460807	433552	35710	33952	964021	376101	366634	742735	221286
1824	471490	441488	36280	34894	984152	385785	377821	763606	220546
1825	468151	436413	35381	34011	973986	400444	397568	798012	175974
1826	471837	445883	37061	35410	993101	449613	416045	835658	157533
1827	469209	440219	36093	34670	980196	399864	391261	791125	189071
1828	465745	440098	35924	34780	976547	421956	415189	837145	139402
1829	460887	434289	35276	34075	964527	405366	398087	803452	161074
1830	461757	436820	35229	34018	967824	408545	401285	809830	157994
1831	472614	442684	36415	34996	986709	405902	396859	802761	183948
1832	449096	421413	34422	33255	938186	466109	467624	933733	4453
1833	464140	434345	36460	35038	969983	408970	403578	812548	157435
1834	470958	441973	37760	35799	986490	462158	455670	917828	68662
1835	474098	445008	38270	36457	993833	414625	410788	816413	177420
1836	467002	439816	37436	36066	979820	390380	381320	771700	208120
1837	450039	423481	35308	34521	943349	440007	438694	878701	64648
1838	459513	431874	5359	34739	961476	426899	419300	846199	115277
1839	456571	430816	36094	34259	957740	391765	388835	780600	177140
1840	453559	428516	35815	34428	952318	410853	405633	816486	135832

Aus obiger Zusammenstellung lassen sich Folgerungen ziehen in Beziehung auf das Verhältniß der Geburten beider Geschlechter, auf den Einfluß des Clima's auf die Geburten, auf die mittlere jährliche Bewegung der Bevölkerung, und auf das Verhältniß der jährlichen Elemente der Bevölkerung.

Während der 24 Jahre von 1817 bis 1840 sind 11962811

Knaben und 11252522 Mädchen geboren worden; das Verhältniß beider Zahlen iſt ziemlich genau $\frac{17}{16}$, wonach, im Durchſchnitt, um $\frac{1}{16}$ mehr Knaben als Mädchen zur Welt gekommen ſind. Was die unehelichen Kinder betrifft, ſo ſind während deſſelben Zeitraums 850339 Knaben und 815666 Mädchen geboren worden; das Verhältniß dieſer Zahlen iſt ziemlich genau $\frac{24}{23}$, wonach bei dieſer Klaſſe von Kindern die Anzahl der Geburten der Mädchen ſich derjenigen der Knaben mehr als bei den ehelichen Kindern (in Frankreich) zu nähern ſcheint.

Was den Einfluß des Clima's auf das Verhältniß der Geburten betrifft, ſo wollen wir im Norden Frankreichs die 8 Departements Aiſne, Ardennen, Moſel, Norden, Oiſe, Pas-de Calais, Nieder-Seine und Somme, und im Süden des Landes die 15 Departements Ariège, Aude, Rhonemündungen, Gard, Ober-Garonne, Gers, Hérault, Landes, Nieder-Pyrenäen, Ober-Pyrenäen, Oſt-Pyrenäen, Tarn, Tarn und Garonne, Var und Vaucluſe in dieſer Beziehung mit einander vergleichen. In den genannten 8 nördlichen Departements ſind während des Zeitraums von 1817 bis 1840 1682345 Knaben und 1582179 Mädchen geboren worden, und dieſe Zahlen verhalten ſich wie 17 : 15,988 oder wie 1,06331 : 1. In den genannten 15 ſüdlichen Departements ſind während deſſelben Zeitraums 1666147 Knaben und 1569273 Mädchen zur Welt gekommen, und dieſe Zahlen verhalten ſich wie 17 : 16,012 oder 1,06173 : 1. Man erhält ungefähr dieſelben Verhältniſſe für einen Zeitraum von 5, 10 und 15 Jahren. Aus dem kleineren Unterſchied dieſer Verhältniſſe von 1,06331 und 1,06173 für das nördliche und ſüdliche Frankreich geht hervor, daß das Clima keinen merklichen Einfluß auf das Uebergewicht der Geburten der Knaben im Vergleich mit denjenigen der Mädchen zu haben ſcheint.

Die mittlere jährliche Bewegung der Bevölkerung ergiebt ſich aus folgender Tabelle, welche durch Diviſion der Zahl 24 in die den verſchiedenen Elementen der vorigen Tabelle entſprechenden Zahlen entſtanden iſt.

$$\text{Geburten}\begin{cases}\text{Eheliche Kinder} & \begin{cases}\text{Knaben } 463020\\ \text{Mädchen } 434869\end{cases} & 897889\\ \text{Uneheliche Kinder} & \begin{cases}\text{Knaben } 35431\\ \text{Mädchen } 33986\end{cases} & 69417\\ \text{Ehel. und uneheliche Kinder.} & \begin{cases}\text{männl.}\\ \text{weibl.}\end{cases}\text{Geschl.}\begin{matrix}498451\\ 468855\end{matrix} & 967306\end{cases}$$

$$\text{Sterbfälle}\begin{cases}\text{männlichen}\\ \text{weiblichen}\end{cases}\text{Geschlechts}\begin{matrix}406298\\ 399652\end{matrix}\Big\} 805950$$

$$\text{Zunahme der Bevölkerung}\begin{cases}\text{Knaben } 92153\\ \text{Mädchen } 69203\end{cases}\Big\} 161356$$

Aus der obigen Zusammenstellung der Geburten und Sterbfälle von 1817 bis 1840 lassen sich ferner die Verhältnisse der jährlichen Elemente der Bevölkerung wie in folgender Tabelle zusammenstellen:

$$\text{Geburten}\begin{cases}\text{Eheliche Kinder} & \begin{cases}\text{Knaben } 16\\ \text{Mädchen } 15{,}027\end{cases}\\ \text{Unehel. Kinder} & \begin{cases}\text{Knaben } 24\\ \text{Mädchen } 23{,}021\end{cases}\\ \text{Eheliche und uneheliche Kinder} & \begin{cases}\text{Knaben } 17\\ \text{Mädchen } 15{,}991\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{Kinder}\begin{cases}\text{Eheliche } 12{,}934\\ \text{Uneheliche } 1\end{cases}$$

$$\text{Sterbfälle}\begin{cases}\text{männlichen}\\ \text{weiblichen}\end{cases}\text{Geschlechts}\begin{matrix}61\\ 60{,}002\end{matrix}$$

$$\text{Vermehrung der Bevölkerung}\begin{cases}\text{Knaben } 0{,}00287 = \frac{1}{848}\\ \text{Mädchen } 0{,}00216 = \frac{1}{464}\\ \text{Überhaupt } 0{,}00503 = \frac{1}{199}\end{cases}$$

$$\text{Eine Geburt auf}\begin{cases}\text{Einwohner } 33{,}1\\ \text{Sterbfälle } 0{,}83\end{cases}$$

$$\text{Ein Sterbfall auf}\begin{cases}\text{Einwohner } 39{,}8\\ \text{Geburten } 1{,}2\end{cases}$$

Aus obiger Tabelle entnehmen wir folgendes:

Die Geburten der ehelichen Knaben und Mädchen verhalten sich wie 16 : 15,027, und diejenigen der unehelichen Knaben wie 24 : 23,021, und die Geburten der Knaben und Mädchen überhaupt wie 17 : 15,991.

Das Verhältniß der ehelichen und unehelichen Kinder ist 12,934 : 1, wonach ungefähr auf 130 eheliche Kinder 10 uneheliche Kinder kommen.

Die Zahl der Sterbfälle der Einwohner männlichen Geschlechts ist größer als diejenige des weiblichen Geschlechts; das Verhältniß ist 61 : 60,002.

Was die Zunahme der Bevölkerung betrifft, so haben die Knaben einen größeren Antheil daran als die Mädchen; die Knaben sind dabei um $\frac{1}{348}$ und die Mädchen nur um $\frac{1}{464}$ betheiligt, und die Zunahme überhaupt beträgt $\frac{1}{199}$. Denn die mittlere Volksmenge für die 24 Jahre von 1817 bis 1840 ist, wenn man die Zunahme der Bevölkerung berücksichtigt und von den Resultaten der in den Jahren 1820, 1831, 1836 und 1841 vorgenommenen Volkszählungen (beziehlich 30451187, 32560934 33540910 und 34213929) ausgeht = 32080000; die mittlere Anzahl der Sterbfälle ist 805950, und die mittlere Anzahl der Geburten ist 967306; die Zunahme der Bevölkerung durch Geburten beträgt mithin $\frac{967306}{32080000}$, und die Abnahme der Bevölkerung durch Sterbfälle beträgt $\frac{805950}{23080000}$; die Abnahme durch Sterbfälle ist kleiner als der Zuwachs durch Geburten, und mithin ist die Zunahme der Bevölkerung

$$= \frac{967306}{32080000} - \frac{805950}{32080000} = \frac{161356}{32080000} = \frac{1}{199}.$$

Weil auf 32080000 Einwohner 967306 Geburten kommen, so kommt eine Geburt auf $\frac{32080000}{967306} = 33{,}1$ Einwohner, und weil auf 967306 Geburten 805950 Sterbfälle kommen, so kommt eine Geburt auf $\frac{805950}{967306} = 0{,}83$ Sterbfälle.

Weil ferner auf 32080000 Einwohner 805950 Sterbfälle kommen, so kommt ein Sterbfall auf $\frac{32080000}{805950} = 39{,}8$ Einwohner, und weil auf 967306 Geburten 805950 Sterbfälle kommen, so kommen auf einen Sterbfall $\frac{967306}{805950} = 1{,}2$ Geburten.

Weil auf 33,1 Einwohner eine Geburt, und auf 39,8 Einwohner ein Sterbfall kommt, so ist das Verhältniß der Einwohnerzahl zur Zahl der Geburten 33,1 : 1, und das Verhältniß der Einwohnerzahl zur Zahl der Sterbfälle 39,8 : 1, und aus diesen Verhältnissen läßt sich wieder zurück auf die Bevölkerung schließen und die Größe derselben beiläufig bestimmen. Erfährt man z. B. daß in einer Stadt, auf welche obige Verhältnisse der Geburten und Sterbfälle passen, binnen Jahresfrist p Personen gestorben sind, so ergiebt sich die Einwohner-Zahl aus der Proportion $1 : 39{,}8 = p : x$, wonach $x = 39{,}8\,p$. Oder ist die Anzahl der Geburten $= q$, so ergiebt sich die Einwohnerzahl aus der Proportion $1 : 33{,}1 = q : x$, wonach $x = 33{,}19$.*)

Kommt überhaupt auf m Einwohner ein Sterbfall, und auf n Einwohner eine Geburt, so wird $\frac{1}{m}$ für das Maaß der Sterblichkeit, und $\frac{1}{n}$ für das Maaß der Fruchtbarkeit angesehen. Es wird auch gewöhnlich angenommen, daß die Bevölkerung im Beharrungszustande ist, d. h. sich gleich bleibt, wenn $\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ oder $m = n$ ist. Es können aber die Sterb- und Geburtsregister eines Orts gleiche Zahlen haben, und die Bevölkerung kann, in Folge von Einwanderungen, gleichwohl im Zunehmen seyn. In Königsberg z. B. war die Zahl der von 1817 — 37 Gestorbenen denjenigen der Geborenen fast gleich,

*) Nach den Angaben der vorzüglichsten Beobachter wird im Durchschnitt angenommen, daß von

40 Menschen auf dem platten Lande,
32 „ in kleinen Städten,
24 „ in größern Städten und Handelsplätzen,
28 „ in den größten Städten,
35 „ in ganzen Ländern überhaupt

jährlich einer mit Tod abgeht; daß hingegen auf

30 Menschen auf dem platten,
24 „ in kleinen Städten,
28 „ in größern Städten,
31 „ in den größten Städten,
29 „ im ganzen Land

eine Geburt kommt.

und dennoch nahm die Einwohnerzahl von 56571 auf 64200 zu.*)

§. 111. Der größte Theil der Bevölkerung Europa's ist im Zunehmen, über das Gesetz der Zunahme läßt sich aber aus theoretischen Gründen nichts bestimmen.

Wenn übrigens die Verhältnisse $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ (§. 110) in jedem Jahre dieselben blieben, so würde die Bevölkerung in einem geometrischen Verhältniß zu- oder auch abnehmen. Denn für eine gegebene Zeit sey V die Bevölkerung, G die Anzahl der Geburten, und T diejenige der Sterbfälle, und es seyen V', G', T', V'', G'', T'' ꝛc. die analogen Zahlen für die nachfolgenden Jahre; setzt man ferner $\frac{V}{G} = n$, $\frac{V}{T} = m$, so ist $V = nG = mT$; folglich $T = \frac{nG}{m}$, $V' = V + G - T = V + G - \frac{nG}{m} = V + G\left(1 - \frac{n}{m}\right) = V + \frac{V}{n}\left(1 - \frac{n}{m}\right) = V + V\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) = V\left(1 + \frac{m-n}{mn}\right)$.

Sind nun die Verhältnisse $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ unveränderlich, so hat man in gleicher Weise

$$V'' = V'\left(1 + \frac{m-n}{mn}\right) = V\left(1 + \frac{m-n}{mn}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

wonach die Bevölkerung im geometrischen Verhältniß zu- oder abnimmt, je nachdem $m > n$ oder $m < n$. Hieraus ließe sich berechnen, in wie viel Jahren die Bevölkerung zu einem gegebenen Vielfachen der gegebenen Bevölkerung anwachsen würde, wenn man annehmen könnte, daß das Maaß der Sterblichkeit und der Fruchtbarkeit während des gegebenen Zeitraums sich nicht ändere. Setzt man s V für das gegebene Vielfache der anfänglichen Bevölkerung V, q für $1 + \frac{m-n}{mn}$, und x für die gesuchte Zeit, so ist $V q^x = s V$ und $x = log. \frac{s}{q}$. Könnte man z. B. annehmen, daß die im §. 110 gefundenen Verhält-

*) Moser, die Gesetze der Lebensdauer ꝛc. Berlin, 1839.

nisse $\frac{967306}{32080000}$ (das Maaß der Fruchtbarkeit) und $\frac{805950}{32080000}$ (das Maaß der Sterblichkeit) sich gleich blieben, so würde die Bevölkerung Frankreichs nach 19 Jahren um $\frac{1}{10}$, nach 36 Jahren um $\frac{2}{10}$, nach 52 Jahren um $\frac{3}{10}$, nach 67 Jahren um $\frac{4}{10}$, nach 81 Jahren um die Hälfte, und nach 138 Jahren um das Doppelte größer als jetzt seyn.

Obige Theorie gründet sich indessen auf eine ganz unstatthafte Voraussetzung, denn es ist gar nicht denkbar, daß die Bevölkerung in Folge eines Ueberschusses der Geburten in geometrischer Progression gleich einem Kapitale jährlich zunehmen werde, dessen Zinsen zum Kapital geschlagen werden, und ihrer Seits wieder zur Vermehrung desselben beitragen. *)

Durch Beobachtungen gelangt man eben so wenig zu einem Gesetze der Bevölkerung. Quetelet **) theilt die Zunahme der Bevölkerung Englands von 1700 bis 1830 und zwar von 10 zu 10 Jahren mit; nach seinen Angaben würde sich die Bevölkerung nach der Zunahme

von	1720	auf	1730	in	112 Jahren
„	1740	„	1750	„	197 „
„	1750	„	1760	„	100 „
„	1760	„	1770	„	63 „

verdoppelt haben, wonach die Bevölkerung keineswegs in einer geometrischen Progression zugenommen hat.

---

*) Der berühmte Euler hat in Ermanglung eines allgemeinen Gesetzes der Bevölkerung, für einen speciellen Fall, nämlich für den Fall, daß n und m constante Größen sind, obiges Gesetz aufgestellt, so wie man, wie Moser (Gesetze der Lebensdauer ꝛc.) richtig bemerkt, bei mathematischen Untersuchungen häufig zu Werke geht, wenn sich ein Problem nicht allgemein auflösen läßt, und wenn man deßhalb die Auflösung für specielle Fälle versucht, oft unbekümmert darum, ob diese Fälle eine Realität haben, oder nicht; und wenn Euler obigen Fall behandelt hat, so hat er ihn damit noch nicht für den wirklich stattfindenden erklärt.

**) *Quetelet* sur l'homme et le développement de ses facultés. Bruxelles, 1836.

Nach Rau betrug die Volksmenge in den vereinigten Staaten Nord-Amerika's

1780	2051000
1790	3929326
1800	5306035
1810	8239703
1820	9654415
1825	10438000

Nach der Formel:

$$V_x = 2051000 + 190822\ x\ *)$$

wo V_x die Volksmenge im Jahr x nach 1780 bedeutet, erhält man folgende Werthe:

2051000
3959220
5867440
7775660
9683880
10637990

welche zwar nur beiläufig mit den beobachteten Werthen übereinſtimmen, aus welchen aber doch hervorgeht, daß die Volksvermehrung eher in arithmetiſcher als in geometriſcher Progreſſion ſtattgefunden hat.

---

*) Moſer, Geſetze der Lebensdauer ꝛc.

IV.

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens.

---

112. Die Berechnung der Leibrenten beruht, wie im §. 90 bereits angedeutet worden, auf dem gegenwärtigen Alter der Käufer derselben in der Weise, daß die wahrscheinliche Anzahl von Jahren, in welcher denselben die Leibrente gezahlt werden dürfte, dabei in Anschlag gebracht wird. Hierzu, so wie überhaupt zum Gebrauche von Anstalten oder Gesellschaften, deren Einrichtung auf die menschliche Sterblichkeit gegründet ist, so wie endlich auch zu statistischen Zwecken, dienen die Sterblichkeitstabellen, oder Mortalitätstabellen, d. h. die durch Erfahrung und Berechnung vermittelst Sterbregistern gefertigten Tabellen, welche die den verschiedenen Altersstufen entsprechenden Verhältnißzahlen des Absterbens nachweisen.

Sterblichkeits-Tabellen.

§. 113 Die Fertigung der Sterblichkeitstabellen würde sehr einfach seyn, wenn man in den Sterbregistern eine große Anzahl der aus den Geburtsregistern gewählten Individuen finden, und auf diese Art ausmitteln könnte, wie viele Menschen im ersten, zweiten, dritten n. s. w. Lebensjahre gestorben sind; eine solche Zusammenstellung unterliegt aber zu großen Schwierigkeiten, weil man nicht jeden Verstorbenen von dem Eintritt in's Leben bis zum Abgang von demselben durch alle Wechsel des Standes und Aufenthalts verfolgen kann.

Ein anderes Verfahren hat Halley in England zuerst in Anwendung gebracht. Im Jahr 1693 gab er eine aus den Sterb-

registern der Stadt Breslau darnach gefertigte Sterblichkeitstabelle heraus. Wegen des geringen Unterschieds zwischen der Anzahl der Geborenen und Gestorbenen und des hieraus ersichtlichen Beharrungszustandes der Breslauer Volksmenge, glaubt er hierbei schließen zu dürfen, daß jede Altersclasse an dem jährlichen Abgang derselben ihren verhältnißmäßigen Antheil nehme. Nach dieser Voraussetzung zog er aus den Sterbregistern von 1687 bis 1691 die Summe der Abgeschiedenen von jedem Alter besonders heraus, subtrahirte alsdann von der Hauptsumme aller Verstorbenen die Summe der einjährigen Kinder und betrachtete den Rest als die Anzahl der Ueberlebenden. Von diesem Rest subtrahirte er die Summe der im zweiten Jahre verstorbenen Kinder und nahm den neuen Rest für die Anzahl Derjenigen, die das zweite Jahr überlebten. Von dem letzten Rest subtrahirte er wieder die Summe der dreijährigen Todten u. s. w. Um die Rechnung zu vereinfachen reducirte er zuletzt alle Verhältnisse auf die Zahl 1000.

Es sind z. B. im Königreich Dänemark, mit Ausnahme der Herzogthümer, in den 10 Jahren vom Anfange 1811 bis Ausgang 1820 gestorben: *)

Zwischen	0	und	10	Jahren	84700	Menschen
„	10	„	20	„	10678	„
„	20	„	30	„	14219	„
„	30	„	40	„	14844	„
„	40	„	50	„	16596	„
„	50	„	60	„	20913	„
„	60	„	70	„	29516	„
„	70	„	80	„	28449	„
„	80	„	90	„	14324	„
über	90				1998	„

Hieraus ergiebt sich also, wenn die Zahlen von unten auf addirt werden, folgende Sterblichkeitstabelle:

*) Meyer, Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften (Kopenhagen 1823).

Alter.	Lebende im Anfang des Jahrzehends.	Abgang in 10 Jahren.
0 bis 10	236237	84700
10 „ 20	151537	10678
20 „ 30	140859	14219
30 „ 40	126640	14844
40 „ 50	111796	16596
50 „ 60	95200	20913
60 „ 70	74287	29516
70 „ 80	44771	28449
80 „ 90	16322	14324
90	1998	1998

Für Anstalten, welche auf die menschliche Sterblichkeit gegründet sind, z. B. Leibrentenanstalten, sind indessen solche allgemeine Sterblichkeitstabellen, welche die Verhältnißzahlen des Absterbens für alle Volksclassen enthalten, nicht brauchbar, weil, unter übrigens gleichen Umständen, die Sterblichkeit je nach Verschiedenheit der Lebensweise und Berufsgeschäfte der Menschen unterschiedlich ist, und sich innerhalb einer geschlossenen Gesellschaft anders als bei einer stets wechselnden Bevölkerung gestaltet, und weil nicht alle Volksclassen bei derartigen Anstalten ꝛc. betheiligt sind. Die ersten Leibrenten-Anstalten, Lebensversicherungs-Anstalten ꝛc. mußten sich mit sehr unzuverläßigen Resultaten in dieser Beziehung begnügen; es wurde aber gerade solchen Anstalten im Verlaufe der Zeit möglich, selbst Beobachtungen anzustellen, und so verdankt man denselben Sterblichkeitstabellen, welche, wenigstens in Betracht der Anwendungen, die man davon machen kann, ziemlich zuverläßig sind. Eine solche ist die aus den Erfahrungen der Equitable-Gesellschaft in London (für Lebensversicherung) aufgestellte, im Anhang befindliche Tabelle III.

Zuverläßiger, und für ähnliche Fälle am brauchbarsten, sind diejenigen Sterblichkeitstabellen, welche unmittelbar nach den Beobachtungen des Absterbens der Mitglieder von Leibrenten-Anstalten, Lebensversicherungs-Anstalten ꝛc. construirt worden

sind. Dahin gehören z. B. diejenigen, welche Deparcieux über die Besitzer von Leibrenten und die Tontinisten in Frankreich aufgestellt hat (Tabelle IV); ferner die Sterblichkeitstabelle der Leibrenten-Besitzer in Holland von Kerseboom (Tabelle V) und Finlaisons, nach den Beobachtungen der Staatstontinen in England gefertigte Tabelle (VI). Eine specielle Mortalitätstabelle ist ferner diejenige von Kritter für Ehemänner, Ehefrauen und Wittwen (Tabelle VII), und die von Brune nach den Erfahrungen über Frauen der Preuß. allgemeinen Wittwen-Verpflegungs-Anstalt berechnete Tabelle (VIII). Sterblichkeitstabellen für einzelne Städte sind die nach den Beobachtungen zu Northampton von Price, zu London von Simpson und zu Carlisle von Heysham berechneten Tabellen IX, X und XI; für einzelne Landestheile, die nach den Beobachtungen in der Churmark von Baumann, und im Canton Waadt von Mürat gefertigten Tabellen XII und XIII; endlich für ganze Länder die von Duvillard für Frankreich und von Wargenkin für Schweden berechneten Tabellen XIV und XV, so wie die Süßmilch-Baumann'sche, aus den Sterberegistern verschiedener Landestheile großer und kleiner Städte construirte XVI Tabelle. Eine auf Sterbelisten des gegenwärtigen Jahrhunderts gegründete Tabelle, in welcher auch die Folgen der Schutzblatternimpfung berücksichtigt seyn sollen, hat Stelzig (praktischer Arzt in Prag) für das Königreich Böhmen aufgestellt. Ueber den Einfluß der Vaccine auf die Sterblichkeit kann man übrigens zur Zeit noch keine vollständigen Erfahrungen haben.

Die Voraussetzung, auf welche sich Halley's Methode zur Construction von Sterblichkeitstabellen gründet, widerspricht indessen allen Erfahrungen, denn die Bevölkerung ist nicht stationär, sondern beständigen Veränderungen unterworfen. Zu der Halley'schen Methode kann man auch eine andere rechnen, welche im Wesentlichen dieselbe ist, nämlich die Volkszählung. Erfährt man aus solchen Volkszählungen für eine gegebene Bevölkerung, daß die Anzahl der Individuen =

a_0	für	das	Alter	0	bis	1
a_1	"	"	"	1	"	2
a_2	"	"	"	2	"	3
a_3	"	"	"	3	"	4

u. s. w. ist, so folgt daraus, wenn die Bevölkerung als stationär angenommen wird, die Sterblichkeits-Tabelle:

Alter.	Lebende.	Gestorben.
0	a_0	$a_0 - a_1$
1	a_1	$a_1 - a_2$
2	a_2	$a_2 - a_3$
3	a_3	$a_3 - a_4$

u. s. w.

Wir gehen nun zu einem richtigern, von Moser*) in Vorschlag gebrachtem Verfahren über, welches nicht auf einem fingirten Zustande der Bevölkerung beruht, und von der Bewegung derselben völlig unabhängig ist.

Angenommen, man wisse durch Beobachtungen, wie viele von einer hinreichend großen Anzahl Neugeborener am Ende des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Jahres noch leben. Bezeichnet man die Anzahl der Neugeborenen durch a_0, und die davon am Ende des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Jahres noch Lebenden beziehlich durch a_1, a_2, a_3, u. s. w., so drücken die Brüche

$$\frac{a_1}{a_0} = p_0^1,\ \frac{a_2}{a_1} = p_1^2,\ \frac{a_3}{a_2} = p_2^3 \ldots\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = p_n^{n+1}$$

beziehlich die Wahrscheinlichkeit (§. 106) aus, daß ein Neugeborener ein Alter von 1 Jahr, ein Einjähriger ein Alter von 2 Jahren, und allgemein, ein n-jähriger ein Alter von $(n+1)$ Jahren erreichen wird. Von N Neugeborenen leben also am Ende des 1ten Jahres noch Np_0^1, am Ende des 2ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2$, am Ende des 3ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2 p_2^3$, und allgemein am Ende des $(n+1)$ten Jahres noch $Np_0^1 p_1^2 p_2^3 \ldots p_n^{n+1}$. Hieraus ergiebt sich folgende Sterblichkeitstabelle:

Alter.	Lebende.	Gestorbene.
0	N	$N(1-p_0^1)$
1	Np_0^1	$Np_0^1(1-p_1^2)$
2	$Np_0^1 p_1^2$	$Np_0^1 p_1^2(1-p_2^3)$
3	$Np_0^1 p_1^2 p_2^3$	$Np_0^1 p_1^2 p_2^3(1-p_3^4)$
4	$Np_0^1 p_1^2 p_2^3 p_3^4$	$Np_0^1 p_1^2 p_2^3 p_3^4(1-p_4^5)$
⋮	⋮	⋮

*) Gesetze der Lebensdauer ꝛc.

Die Werthe von $p^{n}+^{1}_{n}$ lassen sich aus den Listen der Lebensversicherungs-Anstalten, Rentenversorgungs-Anstalten ꝛc. bestimmen. Aus den Listen solcher Anstalten entnimmt man die in jedem Jahre Aufgenommenen (a, b, c, ...) und die in jedem Jahre Verstorbenen (α, β, γ, . . .) dem Alter nach. Sodann muß man aus diesen Listen eine gewisse Anzahl von Jahren oder Jahrgängen herausheben, und hierbei die Jahrgänge sorgfältig unterscheiden, also nicht blos aufschreiben, wie viel Individuen von einem gewissen Alter binnen einer gewissen Anzahl von Jahren aufgenommen worden und gestorben sind, sondern auch diese Zahlen für jedes einzelne Jahr notiren:

Es seien z. B. aufgenommen:

20-jährige im 1ten Jahre a_0, im 2ten a_1, im 3ten a_2, u. s. w.
21 „ „ „ „ b_0, „ „ b_1, „ „ b_2, „
22 „ „ „ „ c_0, „ „ c_1, „ „ c_2, „
23 „ „ „ „ d_0, „ „ d_1, „ „ d_2, „
u. s. w.

wobei vorausgesetzt wird, daß 20 Jahre das niedrigste Alter der Aufnahme sey.

Ferner seien gestorben:

20-jährige im 1ten Jahre α_0, im 2ten α_1, im 3ten α_2, u. s. w.
21 „ „ „ „ β_0, „ „ β_1, „ „ β_2, „
22 „ „ „ „ γ_0, „ „ γ_1, „ „ γ_2, „
23 „ „ „ „ δ_0, „ „ δ_1, „ „ δ_2, „
u. s. w.

Somit gab es überhaupt 20-jährige $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, und davon starben vom 20ten bis 21ten Jahre $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$. Also ist die Wahrscheinlichkeit eines 20-jährigen, 21 Jahre alt zu werden oder

$$p^{21}_{20} = \frac{(a_0-\alpha_0) + (a_1-a_1) + (a_2-a_2) + \ldots}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots}$$

Was nun die Zahl der 21-jährigen betrifft, so setzt sie sich zusammen 1) aus der Zahl der Aufgenommenen $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$, 2) aus den 20-jährigen, welche successive 21 Jahr alt wurden, und die Anzahl derselben ist $(a_0-\alpha_0) + (a_1-\alpha_1) + (a_2-\alpha_2) + \ldots$. Die Anzahl der 21-jährigen beträgt folglich

$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + (a_0-\alpha) + (a_1-\alpha_1) + (a_2-\alpha_2) + \ldots$

und da hiervon im 22ten Jahre $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots$ star-

ben, so ist die Wahrscheinlichkeit eines 21-jährigen, 22 Jahr alt zu werden, oder

$$p_{21}^{22} = \frac{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+\ldots(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+\ldots}{(a_0-\alpha_0)+(\alpha_1-\alpha_1)+\ldots b_0+b_1+b_2+\ldots.}$$

In gleicher Weise erhält man die Gleichung:

$$p_{22}^{23} = \frac{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+\ldots(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+\ldots}{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+\ldots(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)+\ldots \dfrac{(c_0-\gamma_0)+(c_1-\gamma_1)+\ldots.}{c_0+c_1+c_2+\ldots}}$$

u. s. w.

Das Gesetz, nach welchem diese Wahrscheinlichkeiten gebildet werden, geht aus diesen Werthen hervor. Es handelt sich dabei offenbar nur darum, den Zähler zu finden; der Nenner ergiebt sich aus dem Zähler, wenn man die Zahl der in dem betrachteten Lebensalter Sterbenden fortläßt. So erhält man z. B. in p_{21}^{22} den Nenner, wenn man im Zähler β_0, β_1, β_2 ... wegläßt, in dem Zähler von p_{22}^{23} läßt man zu dem Ende γ_0, γ_1, γ_2 . . . herausfallen.

Was aber die Bildung des Zählers betrifft, so ist Folgendes nicht zu übersehen. Nehmen wir an, man benutze nur vier Jahrgänge der Anstalt, so giebt es auch nur 4 Werthe von den a, den b . . . ., den α, β u. s. w., von denen übrigens mehrere = 0 seyn können. Nun ist es einleuchtend, daß die a_3, welche im 4ten Jahre aufgenommen wurden und 20 Jahr alt waren, die Zahl der 21-jährigen noch vermehren, dagegen keinen Einfluß mehr auf 22-jährigen und noch weniger auf die ältern üben werden; eben so sind dann die

a_2 20-jährigen noch auf die 22-jährigen
a_1 " " " " 23 "
a_0 " " " " 24 "

von Einfluß. Daher ist unter diesen Umständen

$$p_{20}^{21} = \frac{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+(a_2-\alpha_2)+(a_3-\alpha_3)}{a_0+a_1+a_2+a_3}$$

$$p_{21}^{22} = \frac{a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+(a_2-\alpha_2)+(b_0-\beta_0)+(b_1-\beta_1)}{(a_0-\alpha_0)+(a_1-\alpha_1)+(a_2-\alpha_2) \dfrac{+(b_2-\beta_2)+(b_3-\beta_3)}{+b_0+b_1+b_2+b_3}}$$

Hier fällt in p_{22}^{21} sowohl a_3 als α_3 heraus; bei den folgenden p_{22}^{23} würden nicht allein a_2 und α_2 sondern nun auch b_3

und β_3 fortgelassen werden müssen. Daraus ergiebt sich die Regel für die Bildung des Zählers, welche statt findet, die Zahl der benutzten Jahrgänge mag so groß seyn wie sie wolle. Jeder neue Zähler erhält Differenzen mit einem neuen Buchstaben. (z. B. $p\,\frac{22}{21}$ Differenzen mit dem Buchstaben b und β) und dafür fällt von jedem bereits vorhandenen Buchstaben eine Differenz weg (z. B. in $p\,\frac{22}{21}$ die Differenz $(a_3 - \alpha_3)$. Es hat somit keine Schwierigkeit, die Größen $p\,\frac{21}{20}$, $p\,\frac{22}{21}$, $p\,\frac{23}{22}$ u. s. w. in Buchstaben anzugeben. Was die Rechnung mit Zahlen betrifft, so verweisen wir auf oben erwähnte Schrift, aus welcher wir diese Darstellung entnommen haben. Man ersieht hieraus, daß diese Methode zur Berechnung von Sterblichkeitstabellen den Vortheil gewährt, daß man die ganze Arbeit in mehrere Abtheilungen theilen kann, indem man die Sterblichkeitsgesetze für mehrere Gruppen von Lebensaltern einzeln bestimmt. Bedient man sich hierbei der Listen von Leibrenten-Anstalten, so erhält man eine Sterblichkeitstabelle für gezählte Köpfe (têtes choisies); gebraucht man diejenigen von Lebensversicherungs-Anstalten, besonders aber von Rentenversorgungs-Anstalten, so erhält man dergleichen Tabellen für eine gemischte Bevölkerung.

Mortalitätscurve und Formulirung des Sterblichkeitsgesetzes.

114. Um den Fortgang der Sterblichkeit nach den verschiedenen Altersstufen zu übersehen, sind Linien geeigneter als Zahlen.

Nach der Sterblichkeitstabelle von Halley sind von 1000 Neugebornen im

5ten	Jahre	noch	710	oder	in	runder	Zahl	700
10ten	„	„	653	„	„	„	„	650
20ten	„	„	592	„	„	„	„	590
30ten	„	„	523	„	„	„	„	520
40ten	„	„	436	„	„	„	„	430
50ten	„	„	335	„	„	„	„	330
60ten	„	„	232	„	„	„	„	230
70ten	„	„	131	„	„	„	„	130
80ten	„	„	34	„	„	„	„	30
89ten	„	„	1.					

} am Leben.

Um obige Zahlen durch eine Linie darzustellen, ziehe man eine Linie von unbestimmter Länge, und trage 100 gleiche Maaßtheile auf dieselbe, die man für die Jahrgänge annimmt;

alsdann errichte man nach jeder der obigen Jahrzahlen eine senkrechte Linie auf dem entsprechenden Maaßtheile, und gebe diesen senkrechten Linien die verhältnißmäßigen Größen der Zahlen, welche die Menge der Lebenden in der dritten Columne obiger Tabelle ausdrücken; verbindet man nun die obern Endpunkte der senkrechten Linien aus freier Hand durch eine Linie, so bilden alle diese freigezogenen Linien zusammen eine krumme Linie, welche den Gang der Sterblichkeit sichtbar macht und deswegen Mortalitätscurve genannt wird.

Weil jede continuirliche Curve durch eine Gleichung ausgedrückt werden kann, so hat man auch versucht, diejenigen der Mortalitätscurven zu bestimmen, indem man die in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen Zahlen durch eine algebraische Formel mit einander zu verbinden suchte. So läßt sich z. B. die Süßmilch'sche Sterblichkeitsordnung vom 10ten Jahr an durch die Gleichung:

$$y = 598{,}1673049 - 8{,}4174552\,x + 0{,}2308954\,x^2 - 0{,}0052473\,x^3 + 0{,}00003213682\,x^4$$

darstellen, in welcher y die Zahl der Lebenden und x das Alter bedeutet. *)

Wahrscheinlichkeit der fernern Lebensdauer für jedes Alter.

115. Vermittelst der Sterblichkeitstabellen läßt sich die Wahrscheinlichkeit der fernern Lebensdauer für jedes Alter bestimmen, oder die Frage beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit man nach einem bereits erlangtem Alter noch auf eine gewisse Anzahl von Jahren rechnen könne. Sucht man z. B. den Grad der Wahrscheinlichkeit, die man im 40ten Jahre hat, noch 20 Jahre zu leben, so nimmt man die Anzahl der Personen in der Tabelle, welche das 40te Jahr erreichten, und die Anzahl derjenigen, welche bis zum 60ten Jahre leben, und dividirt diese durch die erste Zahl: der Quotient ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (§. 106). Nach der Tabelle von Halley verhält sich die Zahl der Lebenden von 60 Jahren zu der von 40 Jahren wie 232 zu 436; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiernach $\frac{232}{436}$ oder beiläufig $\frac{532}{1000}$.

---

*) Meyer, Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften (Kopenhagen 1823).

Mehr hierüber in Mosers Gesetze der Lebensdauer.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist ferner nach den Tabellen

Der Equitable-Gesellschaft . .	$\frac{3542}{5117}$	oder beiläufig	$\frac{692}{1000}$
von Deparcieux	$\frac{463}{657}$	"	"	$\frac{704}{1000}$
" Kerseboom	$\frac{273}{432}$	"	"	$\frac{631}{1000}$
" Kritter.	$\frac{215}{385}$	"	"	$\frac{558}{1000}$
" Price	$\frac{2038}{3635}$	"	"	$\frac{560}{1000}$
" Simpson	$\frac{102}{229}$	"	"	$\frac{445}{1000}$
" Heysham.	$\frac{364}{508}$	"	"	$\frac{716}{1000}$
" Baumann	$\frac{223}{387}$	"	"	$\frac{576}{1000}$
" Muret	$\frac{314}{506}$	"	"	$\frac{620}{1000}$
" Duvillard	$\frac{213567}{369404}$	"	"	$\frac{578}{1000}$
" Wargentin	$\frac{293}{459}$	"	"	$\frac{638}{1000}$
" Süßmilch-Baumann . . .	$\frac{210}{374}$	"	"	$\frac{561}{1000}$
" Finlaison für Männer . .	$\frac{440}{644}$	"	"	$\frac{683}{1000}$
und für Weiber .	$\frac{539}{700}$	"	"	$\frac{770}{1000}$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Vierziger das 60te Lebensjahr zu erreichen ist mithin nach der Tabelle von Heysham (Carlisle) am größten, und nach der Tabelle von Simpson (London) am kleinsten.

Der größte Theil der Sterblichkeitstabellen erstreckt sich wenig über das 90te Jahr, weil dieses Alter selten erreicht wird. Das Verhältniß der Anzahl von Personen von diesem Alter zu derjenigen der Geburten wird als Maaß der *größten Lebensdauer* für das Land oder den Ort, für welche die Tabelle gefertigt ist, angesehen. Dieses Verhältniß ist nach der Tabelle

von Halley (nur bis zum 89ten Jahre $\frac{1}{1000}$,
der Equitable-Gesellschaft (vom 10ten bis zum 90ten Jahre gehend) $\frac{17}{646}$ oder beiläufig $\frac{26}{1000}$;
von Deparcieux (vom 3ten bis zum 90ten Jahre gehend) $\frac{11}{1000}$;
„ Kerseboom $\frac{7}{804}$ oder beiläufig $\frac{8}{1000}$;
„ Finlaison für Männer $\frac{11}{1000}$ und für Weiber $\frac{52}{1000}$,
„ Price $\frac{46}{11650}$ oder beiläufig $\frac{3}{1000}$,
„ Simpson (nur bis zum 79ten Jahre) $\frac{25}{1000}$,
„ Heysham $\frac{14}{846}$ oder beiläufig $\frac{16}{1000}$;
„ Baumann $\frac{5}{1000}$;
„ Muret $\frac{7}{811}$ oder beiläufig $\frac{8}{1000}$;
„ Süßmilch-Baumann $\frac{6}{1000}$.

Gewöhnlich sind die beiden Geschlechter in den Sterblichkeitstabellen unter einander begriffen; die Sterblichkeit ist aber bei beiden nicht gleich groß, sondern geringer bei dem weiblichen Geschlechte.

Die wahrscheinliche künftige Lebensdauer.

116. Unter der wahrscheinlichen künftigen Lebensdauer versteht man die Wahrscheinlichkeit, daß man nach einer gewissen Anzahl von Jahren eben so wohl noch am Leben als nicht mehr am Leben seyn könne, wonach also, zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit, in der Mortalitätstabelle nachzusehen ist, in wie viel Jahren die bei dem betreffenden Alter stehende Anzahl von Personen auf die Hälfte reducirt ist. So findet man z. B. in der Tabelle von Halley, daß von 604 18-jährigen Personen im 53ten Jahre, also nach 35 Jahren, nur noch 302 Personen, also ziemlich nahe die Hälfte am Leben sind, mithin ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ für jede

der 18-jährigen Personen, daß sie noch 35 Jahre leben könne, da sie sich nothwendigerweise alsdann in der einen oder andern Hälfte, oder in der gleich großen Anzahl der Lebenden oder Verstorbenen befinden muß. Das wahrscheinliche Alter dieser Personen ist mithin = 35 + 18 = 53 Jahre.

Untersucht man auf diese Art, von der Geburt ausgehend, das wahrscheinliche Leben, so ergeben sich aus den verschiedenen Sterblichkeitstabellen sehr von einander abweichende Resultate, und im Allgemeinen stellt sich ein außerordentliches Mißverhältniß zum Nachtheil des Lebens in Städten heraus. Nach der Tabelle von Price (Nordhampton) stirbt die Hälfte der in einem Jahre geborenen Kinder ungefähr im 8ten Jahre; nach der Tabelle von Simpson (London) im 3ten; nach der Tabelle von Baumann (Churmark) dagegen im 21ten, und im eben so vielsten Jahre nach der Tabelle von Duvillard (Frankreich), und im Canton Waadt erst im 53ten Jahre.

Für das 40te Jahr findet man nach der Tabelle

von Halley ungefähr . . 29 Jahre
der Equitable-Gesellschaft . 22 „
von Deparcieux . . . . 29 „
„ Kerseboom . . . . 26 „
„ Finlaison für Männer 28, und für Weiber 33 Jahre,
„ Price . . . . 22 Jahre,
„ Simpson . . . 18 „
„ Heysham . . . 29 „
„ Baumann . . . 23 „
„ Muret . . . 25 „
„ Duvillard . . . 23 „
„ Wargentin . . . 26 „
„ Baumann-Süßmilch 23 „

Die mittlere Lebensdauer.

117. Die sogenannte mittlere Lebensdauer ergiebt sich für jedes Alter aus der Durchschnittszahl der sämmtlichen Jahre, welche die Mitglieder derselben Altersklasse, der Sterblichkeitstabelle zufolge, zusammen zu durchleben haben, vorausgesetzt, daß man annimmt, daß die Sterbfälle zu Ende jedes Jahrgangs stattfinden.

Stellen wir, zur Vereinfachung der Berechnung, denjenigen Theil einer Sterblichkeitstabelle auf, welche die Verhältnißzah-

len des Absterbens für die höhern Altersstufen angiebt, nämlich (nach der Tabelle von Deparcieux):

Altersjahre.	Anzahl der Lebenden.
87	29
88	22
89	16
90	11
91	7
92	4
93	2
94	1
95	0

Nach dieser Tabelle leben 29 Personen noch 1 Jahr, 22 Personen noch 1 Jahr u. s. w., so daß die 29 Personen zusammen $29 + 22 + 16 + 11 + 7 + 4 + 7 + 2 + 1 = 92$ Jahre zu durchleben haben; mithin kommen auf 1 Person $\frac{92}{29} = 3\frac{5}{29}$ Jahre, und dieß wäre, nach obiger Tabelle, das mittlere Alter für 87jährige Personen. Weil man aber nicht annehmen kann, daß die Personen der verschiedenen Altersklassen gerade zu Ende des Jahrgangs sterben, sondern weil die Sterbfälle zu verschiedenen Zeiten des Jahrs stattfinden, so nimmt man die Mitte des Jahrgangs als den gemeinschaftlichen Zeitabschnitt der Sterbfälle an. Nach dieser Voraussetzung gestaltet sich die Berechnung der mittlern Lebensdauer auf folgende Art.

Weil am Ende des 1ten Jahres nur noch 22 Personen am Leben sind, so haben 7 Personen ½ Jahr durchlebt; weil von 22 Personen zu Ende des zweiten Jahres nur noch 16 am Leben, und folglich 6 gestorben sind, so haben 6 Personen $\frac{3}{2}$ Jahr zusammen durchlebt u. s. w. Die Reihe der von 29 87-jährigen Personen durchlebter Jahre ist hiernach

$$7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2},\ 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{2},\ 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2},\ 4 \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{2},$$

$$3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2},\ 2 \cdot \frac{11}{2} = \frac{22}{2},\ 1 \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{2},\ 1 \cdot \frac{15}{2} = \frac{15}{2};$$

die Summe dieser Jahre ist $= \frac{155}{2}$ Jahre; wenn also auf 29 Personen $\frac{155}{2}$ Jahre kommen, so kommt im Durchschnitt auf 1 Person $\frac{155}{29.2} = 2\frac{39}{58}$ Jahre.

Setzt man statt der Zahlen 7, 6, 5 u. s. w. die gleichen Werthe $29-22$, $22-16$, $16-11$ u. s. w., und zeigt man die Multiplikation mit der Lebensdauer $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ u. s. w. blos an, so wird die Summe der Producte ausgedrückt durch $\frac{1}{2}(29-22)+\frac{3}{2}(22-16)+\frac{5}{2}(16-11)+\frac{7}{2}(11-7)+\frac{9}{2}(7-4)+\frac{11}{2}(4-2)+\frac{13}{2}(2-1)+\frac{15}{2}(1-0)$; oder durch

$$\frac{1}{2}.29-\frac{1}{2}.22+\frac{3}{2}.22-\frac{3}{2}.16+\frac{5}{2}.16-\frac{5}{2}.11+\frac{7}{2}.11-\frac{7}{2}.7+\frac{9}{2}.7-\frac{9}{2}.4+\frac{11}{2}:4-\frac{11}{2}.2+\frac{13}{2}.2-\frac{13}{2}+\frac{15}{2}=\frac{1}{2}.29+22+16+11+7+4+3+2+1.$$

Man hat also nur die Summe der Glieder von 22 an, d. h. der Zahl der im 88ten Jahre lebenden Personen durch die Anzahl der im 87ten Jahre lebenden Personen, nämlich 29, zu dividiren und zum Quotienten $\frac{1}{2}$ zu addiren.

Wenn überhaupt a, a_1, a_2, a_3, a_4, u. s. w. die Anzahl der in den auf einander folgenden Jahren noch lebenden Personen bezeichnen, a_4 die letzte Zahl der Sterblichkeitstabelle ist, ferner wenn M die mittlere Lebensdauer von dem Alter an gerechnet ist, welches der ersten Zahl a entspricht, und M' diejenige für das Alter bei p' bezeichnet, so ist

$$M = \frac{1}{2}\,\frac{+a_1+a_2+a_3+a_4}{a}$$

$$\text{und } M' = \frac{1}{2} \frac{+ a_2 + a_3 + a_4}{a_1}$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$a_2 + a_3 + a_4 = a_1 (M' - \tfrac{1}{2});$$

substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man

$$M = \tfrac{1}{2} + \frac{a_1}{a} (M' + \tfrac{1}{2})$$

nach welcher Formel man leicht M durch M' finden kann, wenn man bei dem höchsten Alter der Tabelle anfängt.

Aus folgender, nach Duvillard's Sterblichkeitstafel berechneten Tabelle des mittlern Alters

Alter	Jahre	Monate	Alter	Jahre	Monate
0	28	9	35	25	9
1	36	4	40	22	11
5	43	5	45	20	1
10	40	10	50	17	3
15	37	5	55	14	6
20	34	3	60	11	11
25	31	4	65	9	7
30	28	6	70	7	7

ersieht man, daß in Frankreich das mittlere Alter, von der Geburt an gerechnet, 28 Jahre und 9 Monate, und am längsten, nämlich 43 Jahre und 5 Monate für das 5te Lebensalter ist. In London ist, von der Geburt an gerechnet, das mittlere Alter ungefähr 18 Jahre, in Berlin 17, in der Schweiz 37 Jahre.

Anwendung der Sterblichkeitstabellen zur Volkszählung nach Altersklassen.

118. Vermittelst der Sterblichkeitstabellen läßt sich auch berechnen, wie die Bevölkerung nach den verschiedenen Altersklassen zusammengesetzt ist.

Wenn man annimmt, daß jährlich fast eben so viel Menschen sterben als als geboren werden, so erhält man durch die Addition sämmtlicher in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen Zahlen die den Geburten und den Mortalitätsverhältnissen entsprechende Bevölkerung. Zieht man nun von dieser Summe successiv die Zahl der Geburten, die Zahl der 1-jährigen,

2-jährigen, 3-jährigen Individuen u. s. w. ab, so drückt der Rest die Anzahl der vom 1ten, 2ten, vom 3ten u. s. w. bis zum höchsten Alter lebenden Individuen aus. Stellt man eine solche Berechnung nach Duvillard's Sterblichkeitstabelle an, und zwar für 1 Million jährlicher Geburten, so erhält man die im Annuaire du Bureau des Longitudes (1843), unter der Aufschrift: Loi de la population en France enthaltene, und im Anfang befindliche XVII. Tabelle. Zu mehrerer Genauigkeit wird bei der Berechnung solcher Tabellen nicht mit der jedem Jahrgang entsprechenden Anzahl von Personen der Sterblichkeitstabelle, sondern mit dem arithmetischen Mittel der von zwei auf einander folgenden Jahren entsprechenden Zahlen gerechnet, um die Sterbfälle (wie bei der Berechnung der mittlern Lebensdauer) auf das halbe Jahr, als dem mittlern Zeitraume, zurückzuführen.

Obige Tabellen dienen nun dazu, die Anzahl der Individuen irgend einer Altersklasse eines Landes zu bestimmen. Will man z. B. wissen, wie viel Individuen vom Alter von 20 bis 21 Jahre vorhanden sind, so sieht man in der XVII. Tabelle die Anzahl von 17205690 Individuen, welche 20 Jahre und mehr haben, und die Anzahl von 16706423 Individuen, welche 21 Jahre und mehr haben; die Differenz dieser beiden Zahlen, nämlich 499267, ist also die Anzahl der Individuen, welche mehr als 20 und weniger als 21 Jahre haben. Ist nun die Anzahl der jährlichen Geburten im Lande in runder Zahl = 26000, so ergiebt sich die Anzahl der Individuen vom Alter von 20 bis 21 Jahren aus der Proportion:

$$1000000 : 26000 = 499267 : x = 12981$$

Nach der XVI. Tabelle giebt es also 12981 Individuen vom Alter von 20 bis 21 Jahren in einem Lande, dessen Mortalitätsverhältnisse von derselben Beschaffenheit wie in Frankreich sind, und in welchem jährlich 26000 Geburten stattfinden.

Die im Anhang befindliche XVIII. Tabelle enthält ebenfalls das Gesetz der Bevölkerung Frankreichs, aber für eine Bevölkerung von 10 Millionen. Sie zeigt die Anzahl von Individuen unter diesen 10 Millionen an, welche ein gegebens Alter und höheres Alter haben; z. B. 5981843 Individuen, welche 20 Jahre und mehr, und 5808267 Individuen, welche 21 Jahre und mehr haben; die Differenz 173576 dieser beiden

Zahlen ist die, einer Bevölkerung von 10 Millionen entsprechende Anzahl von Individuen im Alter von 20 bis 21 Jahren. Will man wissen, welche Zahl einer Bevölkerung von 34 Millionen (wie sie im Jahr 1841 in Frankreich ungefähr war) entspricht, so setzt man:

$$10000000 : 34000000 = 173576 : x = 590158.$$

Bei dem Gebrauche der XVII. Tabelle wird, wie wir gesehen haben, bei derartigen Untersuchungen mit der Zahl der Geburten, und beim Gebrauche der XVIII. Tabelle mit der Einwohnerzahl gerechnet. Weil aber der Zustand der Bevölkerung nicht als stationär angenommen werden kann, und weil man sich auch auf die Angaben in Betreff der Geburten und Bevölkerung nicht immer verlassen darf, so kann man die Ergebnisse solcher Berechnungen nur als beiläufige Werthe betrachten. Zweckdienlicher sind die hierbei in Anwendung kommenden Tabellen zur Berechnung von Normalsterblichkeitstabellen für Rentenanstalten (V. II.). Uebrigens sind die im Anhang, Beispiels halber, aufgenommenen Hülfstabellen (XVII und XVIII) nicht sehr brauchbar, weil die Sterblichkeitstabelle von Duvillard (XIII), nach welcher jene Tabellen berechnet sind, neuern Untersuchungen und Beobachtungen zufolge, eine viel zu rapide Sterblichkeit giebt *).

*) Mathieu, Annuaire pour l'an 1843, S. 180.

V.

Anstalten,

welche auf die

menschliche Sterblichkeit

gegründet sind.

I. Leibrenten- und Lebensversicherungs-Anstalten.

Leibrentenvertrag.

119. Die Zahlung der Leibrente (§. 90) kann nicht nur an die Dauer des Lebens von einem Menschen geknüpft seyn, sondern sie kann auch von der Existenz mehrerer, bei dem Leibrentenvertrag betheiligten Personen auf sehr verschiedene Arten abhängen; die Leibrenten-Anstalten oder Anstalten, welche Gelder auf Leibrenten nehmen, befassen sich aber in der Regel nur mit der Gewährung von Leibrenten auf einen und auf zwei Köpfe. Wir beschränken uns daher in dieser Abtheilung auf die Berechnung der diesen Fällen entsprechenden Renten, und versparen die allgemeine Theorie der Leibrenten auf eine besondere Abtheilung.

Leibrente auf einen Kopf.

120. Soll z. B. für eine 95-jährige Person (damit die Berechnung nicht zu weitläufig werde) das Kapital einer jährlichen Rente von 100 fl. berechnet werden, so hat man zuvörderst in der Sterblichkeitstabelle nachzusehen, um wie viel die bei dem betreffenden Alter befindliche Anzahl von Lebenden von Jahr zu Jahr bis zum höchsten Alter vermindert wird. Nun giebt z. B. die Tabelle der Equitable-Gesellschaft

für das 95te Jahr 20 Lebende
„ „ 96te „ 10 „
„ „ 97te „ 4 „
„ „ 98te „ 1 „
„ „ 99te „ 0 „

Die Leibrentenkasse zahlt also

nach dem 1ten Jahre 10 mal 100 fl. = 1000 fl.
„ „ 2ten „ 4 „ 100 „ = 400 „
„ „ 3ten „ 1 „ 100 „ = 100 „

Theilt man nun die Summe der gegenwärtigen, zum angenommenen Zinsfuße berechneten Werthe obiger Zahlungen durch die Anzahl der anfänglich vorhandenen Lebenden, so erhält man den Werth oder das Kapital der Leibrente. Zum Zinsfuß 3 z. B. sind die gegenwärtigen Werthe

von 1000 fl. zahlbar nach 1 Jahr = 970 fl. 53 kr.
„ 400 „ „ „ 2 Jahren = 377 „ — „
„ 100 „ „ „ 3 „ = 91 „ 30 „
Summe = 1439 fl. 22 kr.

Weil die in der Tabelle beim 95ten Jahre befindliche Anzahl der Lebenden = 20 ist, so ist das gesuchte Kapital = $\frac{1439^{22}/_{60}}{20}$ = 71 fl. 58 kr.; d. h. so viel hat Jeder, welcher 95 Jahre alt ist, bei dem angenommenen Zinsfuße, für eine jährliche Leibrente von 100 fl. zu zahlen. Es ist zwar möglich, daß der eine oder andere Rentner früher oder später als nach der Angabe der Sterblichkeitstabelle stirbt; aber im Ganzen genommen, werden alle zur betreffenden Altersklasse gehörigen Personen doch so nach einander vor und nach dem ihnen zugehöhörigen mittlern Alter (§. 117) wegsterben, daß man sich nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, wenn anders die Sterblichkeitstabelle Zutrauen verdient, an das durchschnittliche Kapital halten kann. Denn bei einer Leibrentenkasse kann es nur auf eine größere Anzahl von Theilnehmern abgesehen seyn; was sie an dem längern Leben des Einen einbüßt, das bringt die kürzere Lebensdauer des Andern wieder ein, und je größer die Anzahl der Theilnehmer ist, desto genauer treffen, im Durchschnitt, die Gesetze der Sterblichkeitstabelle zu.

Bezeichnet, überhaupt, a_m die Anzahl der Lebenden von dem gegebenen Alter einer Person, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3} u. s. w. be-

ziehlich die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahre höhern Alter, und a_x die dem höchsten Alter in der Tabelle entsprechende Anzahl von Lebenden, wird ferner die Leibrente durch r, der Zinsfuß durch p, und das dem Alter i entsprechende Kapital der Leibrente durch R_i bezeichnet, so zahlt die Leibrentenkasse nach dem 1ten Jahre $a_{m+1}r$, nach dem 2ten Jahre $a_{m+2}r$, nach dem 3ten Jahre $a_{m+3}r$, u. s. w. nach dem $n$ten Jahre $a_x r$; die gegenwärtigen Werthe dieser Beträge sind

$$\frac{a_{m+1}r}{1+p}, \frac{a_{m+2}r}{(1+p)^2}, \frac{a_{m+3}r}{(1+p)^3}, \ldots \frac{a_x r}{(1+p)^n};$$

Daher ist

$$R_i = \frac{r}{a_m}\left[\frac{a_{m+1}}{1+p} + \frac{a_{m+2}}{(1+p)^2} + \frac{a_{m+3}}{(1+p)^3} \cdots \frac{a_x}{(1+p)^n}\right]$$

Das dem Alter $i+1$ entsprechende Kapital ist hiernach

$$R_{i+1} = \frac{r}{a_{m+1}}\left[\frac{a_{m+2}}{1+p} + \frac{a_{m+3}}{(1+p)^2} + \frac{a_{m+4}}{(1+p)^3} \cdots \frac{a_x}{(1+p)^{n-1}}\right]$$

Wird letztere Gleichung durch $1+p$ dividirt und mit a_{m+1} multiplicirt, so ist

$$\frac{a_{m+1}R_{i+1}}{1+p} = r\left[\frac{a_{m+2}}{(1+p)^2} + \frac{a_{m+3}}{(1+p)^3} + \frac{a_{m+4}}{(1+p)^4} \cdots \frac{a_x}{(1+p)^n}\right]$$

Wird die erste Gleichung mit a_m multiplicirt, so ist

$$a_m R_i = r\left[\frac{a_{m+1}}{1+p} + \frac{a_{m+2}}{(1+p)^2} + \frac{a_{m+3}}{(1+p)^3} \cdots \frac{a_x}{(1+p)^n}\right]$$

Zieht man die beiden letzern Gleichungen Glied vor Glied von einander ab, so ist

$$a_m R_i - \frac{a_{m+1}}{1+p}R_{i+1} = \frac{r\,a_{m+1}}{1+p} - \frac{r\,a_{m+2}}{(1+p)^2} + \frac{r\,a_{m+2}}{(1+p)^2}$$
$$- \frac{r\,a_{m+3}}{(1+p)^3} + \frac{r\,a_{m+3}}{(1+p)^3} - \frac{r\,a_{m+4}}{(1+p)^4} + \frac{r\,a_{m+4}}{(1+p)^4} \text{ u. s. w.}$$

Daher

$$a_m R_i - \frac{a_{m+1}}{1+p}R_{i+1} = \frac{r\,a_{m+1}}{1+p} \text{ und}$$

$$R_i = \frac{a_{m+1}}{a_m(1+p)}\left[r + R_{i+1}\right]$$

wonach R_i durch R_{i+1} bestimmt ist, und der Leibrenten-Tarif, d. h. die Aufstellung der allen Altersklassen entsprechenden Leibrenten-Kapitalien auf eine leichte Art, indem man mit dem höchsten Alter anfängt, berechnet werden kann.

Für den Theil der Sterblichkeitstabelle, welcher im obigen Beispiele angewendet wurde, ist

$i = 95$, $a_m = 20$, $a_{m+1} = 10$, $a_{m+2} = 4$, $a_{m+3} = 1$,

und für das angeführte Beispiel ist $p = \frac{3}{100}$, $r = 100$; mithin ist, wenn man für das Alter von 96 Jahren die Berechnung beginnt

$$R_{96} = \frac{100}{10}\left[4\left(\frac{100}{103}\right) + 1\left(\frac{100}{103}\right)^2\right] = 48\frac{1}{6}$$

Nach obiger Formel ist

$$R_{95} = \frac{10 \cdot 100}{20 \cdot 103}\left(100 + 48\frac{1}{6}\right) = 71 \text{ fl. } 56 \text{ kr.}$$

was (bis auf einige Kreuzer, wegen Vernachläßigung von Brüchen) mit der ersten Berechnung übereinstimmt.

Die XVIII. Tabelle enthält die nach der Sterblichkeits-Tabelle von Deparcieux zu den Zinsfüßen 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 und 6 berechneten Werthe einer Leibrente, deren Betrag = 1 ist.

So ist z. B. für eine 37-jährige Person das Kapital der Leibrenten-Einheit = 18,09, also ungefähr die 18-fache Rente. Für ein anderes Kapital a ist die Rente $= \frac{a}{18{,}009}$.

Die Tarife der Leibrenten-Anstalten enthalten gewöhnlich außer den Preisen der Rente von irgend einem als Einheit angenommenen Betrage auch die Procente der Kapitalanlage. Erhält man in Beziehung auf obiges Beispiel, für 18 fl. Kapital eine Leibrente von 1 fl. so zieht man so viel Zins aus dem Kapital, als aus der Proportion folgt:

$$18 : 1 = 100 : x = 5\frac{5}{9}.$$

Wenn, nach der XVIII. Tabelle, eine 60-jährige Person für 10,151 fl. eine Leibrente von 1 fl. erlangt, so wirft das Kapital so viel Zins ab, als aus der Proportion folgt:

$$10{,}151 : 1 = 100 : x = 9\,\frac{8641}{10151}.$$

Nach dem Tarif der unter dem Namen Union in Paris bestehenden Versicherungs-Anstalt, welche zugleich Gelder auf

Leibrenten nimmt, sind die den Preisen der Leibrenten entsprechenden Procente wie folgt:

Alter des Rentners.	Procente einer Kapital-Anlage von 100 Fr.		Alter des Rentners.	Procente einer Kapital-Anlage von 100 Fr.	
	Fr.	Cent.		Fr.	Cent.
35	6	09	56	8	86
36	6	15	57	9	10
37	6	21	58	9	34
38	6	29	59	9	60
39	6	37	60	9	88
40	6	46	61	10	20
41	6	55	62	10	56
42	6	65	63	10	93
43	6	76	64	11	35
44	6	88	65	11	80
45	7	01	66	12	04
46	7	15	67	12	28
47	7	29	68	12	52
48	7	44	69	12	76
49	7	59	70	13	—
50	7	75	71	13	10
51	7	92	72	13	20
52	8	08	73	13	30
53	8	26	74	13	40
54	8	45	75	13	50
55	8	65			

Leibrente auf zwei Köpfe.

121. Der Vertrag der Leibrenten-Anstalt mit zwei, zur Erlangung der Leibrente mit einander verbundenen Personen, besteht gewöhnlich darin, daß die Leibrente bis zum Aussterben beider Personen ausgezahlt werden soll.

Zur Berechnung der dieser Bedingung entsprechenden Leibrente muß für jedes Jahr die Wahrscheinlichkeit, daß die eine

oder andere Person zu Ende des Jahres noch leben werde, berechnet werden.

Wird die eine Person durch A und die dem Alter derselben entsprechende Anzahl von Lebenden in der Sterblichkeitstabelle durch a bezeichnet, und bezeichnen a_1 a_2 a_3 u. s. w. die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahren höheren Alter; wird in gleicher-Weise die andere Person durch B, die dem Alter derselben entsprechende Anzahl von Lebenden in der Sterblichkeitstabelle durch b bezeichnet, und bezeichnen b_1, b_2, b_3 u. s. w. die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahren höhern Alter, so sind die Wahrscheinlichkeiten

1) daß die Person A noch leben werde

für das 1te Jahr $= \frac{a_1}{a}$ (§. 106)

„ „ 2te „ $= \frac{a_2}{a}$

„ „ 3te „ $= \frac{a_3}{a}$

u. s. w.

2) Daß die Person B noch leben werde

für das 1te Jahr $= \frac{b_1}{b}$

„ „ 2te „ $= \frac{b_2}{b}$

„ „ 3te „ $= \frac{b_3}{b}$

u s. w.

3) daß die Person A nicht mehr am Leben seyn werde

für das 1te Jahr $= 1 - \frac{a_1}{a}$

„ „ 2te „ $= 1 - \frac{a_2}{a}$

„ „ 3te „ $= 1 - \frac{a_3}{a}$

u. s. w.

4) daß die Person B nicht mehr am Leben seyn werde

für das 1te Jahr $= 1 - \frac{b_1}{b}$

für das 2te Jahr $= 1 - \frac{b_2}{b}$

„ „ 3te „ $- 1 - \frac{b_3}{b}$ u. s. w.

5) Die Wahrscheinlichkeit, daß A noch am Leben, und B gestorben seyn werde, oder daß A gestorben und B noch am Leben seyn werde

für das 1te Jahr $= 1 - \left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\left(1 - \frac{b^1}{b}\right) = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\, b_1}{a\, b}$

„ „ 2te „ $= 1 - \left(1 - \frac{a_2}{a}\right)\left(1 - \frac{b_2}{b}\right) = \frac{a_2}{a} + \frac{b_2}{b} - \frac{a_2\, b_2}{a b}$

„ „ 3te „ $= 1 - \left(1 - \frac{a_3}{a}\right)\left(1 - \frac{b_3}{b}\right) = \frac{a_3}{a} + \frac{b_3}{b} - \frac{a_3\, b_3}{a\, b}$ u. s. w.

Wird, wie vorher, die Rente durch r und der Zinsfuß durch p bezeichnet, so erhält man den Werth der 1ten Jahresrente, oder die mathematische Hoffnung, (§. 108) diese Summe zu erhalten, wenn man $\frac{r}{1+p}$ mit $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\, b_1}{a\, b}$, als der Wahrscheinlichkeit, daß nach dem 1ten Jahre noch eine Person am Leben seyn werde, multiplicirt. Dieser Werth ist also $= \frac{r}{1+p}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\, b_1}{a\, b}\right)$. Eben so ist der Werth der Rente des 2ten Jahres $= \frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a} + \frac{b_2}{b} - \frac{a_2\, b_2}{a\, b}\right)$, des 3ten Jahres $= \frac{r}{(1+p)^3}\left(\frac{a^3}{a} + \frac{b^3}{b} - \frac{a_3\, b_3}{a\, b}\right)$ u. s. w.

Der Totalwerth der Leibrente besteht also aus der Summe der obigen Werthe und ist

$\frac{r}{1+p}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\, b_1}{a\, b}\right) + \frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} - \frac{a_2\, b_2}{a\, b}\right) + \frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a_3}{a} + \frac{b_3}{b} - \frac{a_3\, b_3}{a\, b}\right) + \text{ꝛc.}$

Zur Anwendung obiger Formel sey die Frage zu beantworten, wie viel das Kapital der Leibrente beträgt, wenn (damit die Berechnung nicht zu weitläufig werde) A 90 Jahre und

B 89 Jahre alt ist, und die Rente von 1000 fl. zum Zinsfuß 3 berechnet wird. Rechnet man nach der Tabelle von Deparcieux, so ist

$a = 11,\ a_1 = 7,\ a_2 = 4,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1,\ a_5 = 0$

$b = 16,\ b_1 = 11,\ b_2 = 7,\ b_3 = 4,\ b_4 = 2,\ b_5 = 1,\ b_6 = 0$

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\,b_1}{a\,b} = \frac{7}{11} + \frac{11}{16} - \frac{77}{176} = \frac{156}{176} = 0{,}886$$

$$\frac{a_2}{a} + \frac{b_2}{b} - \frac{a_2\,b_2}{a\,b} = \frac{4}{11} + \frac{7}{16} - \frac{28}{176} = \frac{113}{176} = 0{,}642$$

$$\frac{a_3}{a} + \frac{b_3}{b} - \frac{a_3\,b_3}{a\,b} = \frac{2}{11} + \frac{4}{16} - \frac{8}{176} = \frac{68}{176} = 0{,}386$$

$$\frac{a_4}{a} + \frac{b_4}{b} - \frac{a_4\,b_4}{a\,b} = \frac{1}{11} + \frac{2}{16} - \frac{2}{176} = \frac{36}{176} = 0{,}204$$

$$\frac{a_5}{a} + \frac{b_5}{b} - \frac{a_5\,b_5}{a\,b} = \frac{0}{11} + \frac{1}{16} - \frac{0}{176} = \frac{1}{16} = 0{,}062$$

$$\frac{a_6}{a} + \frac{b_6}{b} - \frac{a_6\,b_6}{a\,b} = 0.$$

$$\frac{r}{1+p}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} - \frac{a_1\,b_1}{a\,b}\right) = 1000 \times 0{,}886 \times \left(\frac{100}{103}\right) = 860{,}1288$$

$$\frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a} + \frac{b_2}{b} - \left(\frac{a_2\,b_2}{a\,b}\right)\right) = 1000 \times 0{,}642 \times \left(\frac{100}{103}\right)^2 = 605{,}0850$$

$$\frac{r}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a} + \frac{b_3}{b} - \frac{a_3\,b_3}{a\,b}\right) = 1000 \times 0{,}386 \times \left(\frac{100}{103}\right)^3 = 353{,}2286$$

$$\frac{r}{(1+p)^4}\left(\frac{a_4}{a} + \frac{b_4}{b} - \frac{a_4\,b_4}{a\,b}\right) = 1000 \times 0{,}204 \times \left(\frac{100}{103}\right)^4 = 181{,}2336$$

$$\frac{r}{(1+p)^5}\left(\frac{a_5}{a} + \frac{b_5}{b} - \frac{a_5\,b_5}{a\,b}\right) = 1000 \times 0{,}062 \times \left(\frac{100}{103}\right)^5 = 53{,}4812$$

Summa = 2053,1572

Das Kapital einer Rente von 1000 fl. beträgt mithin 2053,1572 fl., und das Kapital einer Rente von 100 fl. beträgt beiläufig 205 fl.

Die XIXte Tabelle enthält die nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux und zu den Zinsfüßen 3½ und 4½ berechneten Werthe der Leibrenten für zwei Köpfe für die Bedingung der Uebertragung der ganzen Rente auf den Ueberlebenden.

Auch für die Leibrenten auf zwei Köpfe wird in den Tarifen der Zinsfuß der Kapitalanlage angegeben; wie z. B. im nachfolgenden Tarif der im Vorhergehenden angeführten Pariser Versicherungsanstalt.

Alter des einen Rentners.	Alter des andern Rentners.	Rente einer Kapitalanlage von 100 Fr.		Preis einer Rente von 10 Fr.	
		Fr.	Cent.	Fr.	Cent.
	50	6	34	157	74
	55	6	61	151	24
	60	6	88	145	37
50	65	7	13	140	22
	70	7	34	136	27
	75	7	49	133	49
	55	6	97	143	41
	60	7	34	136	18
55	65	7	71	129	73
	70	8	01	124	75
	75	8	25	121	24
	60	7	85	127	38
60	65	8	38	119	26
	70	8	86	112	88
	75	9	23	108	32
	65	9	16	109	—
65	70	9	91	100	85
	75	10	56	94	72
70	70	11	04	90	57
	70	12	—	83	33
75	75	12	50	80	—

Lebensversicherungs-Vertrag.

122. Der Vertrag zwischen einer Lebensversicherungs-Anstalt und dem bei ihr Versicherten besteht überhaupt darin, daß sie unter gewissen Bedingungen die Verbindlichkeit übernimmt, nach dem innerhalb einer gewissen Zeit erfolgten Tode des Versicherten einem Andern eine gewisse Summe Geldes auszuzahlen. Man kann sich aber auch selbst in der Weise versichern lassen, daß man gegen terminweise Erlegung einer dem Vertrage angemessenen Vergütung, welche man für alle Versicherungsarten Prämie nennt, eine Lebensversicherungs-Anstalt die Verbindlichkeit übernehmen läßt, zu einer bestimmten Zeit, z. B. nach Verlauf von 10, 20 Jahren u. s. w. eine bestimmte Summe Geldes herzugeben, wobei die Bedingung stattfindet, daß die Anstalt von ihrer Verbindlichkeit befreit wird, wenn der Versicherte vor Ablauf der bestimmten Zeit mit Tode abgeht.

Derjenige, welcher gefährdet ist, im Alter zu darben oder nur ein nothdürftiges Auskommen zu haben, kann sich aus seinen Ersparnissen auf diese Weise ein Kapital für die Folge zusichern. Auf diese Weise kann auch zu Gunsten eines Dritten versichert werden, was z. B. zu Aussteuern, Studirkassen ꝛc. benutzt wird.

Aus dem Obigen erhellet, daß das Geschäft der Lebensversicherung von zweierlei Art ist: Das Versicherungskapital soll nämlich entweder nach dem Tode oder bei Lebzeiten des Versicherten oder auch eines Dritten erhoben werden. Eine Versicherung der letztern Art ist eine aufgeschobene Lebensversicherung. Hauptbestimmungen im Vertrag der eigentlichen, nicht aufgeschobenen, Lebensversicherung sind:

1) Die Angabe dessen, was die Versicherungs-Anstalt bedingungsweise zu zahlen verspricht;

2) die Bedingungen, unter welchen sie das Versicherungs-Kapital zu zahlen sich verbindlich macht;

3) die Dauer der Gültigkeit des Vertrags.

Der Vertrag kann in Beziehung auf Dasjenige, was die Versicherungs-Anstalt bedingungsweise zu zahlen sich verbindlich macht, von zweierlei Art seyn. Derjenige, zu dessen Gunsten versichert wird, soll entweder ein für allemal eine bestimmte Summe Geldes nach dem Tode desjenigen, welcher versichern läßt, erhalten, oder es soll demselbem jährlich bis zu seinem

Tode eine Rente von der Versicherungs-Anstalt ausgezahlt werden.

Der Vertrag kann in Betreff der verschiedenen Bedingungen, unter welchen die versicherte Summe von der Versicherungs-Anstalt ausgezahlt werden soll, von dreierlei Art seyn; es kann nämlich versichert werden:

1) auf einzelnes Leben,
2) auf Ueberlebung,
3) auf verbundenes Leben.

Bei der Versicherung auf einzelnes Leben muß die Versicherungs-Anstalt, wenn Derjenige, welcher versichern läßt, innerhalb der bestimmten Zeit stirbt, das Versicherungs-Kapital Demjenigen, zu dessen Gunsten versichert wird, oder dem rechtmäßigen Stellvertreter desselben zahlen; d. h. stirbt Derjenige, zu dessen Gunsten versichert wird, früher als Derjenige, welcher versichern läßt, so hat der rechtmäßige Besitzer des schriftlichen Versicherungs-Vertrags, der sogenannten Police, das versicherte Kapital von der Versicherungs-Anstalt zu empfangen, wenn letzterer mit Tode abgeht.

Die Versicherung auf Ueberlebung unterscheidet sich dadurch von derjenigen auf einzelnes Leben, daß nicht, wie bei dieser, ein Anderer als Derjenige, zu dessen Gunsten versichert wird, (z. B. als Erbe) das versicherte Kapital erhält, wenn dieser früher als der, welcher versichern läßt, mit Tode abgeht, so daß, wenn letzteres stattfindet, die Versicherungs-Anstalt die Prämie gewinnt.

Die Versicherung auf verbundenes Leben besteht in einer wechselweisen Versicherung zweier Personen, z. B. zwischen Mann und Frau; sie zahlen gemeinschaftlich die Prämie, und die Versicherungs-Anstalt hat der Frau das versicherte Kapital auszuzahlen, wenn der Mann mit Tode abgeht, oder diesem, wenn jene stirbt.

In Betreff der Zeit, für welche der Vertrag gültig ist, kann derselbe von zweierlei Art seyn; es kann versichert werden auf eine bestimmte Anzahl Jahre und lebenslänglich.

Derjenige, welcher sein Leben versichern lassen will, wird begreiflicherweise nur in dem Falle von der Versicherungs-Anstalt angenommen, wenn er sich in gutem Gesundheitszustande befindet. Die Versicherungs-Anstalt läßt zu dem Ende eine ärzt-

liche Untersuchung anstellen, und nach Befund derselben geht sie auf den Vertrag ein oder nicht. Wird nun z. B. der Versicherungs-Vertrag auf ein Jahr geschlossen, so hat sie, wie man zu sagen pflegt, die Prämie verdient, wenn der, welcher versichern ließ, nach Ablauf der Versicherungsjahres noch am Leben ist; der Vertrag ist alsdann abgelaufen, und die Versicherungs-Anstalt ist nicht gezwungen, sich auf weiteres Versichern einzulassen, wenn unterdessen der Versicherte kränklich geworden und zu erwarten steht, daß er nicht lange mehr leben werde. Hierauf kann sich Derjenige, welcher versichert werden will, vorsehen; er kann sich nämlich auf mehrere Jahre, z. B. auf fünf Jahre gegen Erstattung der einem solchen Vertrage angemessenen Prämie versichern lassen. In diesem Falle darf die Versicherungs-Anstalt, wenn der Versicherte das fünfte Versicherungsjahr erlebt hat, erst nach Ablauf dieser Zeit zum Behufe der weitern Versicherung die ärztliche Untersuchuug anstellen lassen. Auch kann man auf die übrige Dauer seines Lebens, lebenslänglich, mit der Versicherungsanstalt contrahiren; alsdann findet die ärztliche Untersuchung nur einmal, nämlich bei der Anmeldung zur Versicherung, statt.

Es liegt übriges in der Natur der Sache, daß die Police ungültig wird, wenn der Versicherte auf der See verunglückt, (ausgenommen in dem Falle, wenn gegen Seegefahr versichert wurde), oder sich in Kriegsdienste zu Lande oder zur See begiebt (ausgenommen, wenn eine erhöhte Prämie in Gemäßheit dessen bezahlt worden wäre), ferner, wenn er sich umbringt oder durch die Hand der Gerechtigkeit stirbt.

Prämienberechnung für Versicherung auf einzelnes Leben für ein Jahr.

123. Nehmen wir, in Beziehung auf die Versicherung auf einzelnes Leben für ein Jahr an, daß Derjenige, welcher sich auf diese Art versichern lassen will, 40 Jahre alt sey; der Vertrag besteht alsdann, wie im Vorhergehenden erklärt worden, darin, daß, wenn jene 40-jährige Person binnen Jahresfrist stirbt, die Versicherungs-Anstalt einer genannten Person oder ihrem Erben das Versicherungs-Kapital auszuzahlen hat; dieses Kapital betrage 100 fl., und es soll die den Versicherungs-Bedingungen entsprechende Prämie berechnet werden.

Nach der Sterblichkeitstabelle der Equitable-Gesellschaft bleiben von 5117 vierzigjährigen Personen nach Ablauf eines Jahers 5055 Personen übrig; es finden also 62 Todesfälle statt; neh-

men wir nun an, daß sich 5117 vierzigjährige Personen versichern lassen, so wird die Versicherungs-Anstalt im Laufe des Versicherungsjahres nach obiger Annahme 62 mal 100 fl. d. i. 6200 fl. auszuzahlen haben. Damit nun die Ausgabe der Einnahme gleichkomme, haben die zu versichernden 5117 Personen diese Summe aufzubringen; was demnach eine Person zu zahlen hat, ergiebt sich aus der Proportion:

$$5117 : 6200 = 1 : x = 1\,\frac{1083}{5117}$$

Anderes Verfahren. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte binnen Jahresfrist noch am Leben seyn werde, ist nach der Tabelle der Equitable-Gesellschaft $= \frac{5055}{5117}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er binnen Jahresfrist nicht mehr am Leben seyn werde, ist $1 - \frac{5055}{5117} = \frac{60}{5117}$; dafür, daß die Versicherungs-Anstalt sich verbindlich macht, in diesem Falle 100 fl. zu zahlen, kann sie sich also $\frac{62}{5117} \cdot 100$ fl. $= 1\,\frac{1083}{5117}$ fl., in Uebereinstimmung mit dem Resultat der ersten Berechnung geben lassen. Dieses Resultat bedarf aber noch einer Berichtigung, denn es kann nur der gegenwärtige Werth des Versicherungs-Kapitals für den Versicherten in Anschlag gebracht werden. Ist der von der Versicherungs-Anstalt hierbei angenommene Zinsfuß z. B. 3, so ist der Betrag der Prämie $\frac{62}{5117} \cdot \frac{100}{103} \cdot 100 = 1$ fl. 20 kr. 2 Pf.

Prämienberechnung für Versicherung auf einzelnes Leben für mehrere Jahre.

124. Der Vertrag für eine Versicherung auf einzelnes Leben für mehrere Jahre unterscheidet sich, wie im Vorhergehenden erklärt worden, dadurch von demjenigen für Versicherung auf einzelnes Leben für ein Jahr, daß zum Behufe der weitern Versicherung, wenn der Vertrag abgelaufen ist, die Versicherungs-Anstalt den Gesundheitszustand des zu Versichernden nicht, wie bei diesem, nach Ablauf jedes Versicherungsjahres, sondern erst nach Ablauf der in der Police bestimmten Anzahl Jahre untersuchen zu lassen berechtigt ist.

Da die Sterblichkeit mit dem zunehmenden Alter größer wird, so würde, wenn die Prämie von Jahr zu Jahr entrichtet wird,

was mehrentheils der Fall ist, der Versicherte jedes Jahr eine höhere Summe zahlen müssen; statt dessen setzen die Versicherungsanstalten eine der im Vertrage bestimmten Anzahl Jahre entsprechende Durchschnittsprämie fest, die also im Anfang höher, und in den letztern Jahren niedriger ist, als wenn der Versicherte nur von Jahr zu Jahr versichern ließe.

Nehmen wir an, daß eine 40-jährige Person sich auf die genannte Art für 5 Jahre versichern lasse; die Summe, welche nach ihrem Tode einer genannten Person, oder, wenn diese verstorben, dem rechtmäßigen Besitzer der Police ausgezahlt werden soll, betrage 100 fl.; man soll bestimmen, wie viel der Versicherte jährlich zu zahlen hat, wenn die jährlichen Prämien gleich groß seyn sollen.

Die Sterblichkeitstabelle der Equitable-Gesellschaft gibt Lebende:

für das	40te	Jahr	5117
„ „	41te	„	5055
„ „	42te	„	4993
„ „	43te	„	4931
„ „	44te	„	4869
„ „	45te	„	4806;
im	1ten	Jahr	62 Tode
„	2ten	„	62 „
„	3ten	„	62 „
„	4ten	„	62 „
„	5ten	„	63 „

Der Sterblichkeitstabelle zufolge wird also die Versicherungsanstalt zu zahlen haben:

nach dem	1ten	Jahre	62	× 100	= 6200	fl.
„ „	2ten	„	62	× 100	= 6200	„
„ „	3ten	„	62	× 100	= 6200	„
„ „	4ten	„	62	× 100	= 6200	„
„ „	5ten	„	63	× 100	= 6300	„

Soll nun die Prämie m, welche zu Anfang des ersten Versicherungsjahres entrichtet werden, für die folgenden Jahre beibehalten werden, so ist die Einnahme

im Anfang des	1ten	Jahres	5117	m
nach dem	1ten	Jahre	5055	m
„ „	2ten	„	4993	m

nach dem 3ten Jahre 4931 m
„ „ 4ten „ 4869 m

Da die Einnahme der Ausgabe gleich seyn muß, so müssen die gegenwärtigen Werthe der jährlichen Einnahmen und Ausgaben für die betreffende Zeit in Anschlag gebracht werden.

Für den Zinsfuß 3 ist die Berechnung wie folgt.

Ausgabe nach dem 1ten Jahre $6200\left(\frac{100}{103}\right) =$ fl. 6019. 25 kr.
„ „ „ 2ten „ $6200\left(\frac{100}{103}\right)^2 =$ fl. 5844. 5 kr.
„ „ „ 3ten „ $6200\left(\frac{100}{103}\right)^3 =$ fl. 5673. 52 kr.
„ „ „ 4ten „ $6200\left(\frac{100}{103}\right)^4 =$ fl. 5508. 37 kr.
„ „ „ 5ten „ $6300\left(\frac{100}{103}\right)^5 =$ fl. 5434. 25 kr.

Gesammtausgabe fl. 28480. 24 kr.

Einnahme im Anfang . . . . . fl. 5117 m
„ nach dem 1ten Jahre $5055\,x\left(\frac{100}{103}\right) =$ fl. $4907\frac{46}{60}\,m$
„ „ „ 2ten „ $4993\,x\left(\frac{100}{103}\right)^2 =$ fl. $4706\frac{22}{60}\,m$
„ „ „ 3ten „ $4931\,x\left(\frac{100}{103}\right)^3 =$ fl. $4512\frac{33}{60}\,m$
„ „ „ 4ten „ $4869\,x\left(\frac{100}{103}\right)^4 =$ fl. $4326\frac{2}{60}\,m$

Gesammteinnahme fl. $23569\frac{43}{60}\,m$

Aus $23569\frac{43}{60}\,m = 28480\frac{24}{60}$ folgt $m = \frac{28480^{24}/_{60}}{23569^{43}/_{60}} =$ fl. 1. 12 kr.

Wird für jedes Versicherungsjahr eine dem Mortalitätsverhältniß entsprechende Prämie angesetzt, so ist sie

für das 1te Jahr $= \frac{6200}{5117} \times \frac{100}{103} =$ fl. 1. 10 kr.
„ „ 2te „ $= \frac{6200}{5055} \times \frac{100}{103} =$ fl. 1. 10 kr.
„ „ 3te „ $= \frac{6200}{4993} \times \frac{100}{103} =$ fl. 1. 12 kr.

für das 4te Jahr $= \frac{6200}{4931} \times \frac{100}{103} =$ fl. 1. 13 kr.

„ „ 5te „ $= \frac{6300}{4869} \times \frac{100}{103} =$ fl. 1. 15 kr.

Bei den bisherigen Prämienberechnungen wurde angenommen, daß sämmtliche Auszahlungen für die Sterbfälle am Ende des Versicherungsjahres stattfinden, obgleich die Sterbfälle sich über das ganze Jahr vertheilen; da aber selbst für einjährige Perioden die Mortalitätstabellen keineswegs ganz zuverläßig sind, so dürfte es überflüssig seyn, kürzere Perioden, etwa vierteljährige Auszahlungen und vierteljährige Zinsen, anzunehmen.

Prämienberechnung für lebenslängliche Versicherung auf einzelnes Leben.

125. Die Berechnung der Prämie für lebenslängliche Versicherung auf einzelnes Leben ist von der vorigen nicht verschieden. Statt einer aus mehreren Jahren bestehenden Periode hat man bei der lebenslänglichen Versicherung eine Reihe von Jahren anzunehmen, welche sich erst mit dem höchsten Lebensalter schließt.

Bezeichnet überhaupt a die Anzahl der Lebenden von dem gegebenen Alter einer Person, a_1, a_2, a_3 u. s. w. beziehlich die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahre höherm Alter, so wird die Zahl der in jedem Jahre verstorbenen Personen durch $a - a_1$, $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$ u. s. w. ausgedrückt; bezeichnet ferner p den Zinsfuß, so sind, wenn die Durchschnittsprämie m für lebenslängliche Versicherung und für das Versicherungscapital v berechnet werden soll, die gegenwärtigen Werthe der Auszahlungen:

$$v \times \frac{a - a_1}{1+p},\ v \times \frac{a_1 - a_2}{(1+p)^2},\ v \times \frac{a_2 - a_3}{(1+p)^3} \text{ u. s. w.}$$

Die Einnahmen sind dagegen:

$$m\ a,\ \frac{m\ a_1}{1+p},\ \frac{m\ a_2}{(1+p)^2},\ \frac{m\ a_3}{(1+p)^3} \text{ u. s. w.}$$

Da die Einnahme der Ausgabe gleich seyn soll, so ist

$$m\left(a + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right) = v\left(\frac{a-a_1}{1+p} + \frac{a_1-a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_2-a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right)$$

$$\text{und } m = \frac{v\left(\frac{a-a_1}{1+p} + \frac{a_1-a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_2-a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right)}{a + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots}$$

Zu dieser Formel gelangt man auch auf folgende Art.

Bezeichnet, wie vorher, a die dem Alter des Versicherten entsprechende Anzahl der Lebenden, und beziehlich a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Anzahl der Lebenden von einem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahre höherm Alter, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte am Ende des 1ten Jahres noch lebt $= \frac{a_1}{a}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß er nicht lebt $= 1 - \frac{a_1}{a} = \frac{a - a_1}{a}$. Der Werth der versicherten Summe v kann also in Beziehung auf das 1te Jahr, und wenn der Zinsfuß durch p bezeichnet wird, auf $\frac{a - a_1}{a} \times \frac{v}{1 + p}$ angeschlagen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte, nachdem er das 1te Jahr erlebt hat, am Ende des 2ten Jahres noch lebt, ist $= \frac{a_2}{a_1}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß er stirbt $= 1 - \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1}$; weil aber der Sterbfall von dem Fortleben des Versicherten während des 1ten Jahres abhängt, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{a_1}{a}$ ist, so besteht die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte innerhalb des 2ten Jahres stirbt aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten $\frac{a_1 - a_2}{a_1}$ und $\frac{a_1}{a}$, und erstere Wahrscheinlichkeit ist daher $= \frac{a_1 - a_2}{a_1} \times \frac{a_1}{a} = \frac{a_1 - a_2}{a}$. Der Werth des Versicherungskapitals v kann mithin in Beziehung auf das 2te Jahr angeschlagen werden auf $\frac{a_1 - a_2}{a} \times \frac{v}{(1 + p)^2}$

In gleicher Weise sind die dem 3ten, 4ten, u. s. w. Jahre entsprechenden Werthe beziehlich

$$\frac{a_2 - a_3}{a} \times \frac{v}{(1+p)^3}, \frac{a_3 - a_4}{a} \times \frac{v}{(1+p)^4} \text{ u. s. w.}$$

Der gegenwärtige Werth w des Versicherungscapitals v ist demnach:

$$\frac{a - a_1}{a} \times \frac{v}{1+p} + \frac{a_1 - a_2}{a} \times \frac{v}{(1+p)^2} + \frac{a_2 - a_3}{a} \times \frac{v}{(1+p)^3} \text{ u. s. w.}$$

Oder $w = \frac{v}{a}\left(\frac{a-a_1}{1+p} + \frac{a_1-a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_2-a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right)$

Soll der Gegenwerth w des Versicherungskapitals v in jährlichen und gleichen Prämien erstattet werden, so hat man, wenn man sich die Prämie m in Beziehung auf den Empfänger (die Versicherungsanstalt) als eine Leibrente denkt, die Summe folgender Werthe dafür in Anschlag zu bringen:

$\frac{m}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right)$ (§. 120.)

Weil aber auch im Anfang des 1ten Versicherungsjahres die Prämie m entrichtet wird, so ist

$$m + \frac{m}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right) = w$$

Setzt man für w seinen Werth, so ist

$$m + \frac{m}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right) = \frac{v}{a}\left(\frac{a-a_1}{1+p} + \frac{a_1-a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_2-a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right)$$

$$\text{und } m = \frac{v\left(\frac{a-a_1}{1+p} + \frac{a_1-a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_2-a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right)}{a + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.}$$

in Uebereinstimmung mit der früher hergeleiteten Formel.

Ist z. B. der Versicherte (damit die Berechnung nicht zu weitläufig werde) 89 Jahr alt, so ist nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux

$a = 16,\ a_1 = 11,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 0$

$a - a_1 = 5,\ a_1 - a_2 = 4,\ a_2 - a_3 = 3,\ a_3 - a_4 = 2,$

$a_4 - a_5 = 1,\ a_5 - a_6 = 1$; für $v = 100$ und $p = \frac{3}{100}$ ist

$$w = \frac{100}{16}\left[5 \times \frac{100}{103} + 4 \times \left(\frac{100}{103}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{100}{103}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{100}{103}\right)^4 + 1 \times \left(\frac{100}{103}\right)^5 + 1 \times \left(\frac{100}{103}\right)^6\right]$$

$$= \frac{100}{16}\left(5 \times 0{,}9708 + 4 \times 0{,}9425 + 3 \times 0{,}9151 + 2 \times 0{,}8884 + 0{,}8626 + 0{,}8374\right)$$

$$= \frac{100}{16} \times 14{,}8461 = 92{,}77.$$

Zur Verwandlung des gefundenen Werths in eine Leibrente m hat man

$$92{,}77 = m + \frac{m}{16}\left[11 \times \frac{100}{103} + 7 \times \left(\frac{100}{103}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{100}{103}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{100}{103}\right)^4 + 1 \times \left(\frac{100}{103}\right)^5\right]$$

$$= m + \frac{m}{16} \times 23{,}58; \text{ daher } m = \frac{16 \times 92{,}77}{16 + 23{,}58} = 37{,}5$$

Dem Versicherungskapital 100 entspricht also für das gegebene Alter die jährliche Prämie 37,5.

Wird dagegen von Jahr zu Jahr versichert, so ist in Beziehung auf obiges Beispiel die Berechnung der Prämie wie folgt:

Erstes Jahr.

$$\text{Einnahme} = 16m, \text{ Ausgabe} = 5 \times 100; \text{ daher } m = \frac{5 \times 100 \times \frac{100}{103}}{16} = 30{,}33$$

Zweites Jahr.

$$\text{Einnahme} = 11m, \text{ Ausgabe} = 4 \times 100; \text{ daher } m = \frac{4 \times 100 \times \frac{100}{103}}{11} = 35{,}3$$

Drittes Jahr.

$$\text{Einnahme} = 7m, \text{ Ausgabe} = 3 \times 100; \text{ daher } m = \frac{3 \times 100 \times \frac{100}{103}}{7} = 41{,}6$$

Viertes Jahr.

$$\text{Einnahme} = 4m, \text{ Ausgabe} = 2 \times 100; \text{ daher } m = \frac{2 \times 100 \times \frac{100}{103}}{4} = 48{,}54$$

Fünftes Jahr.

$$\text{Einnahme} = 2m, \text{ Ausgabe} = 100; \text{ daher } m = \frac{100 \times \frac{100}{103}}{2} = 48{,}54$$

Sechstes und letztes Jahr.

Einnahme $= m$, Ausgabe $= 100$; daher $m = 100 \times \frac{100}{103}$

$= 97{,}08$

126. Hat die Versicherungskasse den speciellen Zweck, die Betheiligten in Stand zu setzen, durch verhältnißmäßig kleine jährliche Beiträge für den Fall ihres Todes ihren Angehörigen eine Summe Geldes zur Bestreitung der Beerdigungskosten zuzusichern, so ist sie eine Sterbkasse. Sterbkassen.

127. Wenn z. B. eine vierzigjährige Person zu Gunsten einer dreißigjährigen Person auf Ueberlebung für eine gewisse Zeit versichern läßt, so besteht, wie im Vorhergehenden erklärt worden, der Versicherungsvertrag darin, daß, wenn jene binnen der festgesetzten Frist stirbt, dieser das Versicherungskapital von der Anstalt ausgezahlt werden muß; daß hingegen die Anstalt die Prämie gewinnt, wenn Derjenige, welcher versichern läßt, Denjenigen überlebt, zu dessen Gunsten versichert wird. Bei der Berechnung der einem solchen Vertrage entsprechenden Prämie hat man also das Alter der beiden Personen zu berücksichtigen. Prämienberechnung für Versicherung auf Ueberlebung.

Bezeichnet man die Person, welche versichern läßt durch A, und diejenige, zu deren Gunsten versichert wird, durch B, so hat man zur Bestimmung der dem Vertrage entsprechenden Prämie die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß A früher stirbt als B.

Der A kann innerhalb eines angenommenen Zeitraums in folgenden Fällen früher als B mit Tod abgehen: 1) A stirbt in diesem Zeitraume und B bleibt am Leben; 2) beide Personen sterben in diesem Zeitraume, aber A zuerst.

Bezeichnet wieder a die Anzahl der Lebenden vom Alter der Person A, a_1, a_2, a_3 u. s. w. beziehlich die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahren höhern Alter; ferner b die Anzahl der Lebenden vom Alter der Person B, und b_1, b_2, b_3 u. s. w. die Anzahl der Lebenden von den um 1, 2, 3 u. s. w. Jahren höherm Alter, so ist die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall, nämlich daß A stirbt und B am Leben bleibt $= \left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\frac{b_1}{b}$; denn $\frac{a_1}{a}$ ist die Wahrscheinlich-

keit, daß A binnen Jahresfrist noch leben, und mithin $1-\frac{a_1}{a}$ die Wahrscheinlichkeit, daß er binnen dieser Zeit sterben werde; ferner ist $\frac{b_1}{b}$ die Wahrscheinlichkeit, daß B binnen Jahresfrist noch leben werde, und mithin besteht die für den ersten Fall gesuchte Wahrscheinlichkeit aus einem Produkt, dessen Faktoren $1-\frac{a_1}{b}$ und $\frac{b_1}{b}$ sind.

Für den zweiten Fall, nämlich, daß beide Personen binnen Jahresfrist sterben, aber A zuerst, ist die Wahrscheinlichkeit, vorausgesetzt, daß beide Personen gleiches Alter haben, $= \left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right) \times \frac{1}{2}$. Denn ist A so alt wie B, so kann es sich eben sowohl ereignen, daß A früher wie B, als daß B früher wie A stirbt; die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ist folglich $\frac{1}{2}$, und muß nun noch mit der Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen binnen Jahresfrist sterben nämlich mit $\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right) = \left(\frac{a-a_1}{a}\right) \times \left(\frac{b-b_1}{b}\right)$ multiplicirt werden.

Sind beide Personen aber nicht von gleichem Alter, ist z. B. A älter wie B, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt, größer als $\frac{1}{2}$, und ist A jünger als B, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt, kleiner als $\frac{1}{2}$. Weil $\frac{a-a_1}{a}$ und $\frac{b-b_1}{b}$ die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, daß A und B binnen Jahresfrist sterben werden, so wird die relative Wahrscheinlichkeit (§. 106), daß A früher als B sterben werde, ausgedrückt durch

$$\frac{\frac{a-a_1}{a}}{\frac{a-a_1}{a}+\frac{b-b_1}{b}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß A und B binnen Jahresfrist sterben werden, aber A zuerst, wird also ausgedrückt durch

$$\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\times\frac{\frac{a-a_1}{a}}{\frac{a-a_1}{a}+\frac{b-b_1}{b}}=\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b-b_1)}{b(a-a_1)}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß binnen Jahresfrist A früher stirbt als B, besteht demnach aus der Summe der den beiden Fällen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten; und ist

$$\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\frac{b}{b}+\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b-b_1)}{b(a-a_1)}}$$

Wir wollen nun an die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit gehen, daß A im 2ten, oder 3ten, u. s. w. Jahre früher als B sterben werde.

Am Ende des ersten Jahres ist die Wahrscheinlichkeit, daß A am Ende des zweiten Jahres noch leben werde $=\frac{a_2}{a_1}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er innerhalb des zweiten Jahres sterben werde ist demnach $1-\frac{a_2}{a_1}$; dieses Ereigniß hängt aber von dem Fortleben des A während des ersten Jahres ab, und weil die Wahrscheinlichkeit dafür $=\frac{a_1}{a}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A innerhalb des zweiten Jahres sterben werde,

$$=\left(1-\frac{a_2}{a_1}\right)\frac{a_1}{a}=\frac{a_1-a_2}{a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb des zweiten Jahres A sterben und B am Leben bleiben werde ist mithin $\left(\frac{a_1-a_2}{a}\right)\frac{b_2}{b}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen sterben, aber A zuerst, ist

$$\left(\frac{a_1-a_2}{a}\right)\left(\frac{b_1-b_2}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b_1-b_2)}{b(a_1-a_2)}}$$

und die Wahrscheinlichkeit für beide Ereignisse ist

$$\left(\frac{a_1-a_2}{a}\right)\frac{b_2}{b}+\left(\frac{a_1-a_2}{a}\right)\left(\frac{b_1-b_2}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b_1-b_2)}{b(a_1-b_2)}}$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für das 3te Jahr

$$\left(\frac{a_2 - a_3}{a}\right)\frac{b_3}{b} + \left(\frac{a_2 - a_3}{a}\right)\left(\frac{b_2 - b_3}{b}\right) \times \frac{1}{1 + \frac{a(b_2 - b_3)}{b(b_2 - b_3)}}$$

u. s. w.

Wenn man, zur Vereinfachung der Berechnung, statt der Brüche

$$\frac{1}{1 + \frac{a(b - b_1)}{b(a - a_1)}}, \frac{1}{1 + \frac{a(b_1 - b_2)}{b(a_1 - a_2)}} \text{ ꝛc.}$$

$\frac{1}{2}$ setzt, was, im Ganzen genommen, keine allzugroßen Fehler zur Folge hat, weil jene Brüche, wie vorhin bemerkt worden, größer und kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, so reduciren sich die gefundenen Wahrscheinlichkeiten auf die folgenden:

für das 1te Jahr $\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab}$

„ „ 2te „ $\frac{a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab}$

„ „ 3te „ $\frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{2ab}$

u. s. w.

Bezeichnet p den Zinsfuß, und v das Versicherungskapital, so hat, weil die Wahrscheinlichkeit, daß A vor B im Laufe des 1ten Jahres sterben werde $= \frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab}$ ist, die Versicherungsanstalt das in diesem Falle zu zahlende Kapital auf

$$\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab} \times \frac{v}{1 + p}$$

anzuschlagen; ebenso für das

2te Jahr auf $\frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2}{2ab} \times \frac{v}{(1+p)^2}$

3te „ „ $\frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{2ab} \times \frac{v}{(1+p)^3}$

u. s. w.

Der Totalwerth des Versicherungskapitals ist mithin anzuschlagen auf

$$\frac{v}{1 + p} \times \frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab} + \frac{v}{(1 + p)^2} \times \frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab} + \frac{v}{(1 + p)^3} \times \frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{2ab} +$$

u. s. w.

Zur Anwendung dieser Formel, und damit die Berechnung nicht zu weitläufig werde, soll berechnet werden, wie viel eine 90jährige Person (A) zu zahlen hat, wenn sich eine Versicherungsanstalt verbindlich macht, nach ihrem Tode einem Andern (B), welcher 89 Jahr alt ist, 1000 fl. zu geben.

Stellt man die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux an, so ist

$a = 11$, $a_1 = 7$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$,
$b = 16$, $b_1 = 11$, $b_2 = 7$, $b_3 = 4$, $b_4 = 2$, $b_5 = 1$, $b_6 = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit ist hiernach

für das 1te Jahr $= \frac{4 \cdot 27}{352} = 0{,}306$

„ „ 2te „ $= \frac{3 \cdot 18}{352} = 0{,}153$

„ „ 3te „ $= \frac{2 \cdot 11}{352} = 0{,}062$

„ „ 4te „ $= \frac{1 \cdot 6}{352} = 0{,}017$

„ „ 5te „ $= \frac{1 \cdot 3}{352} = 0{,}008$

Werden die gegenwärtigen Werthe von 1000 fl. zu 3 Procent berechnet, so ist der Totalwerth:

$$0{,}306 \times 1000 \left(\frac{100}{103}\right) + 0{,}153 \times 1000 \left(\frac{100}{103}\right)^2 \times 0{,}062 \times 1000 \left(\frac{100}{103}\right)^3 + 0{,}017 \times 1000 \left(\frac{100}{103}\right)^4 + 0{,}008 \times 1000 \left(\frac{100}{103}\right)^5 = 520.$$

Der Totalwerth des Versicherungskapitals wird indessen gewöhnlich nicht in einer Summe, sondern in jährlichen gleichen Beträgen oder Prämien entrichtet, und mithin muß die Summe der gegenwärtigen Werthe derselben dem Totalwerthe des Versicherungskapitals gleich seyn.

Weil die Prämienzahlungen aufhören, wenn eine der beiden Personen, A oder B, stirbt, oder so lange dauern, als A und B am Leben bleiben, so hat man zur Berechnung der jährlichen Prämie zuvörderst den Werth einer Rente zu bestimmen, welche auf eine Verbindung von zwei Personen lautet, d. h. so lange ausgezahlt wird, als diese Personen am Leben sind.

In Beziehung auf obige Bezeichnungen ist $\frac{a_1}{a}$ die Wahr-

scheinlichkeit, daß A zu Ende des 1ten Jahres noch am Leben seyn werde, und dasselbe gilt von $\frac{b_1}{b}$ in Beziehung auf den B; die Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen zu Ende des 1ten Jahres noch am Leben seyn werden, ist mithin $\frac{a_1 b_1}{a b}$; eben so sind beziehlich $\frac{a_2 b_2}{a b}$, $\frac{a_3 b_3}{a b}$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten, daß A und B zu Anfang des 2, des 3ten u. s. w. Jahres noch am Leben seyn werden. Wird die gesuchte jährliche Prämie, welche wir als eine Rente angesehen haben, durch m bezeichnet, so wird der Totalwerth der jährlichen Prämienzahlungen ausgedrückt durch:

$$m\left(\frac{a_1 b_1}{a b} \times \frac{1}{1+p} + \frac{a_2 b_2}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{a_3 b_3}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^3} + \ldots\ldots\right)$$

Dieser Totalwerth, welcher durch mt bezeichnet werde, muß dem Totalwerth T des Versicherungs-Kapitals gleich seyn; daher $mt = T$ und $m = \frac{T}{t}$

Weil aber die Prämie m schon im Anfang des Versicherungsjahres entrichtet wird, so muß folgende Gleichung stattfinden:

$$m + mt = T; \text{ daher } m = \frac{T}{1+t}$$

In Beziehung auf obiges Beispiel ist

$$\frac{a_1 b_1}{a b} = \frac{7 \cdot 11}{11 \cdot 16} = \frac{77}{176} = 0{,}437$$

$$\frac{a_2 b_2}{a b} = \frac{4 \cdot 7}{11 \cdot 6} = \frac{28}{176} = 0{,}159$$

$$\frac{a_3 b_3}{a b} = \frac{2 \cdot 4}{11 \cdot 6} = \frac{8}{176} = 0{,}045$$

$$\frac{a_4 b_4}{a b} = \frac{1 \cdot 2}{11 \cdot 6} = \frac{2}{176} = 0{,}011$$

$$\frac{a_5 b_5}{a b} = \frac{0 \cdot 1}{11 \cdot 6} = 0$$

$$\frac{a_1 b_1}{a b} \times \frac{1}{1+p} = 0{,}437\left(\frac{100}{103}\right) = 0{,}4242396$$

$$\frac{a_2 b_2}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^2} = 0{,}159\left(\frac{100}{103}\right)^2 = 0{,}1498575$$

Transport 0,5740971

Transport 0,5740071

$$\frac{a_3\ b_3}{a\ b} \times \frac{1}{(1+p)^3} = 0{,}045 \left(\frac{100}{103}\right)^3 = 0{,}0411095$$

$$\frac{a_4\ b_4}{a\ b} \times \frac{1}{(1+p)^4} = 0{,}011 \left(\frac{100}{103}\right)^4 = 0{,}0097724$$

$$t = 0{,}6250790$$

$$\text{Daher } m = \frac{T}{1+t} = \frac{520}{1{,}0625049} = 319$$

Die jährliche Prämie wäre hiernach 319 fl. für das Versicherungs-Kapital 1000 fl. und 31,9 oder beiläufig 32 fl. für das Versicherungs-Kapital 100 fl.

Prämienberechnung für Versicherung auf verbundenes Leben.

128. Der Vertrag der Versicherung auf verbundenes Leben besteht, wie im Vorhergehenden erklärt worden, darin, daß von zwei Personen, welche sich zusammen versichern lassen, Diejenige, welche die andere überlebt, das versicherte Kapital erhalten soll. Zur Bestimmung der einer solchen Versicherung angemessenen Prämie hat man nur die dem gegebenen Alter der Personen entsprechenden Prämienbeträge für Versicherung auf Ueberlebung zu addiren. Z. B. für die Alterszahlen 20 und 30 hat man nachzusehen, wie viel nach den Resultaten der Prämienberechnung für Versicherung auf Ueberlebung eine 20-jährige Person zu Gunsten einer 30-jährigen, und wie viel eine 30-jährige zu Gunsten einer 20-jährigen zu zahlen hat; die Summe dieser Werthe ist die gesuchte Prämie der Versicherung für zwei Personen, von welchen die eine 20 und die andere 30 Jahre alt ist.

Als praktische Belege in Betreff der Prämienansätze für die bisher in Betrachtung gezogenen Lebensversicherungsarten dienen die nachfolgenden Tarife der Gothaer Lebensversicherungsbank.

scheinlichkeit, daß A zu Ende des 1ten Jahres noch am Leben seyn werde, und dasselbe gilt von $\frac{b_1}{b}$ in Beziehung auf den B; die Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen zu Ende des 1ten Jahres noch am Leben seyn werden, ist mithin $\frac{a_1 b_1}{a b}$; eben so sind beziehlich $\frac{a_2 b_2}{a b}$, $\frac{a_3 b_3}{a b}$ u. s. w. die Wahrscheinlichkeiten, daß A und B zu Anfang des 2, des 3ten u. s. w. Jahres noch am Leben seyn werden. Wird die gesuchte jährliche Prämie, welche wir als eine Rente angesehen haben, durch m bezeichnet, so wird der Totalwerth der jährlichen Prämienzahlungen ausgedrückt durch:

$$m\left(\frac{a_1 b_1}{a b} \times \frac{1}{1+p} + \frac{a_2 b_2}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^2} + \frac{a_3 b_3}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^3} + \ldots\right)$$

Dieser Totalwerth, welcher durch mt bezeichnet werde, muß dem Totalwerth T des Versicherungs-Kapitals gleich seyn; daher $mt = T$ und $m = \frac{T}{t}$

Weil aber die Prämie m schon im Anfang des Versicherungsjahres entrichtet wird, so muß folgende Gleichung stattfinden:

$$m + mt = T; \text{ daher } m = \frac{T}{1+t}$$

In Beziehung auf obiges Beispiel ist

$$\frac{a_1 b_1}{a b} = \frac{7 \cdot 11}{11 \cdot 16} = \frac{77}{176} = 0{,}437$$

$$\frac{a_2 b_2}{a b} = \frac{4 \cdot 7}{11 \cdot 6} = \frac{28}{176} = 0{,}159$$

$$\frac{a_3 b_3}{a b} = \frac{2 \cdot 4}{11 \cdot 6} = \frac{8}{176} = 0{,}045$$

$$\frac{a_4 b_4}{a b} = \frac{1 \cdot 2}{11 \cdot 6} = \frac{2}{176} = 0{,}011$$

$$\frac{a_5 b_5}{a b} = \frac{0 \cdot 1}{11 \cdot 6} = 0$$

$$\frac{a_1 b_1}{a b} \times \frac{1}{1+p} = 0{,}437\left(\frac{100}{103}\right) = 0{,}4242396$$

$$\frac{a_2 b_2}{a b} \times \frac{1}{(1+p)^2} = 0{,}159\left(\frac{100}{103}\right)^2 = 0{,}1498575$$

Transport 0,5740971

Jährliche Prämien

für

eine Ueberlebensversicherung von 100 Thalern,

lautend

auf das Leben einer Person A für den Fall, daß dieselbe von einer andern im Voraus bestimmten Person B überlebt wird.

Alter von		Prämie.			Alter von		Prämie.			Alter von		Prämie.		
A	B	Thlr.	Sgl.	Pf.	A	B	Thlr.	Sgl.	Pf.	A	B	Thlr	Sgl.	Pf.
15	15	1	14	3	30	60	1	21	3	50	15	4	14	—
	20	1	12	11		65	1	19	8		20	4	12	6
	25	1	11	9		70	1	17	10		25	4	10	10
	30	1	10	5	35	15	2	20	7		30	4	9	—
	35	1	9	4		20	2	19	1		35	4	6	—
	40	1	7	11		25	2	17	1		40	4	2	3
	45	1	6	8		30	2	14	9		45	3	26	10
	50	1	5	7		35	2	11	7		50	3	20	—
	55	1	4	2		40	2	9	—		55	3	14	5
	60	1	2	11		45	2	6	3		60	3	8	6
20	15	1	22	3		50	2	3	9		65	3	3	—
	20	1	20	—		55	2	—	11		70	2	27	8
	25	1	18	9		60	1	28	—		75	2	22	2
	30	1	17	1		65	1	25	7	55	15	5	14	2
	35	1	15	9		70	1	23	6		20	5	12	10
	40	1	14	2	40	15	3	3	1		25	5	11	7
	45	1	12	10		20	3	1	9		30	5	9	7
	50	1	11	4		25	3	—	—		35	5	6	10
	55	1	10	3		30	2	27	6		40	5	3	4
	60	1	8	9		35	2	24	3		45	4	28	5
	65	1	7	3		40	2	20	—		50	4	21	6
25	15	2	1	4		45	2	16	11		55	4	12	4
	20	1	29	4		50	2	13	9		60	4	3	11
	25	1	26	11		55	2	10	6		65	3	25	5
	30	1	25	—		60	2	7	—		70	3	17	6
	35	1	23	5		65	2	3	5		75	3	10	3
	40	1	21	4		70	1	29	4					
	45	1	19	10	45	15	3	20	7	60	15	6	26	10
	50	1	18	3		20	3	19	5		20	6	25	5
	55	1	16	7		25	3	17	5		25	6	23	11
	60	1	15	4		30	3	15	4		30	6	22	2
	65	1	13	10		35	3	12	3		35	6	19	10
30	15	2	10	5		40	3	8	—		40	6	16	5
	20	2	8	8		45	3	2	8		45	6	11	7
	25	2	6	9		50	2	28	6		50	6	5	2
	30	2	3	10		55	2	24	1		55	5	26	—
	35	2	1	10		60	2	19	11		60	5	12	8
	40	1	29	8		65	2	15	10		65	5	—	—
	45	1	27	3		70	2	11	4		70	4	16	10
	50	1	25	2		75	2	6	6		75	4	5	1
	55	1	23	3							80	3	24	9

Die Prämien für die Zwischenalter z. B. von 24 und 37, von 31 und 19 Jahren u. s. w. werden nach Verhältniß berechnet.

Weil die Prämie für Versicherung auf verbundenes Leben aus der Summe der dem Alter beider Personen entsprechenden Prämien für Versicherung auf Ueberlebung besteht, so hat die Gothaer Lebensversicherungsbank keinen besondern Tarif dafür aufgestellt. Aus dem obigen Tarif für Versicherung auf Ueberlebung könnte man aber z. B. den folgenden für Versicherung auf verbundenes Leben aufstellen.

Versicherung auf Ueberlebung.					Versicherung auf verbundenes Leben				
Alter des Versicherten.	Alter dessen, der überleben soll.	Prämie.			Alter der beiden Personen.		Prämie.		
		Thlr.	Sgr.	Pf.			Thlr.	Sgr.	Pf.
30	35	2	1	10					
35	30	2	14	9					
					30	35	4	16	7
30	40	1	29	8					
40	30	2	27	6					
					30	40	4	27	2

u. s. w.

Wenn ferner bei Versicherungen auf Lebenszeit oder bei Versicherung auf Ueberlebung die Person, auf deren Leben die Police lautet, das neunzigste Jahr zurückgelegt hat, so hört nicht nur die Prämienzahlung auf, sondern es erfolgt auch von Seiten der Bank die Auszahlung der Versicherungssumme; diese Bestimmung ist übrigens keine willkührliche, sondern sie folgt aus den Grundlagen der Prämienberechnung. Die Altersberechnung ist aber darauf gegründet, daß bei der Bestimmung der Prämiensätze das Alter nur nach ganzen Jahren gerechnet worden, und daß das angetretene Altersjahr für voll gilt, wenn an dem Tage, wo die Anmeldungen und Antragspapiere von Seiten des zu Versichernden vollständig eintrafen, sechs Monate des Lebensjahres abgelaufen waren, außerdem aber nicht in Betracht gezogen wird. Wer also z. B. am 11. März 1800 geboren ist, gilt bis zum 11. September 1839 Mittags (also überhaupt bis mit Inbegriff des 11. Septembers, weil statutenmäßig alle Aufnahmen von der Mittagsstunde anfangen) noch als bloß 39 Jahre alt, vom 12. September an aber als 40 Jahre alt.

Dieselben Vortheile, nämlich Befreiung von fernern Beiträgen und Einziehen des versicherten Kapitals, können bei Versicherungen auf Lebenszeit, sowohl bei bereits bestehenden *) als neu abzuschließenden, auch für jüngere Altersstufen durch Einzahlung jährlicher Zusatzprämien unter folgenden Bedingungen erworben werden:

1) die tarifmäßigen Zusatzprämien sind zugleich mit den gewöhnlichen (Normal-) Prämien der betreffenden Versicherung und auf dieselbe Weise wie diese zu entrichten;

2) sie sind bis zum Eintritt des Zeitpunkts, für welchen Zahlbarkeit des Kapitals zugesichert worden ist, im Fall aber das versicherte Leben früher erlöschen sollte, nur bis zu diesem Todesfall mit dem in der Police bemerkten Betrage fortzuzahlen;

3) eine Rückvergütung derselben, wenn der Versicherte vor Erreichung jener Altersgrenze stirbt, findet nicht statt;

4) der Termin der Zahlbarkeit des Kapitals bei Lebzeiten der versicherten Person kann auf keinen frühern Zeitpunkt als auf eilf Jahre, vom Anfangspunkt der Versicherung an gerechnet, festgestellt werden. Diese Bestimmung gilt für neuabzuschließende Versicherungen unbedingt; für bereits bestehende Versicherungen indessen kann jener eilfjährige Zeitraum mit Anrechnung der bereits verflossenen Versicherungsjahre auf resp. 10, 9, 8, 7 und 6 Jahre, in keinem Falle jedoch auf eine kürzere Frist als auf fünf Jahre beschränkt werden;

5) stirbt die Person, deren Leben Gegenstand der Versicherung ist, vor Eintritt dieses Termins, so erfolgt die Auszahlung des versicherten Kapitals auf gewöhnliche Weise, spätestens drei Monate nach Beibringung der vorschriftsmäßigen Bescheinigungen; ist sie dagegen bei'm Eintritt dieses Termins noch am Leben, so wird, nach Beibringung einer amtlichen Bescheinigung darüber, die Zahlung der Versicherungssumme an den Inhaber der Police gegen Rückgabe derselben und der letzten Prämienquittung, wenn solche die Bank verlangt, unverzüglich geleistet.

Der unten folgende Tarif zeigt die Zusatzprämien für neu abzuschließende Versicherungen unmittelbar an. Z. B. eine 30-

*) Die Bestimmungen über Zusatzprämien sind nicht gleich Anfangs, sondern erst im Jahr 1841 gemacht worden.

Weil die Prämie für Versicherung auf verbundenes Leben aus der Summe der dem Alter beider Personen entsprechenden Prämien für Versicherung auf Ueberlebung besteht, so hat die Gothaer Lebensversicherungsbank keinen besondern Tarif dafür aufgestellt. Aus dem obigen Tarif für Versicherung auf Ueberlebung könnte man aber z. B. den folgenden für Versicherung auf verbundenes Leben aufstellen.

Versicherung auf Ueberlebung.					Versicherung auf verbundenes Leben				
Alter des Versicherten.	Alter dessen, der überleben soll.	Prämie.			Alter der beiden Personen.		Prämie.		
		Thlr.	Sgr.	Pf.			Thlr.	Sgr.	Pf.
30	35	2	1	10					
35	30	2	14	9					
					30	35	4	16	7
30	40	1	29	8					
40	30	2	27	6					
					30	40	4	27	2

u. s. w.

Wenn ferner bei Versicherungen auf Lebenszeit oder bei Versicherung auf Ueberlebung die Person, auf deren Leben die Police lautet, das neunzigste Jahr zurückgelegt hat, so hört nicht nur die Prämienzahlung auf, sondern es erfolgt auch von Seiten der Bank die Auszahlung der Versicherungssumme; diese Bestimmung ist übrigens keine willkührliche, sondern sie folgt aus den Grundlagen der Prämienberechnung. Die Altersberechnung ist aber darauf gegründet, daß bei der Bestimmung der Prämiensätze das Alter nur nach ganzen Jahren gerechnet worden, und daß das angetretene Altersjahr für voll gilt, wenn an dem Tage, wo die Anmeldungen und Antragspapiere von Seiten des zu Versichernden vollständig eintrafen, sechs Monate des Lebensjahres abgelaufen waren, außerdem aber nicht in Betracht gezogen wird. Wer also z. B. am 11. März 1800 geboren ist, gilt bis zum 11. September 1839 Mittags (also überhaupt bis mit Inbegriff des 11. Septembers, weil statutenmäßig alle Aufnahmen von der Mittagsstunde anfangen) noch als bloß 39 Jahre alt, vom 12. September an aber als 40 Jahre alt.

Dieselben Vortheile, nämlich Befreiung von fernern Beiträgen und Einziehen des versicherten Kapitals, können bei Versicherungen auf Lebenszeit, sowohl bei bereits bestehenden *) als neu abzuschließenden, auch für jüngere Altersstufen durch Einzahlung jährlicher Zusatzprämien unter folgenden Bedingungen erworben werden:

1) die tarifmäßigen Zusatzprämien sind zugleich mit den gewöhnlichen (Normal-) Prämien der betreffenden Versicherung und auf dieselbe Weise wie diese zu entrichten;

2) sie sind bis zum Eintritt des Zeitpunkts, für welchen Zahlbarkeit des Kapitals zugesichert worden ist, im Fall aber das versicherte Leben früher erlöschen sollte, nur bis zu diesem Todesfall mit dem in der Police bemerkten Betrage fortzuzahlen;

3) eine Rückvergütung derselben, wenn der Versicherte vor Erreichung jener Altersgrenze stirbt, findet nicht statt;

4) der Termin der Zahlbarkeit des Kapitals bei Lebzeiten der versicherten Person kann auf keinen frühern Zeitpunkt als auf eilf Jahre, vom Anfangspunkt der Versicherung an gerechnet, festgestellt werden. Diese Bestimmung gilt für neuabzuschließende Versicherungen unbedingt; für bereits bestehende Versicherungen indessen kann jener eilfjährige Zeitraum mit Anrechnung der bereits verflossenen Versicherungsjahre auf resp. 10, 9, 8, 7 und 6 Jahre, in keinem Falle jedoch auf eine kürzere Frist als auf fünf Jahre beschränkt werden;

5) stirbt die Person, deren Leben Gegenstand der Versicherung ist, vor Eintritt dieses Termins, so erfolgt die Auszahlung des versicherten Kapitals auf gewöhnliche Weise, spätestens drei Monate nach Beibringung der vorschriftsmäßigen Bescheinigungen; ist sie dagegen bei'm Eintritt dieses Termins noch am Leben, so wird, nach Beibringung einer amtlichen Bescheinigung darüber, die Zahlung der Versicherungssumme an den Inhaber der Police gegen Rückgabe derselben und der letzten Prämienquittung, wenn solche die Bank verlangt, unverzüglich geleistet.

Der unten folgende Tarif zeigt die Zusatzprämien für neu abzuschließende Versicherungen unmittelbar an. Z. B. eine 30-

*) Die Bestimmungen über Zusatzprämien sind nicht gleich Anfangs, sondern erst im Jahr 1841 gemacht worden.

jährige Person, welche sich versichern will, um, falls sie nicht durch frühern Tod die Versicherungssumme bereits ihren Erben hinterlassen hat, deren Zahlbarkeit nach Zurücklegung des 60ten Lebensjahres zu erwerben, hat auf je 100 Thl. Versicherungssumme eine jährliche Zusatzprämie von 25 Sgr. 7 Pf. zu entrichten.

Für bereits bestehende Versicherungen erleiden die Sätze dieses Tarifs eine Ermäßigung nach Verhältniß der beiden aus der vorletzten Verticalcolumne zu entnehmenden Proportionalzahlen, welche in jedem einzelnen Falle den beiden Altern: *a*) wo der Versicherte beitrat und *b*) wo er zur neuen Einrichtung übergeht, angehören. Gesetzt eine dreißigjährige Person sey schon 25 Jahre versichert worden, so würde die Zusatzprämie von 25 Sgr. 7 Pf. nach Verhältniß der beiden Proportionalzahlen, welche dem 30ten und 25ten Jahre angehören, also nach 862 und 909 zu ermäßigen seyn, und sich mithin auf $25\frac{7}{12} \times \frac{862}{909} = 24$ Sgr. 3 Pf. stellen. Für eine 50-jährige Person, welche schon im 40ten Jahre versichert wurde, und nach Zurücklegung des 70ten Jahres das Kapital empfangen will, würde die jährliche Zusatzprämie auf je 100 Thlr. Versicherungssumme (1 Thlr. 7 Sgr. 1 Pf.) $\times \frac{624}{757} = 1$ Thlr. — Sgr. 7 Pf. seyn.

Jährliche Zusatzprämien

für die Abkürzung lebenslänglicher Versicherungen.

Alter des Vers.	Alter wo das Kapital noch bei Lebzeiten zahlbar werden soll. 35 Thlr.	Sgl.	Pf.	40 Thlr.	Sgl.	Pf.	45 Thlr.	Sgl.	Pf.	50 Thlr.	Sgl.	Pf.	55 Thlr.	Sgl.	Pf.	60 Thlr.	Sgl.	Pf.	65 Thlr.	Sgl.	Pf.	70 Thlr.	Sgl.	Pf.	75 Thlr.	Sgl.	Pf.	80 Thlr.	Sgl.	Pf.	Proportional-Zahlen.	Alter des Vers.
15	2	23	8	1	25	2	1	7	—	—	24	9	—	16	2	—	10	2	—	6	—	—	3	2	—	1	4	—	—	5	1000	15
16	3	—	7	1	29	2	1	9	6	—	26	3	—	17	1	—	10	9	—	6	4	—	3	4	—	1	5	—	—	5	991	16
17	3	8	6	2	3	8	1	12	2	—	27	11	—	18	2	—	11	4	—	6	8	—	3	6	—	1	6	—	—	5	983	17
18	3	17	4	2	8	7	1	15	1	—	29	8	—	19	3	—	12	—	—	7	1	—	3	9	—	1	7	—	—	6	974	18
19	3	27	5	2	14	—	1	18	3	1	1	8	—	20	5	—	12	9	—	7	6	—	3	11	—	1	8	—	—	6	965	19
20	4	9	—	2	20	1	1	21	9	1	3	9	—	21	9	—	13	6	—	7	11	—	4	2	—	1	9	—	—	6	956	20
21	4	22	5	2	26	11	1	25	8	1	6	1	—	23	1	—	14	4	—	8	5	—	4	5	—	1	10	—	—	6	947	21
22	5	8	1	3	4	8	2	—	—	1	8	7	—	24	8	—	15	3	—	8	11	—	4	8	—	2	—	—	—	7	937	22
23	5	26	6	3	13	5	2	4	9	1	11	5	—	26	3	—	16	2	—	9	5	—	4	11	—	2	1	—	—	7	928	23
24	6	18	6	3	23	4	2	10	1	1	14	5	—	28	1	—	17	3	—	10	—	—	5	2	—	2	2	—	—	8	918	24
25	7	15	1	4	4	9	2	16	—	1	17	9	1	—	—	—	18	4	—	10	7	—	5	6	—	2	4	—	—	8	909	25
26	8	17	11	4	18	—	2	22	7	1	21	5	1	2	1	—	19	7	—	11	4	—	5	10	—	2	6	—	—	9	900	26
27	9	29	2	5	3	4	3	—	1	1	25	6	1	4	5	—	20	11	—	12	—	—	6	3	—	2	8	—	—	9	890	27
28	11	22	8	5	21	6	3	8	6	2	—	—	1	6	11	—	22	4	—	12	10	—	6	7	—	2	10	—	—	10	881	28
29	14	4	5	6	13	2	3	18	2	2	5	—	1	9	9	—	23	11	—	13	8	—	7	1	—	3	—	—	—	10	871	29
30	17	15	6	7	9	6	3	29	4	2	10	7	1	12	10	—	25	7	—	14	7	—	7	6	—	3	2	—	—	11	862	30
31	.	.	.	8	11	11	4	12	2	2	16	11	1	16	2	—	27	6	—	15	7	—	8	—	—	3	4	—	1	—	852	31
32	.	.	.	9	22	11	4	27	3	2	24	1	1	19	11	—	29	6	—	16	8	—	8	7	—	3	7	—	1	—	842	32
33	.	.	.	11	16	1	5	15	1	3	2	2	1	24	2	1	1	9	—	17	11	—	9	2	—	3	10	—	1	1	832	33
34	.	.	.	13	27	7	6	6	5	3	11	6	1	28	10	1	4	3	—	19	3	—	9	10	—	4	1	—	1	2	821	34
35	.	.	.	17	8	3	7	2	3	3	22	2	2	4	1	1	7	—	—	20	8	—	10	6	—	4	5	—	1	3	811	35
36	.	.	.	.	.	.	8	4	3	4	4	7	2	10	—	1	10	1	—	22	2	—	11	3	—	4	8	—	1	4	801	36
37	.	.	.	.	.	.	9	14	7	4	19	1	2	16	8	1	13	5	—	23	11	—	12	1	—	5	—	—	1	5	790	37
38	.	.	.	.	.	.	11	7	1	5	6	4	2	24	4	1	17	3	—	25	10	—	13	—	—	5	5	—	1	7	779	38
39	.	.	.	.	.	.	13	17	7	5	27	—	3	3	1	1	21	6	—	28	—	—	14	—	—	5	10	—	1	8	768	39
40	.	.	.	.	.	.	16	27	9	6	22	2	3	13	3	1	26	3	1	—	4	—	16	1	—	6	3	—	1	10	757	40
41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	23	5	3	25	1	2	1	9	1	3	—	—	16	4	—	6	9	—	1	11	745	41
42	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	3	1	4	9	1	2	8	—	1	6	—	—	17	8	—	7	3	—	2	1	733	42
43	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	24	10	4	25	9	2	15	2	1	9	4	—	19	3	—	7	10	—	2	3	720	43
44	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13	4	9	5	15	11	2	23	5	1	13	1	—	20	11	—	8	6	—	2	5	707	44
45	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	13	11	6	10	7	3	3	1	1	17	6	—	2	11	—	9	4	—	2	8	693	45
46	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	11	4	3	14	5	1	22	5	—	25	1	—	10	2	—	2	10	680	46
47	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	20	5	3	27	10	1	28	1	—	27	6	—	11	1	—	3	1	666	47
48	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	11	6	4	13	11	2	4	8	1	—	4	—	12	2	—	3	5	652	48
49	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	20	9	5	3	4	2	12	3	1	3	5	—	13	4	—	3	9	638	49
50	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	28	11	5	27	1	2	21	1	1	7	1	—	14	7	—	4	1	624	50
51	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	26	10	3	1	6	1	11	2	—	16	2	—	4	6	610	51
52	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	5	7	3	14	3	1	16	1	—	17	11	—	5	—	594	52
53	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	24	8	3	28	9	1	21	6	—	19	9	—	5	6	582	53
54	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	2	3	7	16	11	1	27	11	—	22	—	—	6	1	567	54
55	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	15	10	—	4	9	9	2	5	9	—	24	8	—	6	9	551	55
56	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	7	5	2	14	7	—	27	8	—	7	6	538	56
57	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	13	7	2	25	5	1	1	1	—	8	5	524	57
58	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	1	5	3	8	7	1	5	3	—	9	5	509	58
59	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	11	6	9	3	24	9	1	10	1	—	10	8	594	59
60	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14	10	5	4	14	11	1	15	11	—	12	1	478	60
61	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	10	7	1	22	11	—	13	9	463	61
62	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	13	11	2	1	5	—	15	9	447	62
63	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7	28	4	2	11	11	—	18	1	431	63
64	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9	29	11	2	25	1	—	21	—	415	64
65	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	29	1	3	11	9	—	24	6	398	65
66	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	3	3	—	28	11	381	66
67	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	1	10	1	4	5	364	67
68	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	10	8	1	11	5	347	68
69	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	5	7	1	20	4	330	69
70	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	10	26	9	2	2	2	312	70

Zur Erleichterung in der Prämienentrichtung ist den auf Lebenszeit Versicherten gestattet, ihre Prämien, mit Ausnahme der ersten, in halbjährigen Raten zu entrichten, wobei sie jedoch jedes Jahr die gestundete Prämienhälfte auf 6 Monate zu verzinsen haben. Zur weitern Erleichterung der Beitragspflicht bewilligt die Bank den auf Lebenszeit Versicherten gegen Einzahlung eines bestimmten Kapitals eine entsprechende Ermäßigung in der Prämie, dergestalt, daß sie jedem Versicherten freistellt, von den im Tarif enthaltenen Prämiensätzen den niedrigern zu wählen, welcher seinen Verhältnissen entspricht, und die Ausgleichung durch Anzahlung eines von der Bank zu berechnenden Kapitals zu erwirken. Z. B. eine Person, 40 Jahre alt, wünscht sich mit 2000 Thlr. zu versichern. Nach ihrem jetzigen Alter würde für diese Summe die Jahresprämie 67 Thlr. 22 Sgr. betragen; die Person hat jedoch ein Kapital von 500 Thlr. vorräthig, welches sie zur Erkaufung einer geringern Prämie zu verwenden wünscht. In diesem Falle gesteht ihr die Bank die Prämie des 15ten Jahres mit 37 Thlr. für 2000 Thlr. Versicherungskapital zu und fordert dafür die Einzahlung einer Ausgleichungssumme von 486 Thlr. 15 Sgr. Oder, ein Versicherter, welcher jetzt 60 Jahre alt ist und im 50ten Lebensjahre der Bank mit 1000 Thlr. Versicherungskapital beigetreten war, wünscht zur Prämie des 40ten Jahres überzugehen, und künftig statt 47 Thlr. 10 Sgr. an jährlicher Prämie nur 33 Thlr. 26 Sgr. zu entrichten. Die Bank bewilligt dies gegen Einzahlung eines Kapitals von 134 Thlr. 13 Sgr.

Prämienberechnung für Versicherung auf Ueberlebung mit lebenslänglichen Renten.

129. Zur Prämienberechnung für diejenige Versicherung auf Ueberlebung, bei welcher sich die Versicherungsanstalt bedingungsweise zur Gewährung einer lebenslänglichen Rente verbindlich macht, hat man den Werth einer Leibrente für eine Person A zu bestimmen, welche nach dem Tode einer andern Person B zahlbar wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß A nach 1, 2, 3 u. s. w. Jahren noch leben werde, wird nach den frühern Bezeichnungen ausgedrückt durch $\frac{a_1}{a}$, $\frac{a_2}{a}$, $\frac{a_3}{a}$ u. s. w., und die Wahrscheinlichkeit, daß B nach 1, 2, 3 u. s. w. Jahren noch leben werde, durch $\frac{b_1}{b}$, $\frac{b_2}{b}$, $\frac{b_3}{b}$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit, daß A für

irgend ein Jahr die lebenslängliche Rente erhält, hängt mithin davon ab, daß A noch lebt, und B gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist mithin

für das 1te Jahr $\frac{a_1}{a}\left(1-\frac{b_1}{b}\right)=\frac{a_1}{a}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}$

" " 2te " $\frac{a_2}{a}\left(1-\frac{b_2}{b}\right)=\frac{a_2}{a}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}$

" " 3te " $\frac{a_3}{a}\left(1-\frac{b_3}{b}\right)=\frac{a_3}{a}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}$

u. s. w.

Die Summe der gegenwärtigen, zum Zinsfuß p berechneten Werthe der Rente r ist mithin

$$\frac{r}{1+p}\left(\frac{a_1}{a}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\right)+\frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}\right)+\frac{r}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}\right)+\ldots..$$

Ist z. B. A (damit die Berechnung nicht zu weitläufig wird) 89 Jahre, und B 90 Jahre alt, so ist nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux

$a=16,\ a_1=11,\ a_2=7,\ a_3=4,\ a_4=2,\ a_5=1,\ a_6=0$

$b=11,\ b_1=7,\ b_2=4,\ b_3=2,\ b_4=1,\ b_5=0$

$$\frac{a_1}{a}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}=\frac{11}{16}-\frac{77}{176}=\frac{44}{176}=0{,}250$$

$$\frac{a_2}{a}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}=\frac{7}{16}-\frac{28}{176}=\frac{49}{176}=0{,}278$$

$$\frac{a_3}{a}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}=\frac{4}{16}-\frac{8}{176}=\frac{36}{176}=0{,}204$$

$$\frac{a_4}{a}-\frac{a_4\,b_4}{a\,b}=\frac{2}{16}-\frac{2}{176}=\frac{20}{176}=0{,}113$$

$$\frac{a_5}{a}-\frac{a_5\,b_5}{a\,b}=\frac{1}{16}-0=\frac{1}{16}=0{,}062$$

Werden die gegenwärtigen Werthe der Rente 1000 zu 3 Procent berechnet, so ist

$$\frac{r}{1+p}\left(\frac{a_1}{a}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\right)=0{,}25\times 1000\left(\frac{100}{103}\right)=242{,}7000$$

$$\frac{r}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}\right)=0{,}278\times 1000\left(\frac{100}{103}\right)^2=262{,}0150$$

Transport 504,7150

Transport 504,7150

$$\frac{r}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}\right)=0{,}204\times 1000\left(\frac{100}{103}\right)^3=186{,}6804$$

$$\frac{r}{(1+p)^4}\left(\frac{a_4}{a}-\frac{a_4\,b_4}{a\,b}\right)=0{,}113\times 1000\left(\frac{100}{103}\right)^4=100{,}3892$$

$$\frac{r}{(1+p)^5}\left(\frac{a_5}{a}-\frac{a_5\,b_5}{a\,b}\right)=0{,}062\times 1000\left(\frac{100}{103}\right)^5=53{,}4812$$

Summa = 845,2658

Das Kapital der lebenslänglichen Rente von 1000 fl. beträgt demnach etwas mehr als 845¼ fl.

Soll der Werth dieser lebenslänglichen Rente in jährlichen, während des Zusammenlebens der beiden Personen zahlbaren Prämien bestimmt werden, so hat man zuvörderst den Werth einer Rente zu bestimmen, welche auf eine Verbindung von zwei Personen lautet, d. h. so lange ausgezahlt wird, als diese Personen am Leben sind. Bezeichnet m die gesuchte Prämie, so ist der Totalwerth der jährlichen Prämien

$$m\left(\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\times\frac{1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2}{a\,b}\times\frac{1}{(1+p)^2}+\frac{a_3\,b_3}{a\,b}\times\frac{1}{(1+p)^3}+\ldots\right)$$

Weil die Prämie auch zu Anfang des ersten Versicherungsjahrs entrichtet wird, so ist, wenn obiger Ausdruck durch $m\,t$ bezeichnet wird,

$$m+m\,t=845{,}25 \text{ und } m=\frac{845{,}25}{1+t}$$

Da nun

$$\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\times\frac{1}{1+p}=0{,}4242396$$

$$\frac{a_2\,b_2}{a\,b}\times\frac{1}{(1+p)^2}=0{,}1498575$$

$$\frac{a_3\,b_3}{a\,b}\times\frac{1}{(1+p)^3}=0{,}0411795$$

$$\frac{a_4\,b_4}{a\,b}\times\frac{1}{(1+p)^4}=0{,}0097724$$

und $t=0{,}6250490$

so ist $m=\frac{845{,}25}{1{,}625049}=520{,}13.$

Hierzu als praktischer Beleg der Tarif einer Pariser Versicherungsanstalt (Union) für Versicherung auf Ueberlebung mit lebenslänglichen Renten.

Versicherung von 10 Franken Rente,

zahlbar auf den Kopf des bezeichneten Ueberlebenden,

zu beziehen vom Tode des Versicherten an.

Alter des Ueberlebenden.	Alter des Versicherten.	Jährliche Prämie. Fr.	C.	Alter des Ueberlebenden.	Alter des Versicherten.	Jährliche Prämie. Fr.	C.
	10	1	95		10	—	90
	20	2	67		20	1	27
	30	3	49		30	1	62
10	40	4	77	50	40	2	16
	50	7	13		50	3	34
	60	11	50		60	5	83
	65	14	94		65	7	89
	70	19	64		70	10	78
	10	1	70		10	—	64
	20	2	34		20	—	92
	30	3	06		30	1	16
	40	4	21		40	1	52
20	50	6	36	60	50	2	30
	60	10	39		60	4	05
	65	13	56		65	5	54
	70	17	91		70	7	69
	10	1	45		10	—	52
	20	2	00		20	—	76
	30	2	60		30	—	96
	40	3	58		40	1	24
30	50	5	49	65	50	1	86
	60	9	15		60	3	25
	65	12	05		65	4	47
	70	16	04		70	6	23
	10	1	18		10	—	42
	20	1	64		20	—	62
	30	2	11		30	—	78
	40	2	88		40	—	99
40	50	4	46	70	50	1	47
	60	7	61		60	2	56
	65	10	15		65	3	52
	70	13	67		70	4	91

Wittwen- und Waisenkassen.

130. Hat die Lebensversicherungsanstalt den speciellen Zweck der Versorgung von Wittwen, so ist sie eine Wittwen-Pensionsanstalt, und die im Obigen berechneten Ueberlebungsrenten sind in diesem Falle Wittwenpensionen. Werden solche Renten Kindern für den Fall des Ablebens ihrer Eltern auf eine bestimmte Anzahl von Jahren zugesichert, so sind sie Waisenpensionen.

Wittwen-Waisen-Pensionsanstalten kommen gewöhnlich mit einander vereinigt vor. *)

Aufgeschobene Lebensversicherung.

131. Die aufgeschobene Lebensversicherung besteht wie im §. 122 bereits angedeutet worden, darin, daß man gegen Entrichtung einer jährlichen Prämie oder einer ein für allemal zu zahlenden Summe Geldes eine Versicherungsanstalt die Verbindlichkeit zur Auszahlung eines gewissen Kapitals oder zur Gewährung einer Leibrente nach Ablauf einer zum voraus bestimmten Zeit übernehmen läßt. Ein solcher Vertrag kann ferner zu Gunsten dessen, welcher mit der Versicherungsanstalt contrahirt oder zum Vortheil eines Dritten lauten. Der Vertrag ist erloschen und die Versicherungsanstalt von ihrer Verbindlichkeit befreit, wenn der andere Theil (Contrahent) oder die Person zu deren Gunsten contrahirt worden ist, vor Ablauf der im Vertrage bestimmten Zeit mit Tode abgehen.

Berechnung der Leistungen der Versicherungsanstalt u. des Versicherten für aufgeschobene Lebensversicherung.

132. In den für die aufgeschobene Lebensversicherung von den Versicherungsanstalten aufgestellten Tarifen wird gewöhnlich das Kapital und die lebenslängliche Rente angegeben, welche einer einmaligen Einzahlung und einer als Einheit angenommenen, jährlich zu zahlenden Prämie entsprechen.

Wir wollen vorerst annehmen, daß nach Ablauf der vertragsgemäßen Zeit dem Versicherten ein bestimmtes Kapital ausgezahlt werden soll.

Ist die dem Alter des Versicherten entsprechende Anzahl der Lebenden in der Sterblichkeitstabelle $= a$, und bezeichnet a_n

*) Interessante Notizen in Betreff der Schicksale schlecht eingerichteter Anstalten dieser Art, enthält die im Jahr 1844 in München erschienene Schrift von D. A. Gebhard: Ueber Wittwen- und Waisen-Pensionsanstalten ꝛc. So wie es aber Wittwen- und Waisenkassen gegeben hat, welche von Unberufenen zum Nachtheil der Betheiligten errichtet wurden, so ermangeln auch die meisten der heutigen Sterbkassen (§. 126) aller mathematischen Grundlage.

die Anzahl der Lebenden nach n Jahren, als nach deren Ablauf dem Versicherten das Kapital ausgezahlt werden muß, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte noch n Jahre leben werde $= \frac{a_n}{a}$; wird nun die Versicherungssumme durch v und der Zinsfuß durch p bezeichnet, so hat die Versicherungsanstalt den Werth des Kapitals v anzuschlagen auf $\frac{a_n}{a} \times \frac{v}{(1+p)^n}$.

Ist z. B. der Versicherte 20 Jahre alt, ist ferner $n = 30$, $p = \frac{4}{100}$, $v = 100$, und nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux $a = 814$, $a_{30} = 581$, so ist

$$\frac{a_n}{a} \times \frac{v}{(1+p)^{30}} = \frac{581}{814} \times 100 \times 0{,}3083 = 22{,}05$$

Für eine einmalige Zahlung von 22,05 fl. kann demnach der Versicherte nach 30 Jahren 100 fl. erhalten, oder für eine einmalige Zahlung von 100 fl. so viel als aus der Proportion folgt:

$$22{,}05 : 100 = 100 : x = 453{,}51.$$

Soll für eine als Einheit angenommene und ein für allemal zu leistende Zahlung die Versicherungssumme berechnet werden, so ist, wenn der Betrag der einmaligen Zahlung durch z bezeichnet wird, die Einnahme der Versicherungsgesellschaft für a Personen $= a\,z$; dieses Kapital beträgt nach n Jahren $a\,z\,(1+p)^n$; nach dieser Zeit sind nur noch a_n Personen am Leben, und also ist $\frac{a\,z\,(1+p)^n}{a_n}$ das Kapital, zu deren Zahlung die Versicherungsanstalt sich verbindlich machen kann.

Für $a = 814$, $a_{30} = 581$, $z = 100$, $p = \frac{4}{100}$, $n = 30$ ist

$$\frac{a\,z\,(1+p)^n}{a_n} = \frac{814 \times 100 \times 3{,}2333}{581} = 452{,}99$$

was bis auf 0,52 mit der obigen Berechnung übereinstimmt.

Zur Berechnung der jährlich zu zahlenden Prämie für aufgeschobene Lebensversicherung bezeichne v die Versicherungssumme, p den Zinsfuß und n die Anzahl der Jahre; der gegenwärtige Werth von v ist hiernach $\frac{v}{(1+p)^n}$, und wenn

$\frac{a_n}{a}$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, daß der Versicherte nach n Jahren noch am Leben seyn werde, so ist der Werth der Versicherungssumme $= \frac{a_n}{a} \times \frac{v}{(1+p)^n}$.

Bezeichnet m die gesuchte Prämie, so ist der Werth der nach dem 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Jahre zu zahlenden Prämie anzuschlagen auf $\frac{a_1}{a} \times \frac{m}{1+p}$, $\frac{a_2}{a} \times \frac{m}{(1+p)^2}$, $\frac{a_3}{a} \times \frac{m}{(1+p)^3}$ u. s. w.; weil ferner die Prämie auch im Anfang des 1ten Versicherungsjahres entrichtet wird, so muß folgende Gleichung stattfinden:

$$\frac{a_n}{a} \times \frac{v}{(1+p)^n} = m + \frac{a_1}{a} \times \frac{m}{1+p} + \frac{a_2}{a} \times \frac{m}{(1+p)^2} + \ldots\ldots \frac{a_{n-1}}{a} \times \frac{m}{(1+p)^{n-1}}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit a und mit $(1+p)^n$ so ist

$$a_n \times v = a\,m\,(1+p)^n + a_1\,m\,(1+p)^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1}\,m\,(1+p)$$
$$= m\,(a\,(1+p)^n + a_1\,(1+p)^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1}\,(1+p))$$

und $v = \frac{m}{a_n}\,(a\,(1+p)^n + a_1\,(1+p)^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1}\,(1+p))$

Das der jährlichen Prämie m entsprechende Kapital v erhält man auch durch folgende Betrachtung.

Bezeichnen, wie vorher, a, a_1, a_2 u. s. w. die dem Alter des Versicherten entsprechende Anzahl der Lebenden vom 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Jahre, so erhält, wenn die Prämie wieder durch m bezeichnet wird, die Versicherungsanstalt

zu Anfang des 1ten Jahres $a\,m$
nach dem 1ten Jahre $a_1\,m$
" " 2ten " $a_2\,m$
" " 3ten " $a_3\,m$ u. s. w.

Rechnet man nun der Versicherungsanstalt die zukünftigen Werthe dieser Einnahmen an, so hat man die zukünftigen Werthe der anfänglichen Einnahme für n Jahre,

der Einnahme vom 1ten Jahre für $n-1$ Jahre
" " " 2ten " " $n-2$ "
" " " 3ten " " $n-3$ "
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
" " " $n-1$ " " 1 Jahre

zum Zinsfuß p zu berechnen.

Die Summe dieser Einnahmen ist demnach

$$a\,m\,(1+p)^n + a_1\,m\,(1+p)^{n-1} + \ldots\, a_{n-1}\,m\,(1+p)$$

Weil nach dem $n$ten Jahre nur noch a_n Personen am Leben sind, so kann einer Person der $a_n$te Theil dieser Summe gegeben werden, oder es ist

$$v = \frac{a\,m\,(1+p)^n + a_1\,m\,(1+p)^{n-1} + \ldots\, a_{n-1}\,m\,(1+p)}{a_n}$$

$$= \frac{m}{a_n}\Big(a\,(1+p)^n + a_1\,1+p)^{n-1} + \ldots a_{n-1}\,(1+p)\Big)$$

in Uebereinstimmung mit dem vorhin gefundenen Ausdruck.

Wird die Prämie gesucht, so ist

$$m = \frac{v\,a_n}{a\,(1+p^n + a_1\,(1+p)^{n-1} + \ldots\, a_{n-1}\,(1+p)}$$

Soll der Versicherte nach n Jahren einer lebenslänglichen Rente theilhaftig werden, und bezeichnen a_{n+1}, a_{n+2} u. s. w. die Anzahl der Lebenden des $n$ten, $(n+1)$ten, $(n+2)$ten u. s. w. Jahres von dem Alter des Versicherten an gezählt, und a die Anzahl der Lebenden, welche dem Alter desselben entspricht, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß derselbe nach dem $(n+1)$ten Jahre noch leben werde $\frac{a_{n+1}}{a}$, und der Werth der 1ten Jahresrente r ist mithin $\frac{a_{n+1}}{a} \times \frac{r}{(1+p)^{n+1}}$; eben so ist $\frac{a_{n+2}}{a} \times \frac{r}{(1+p)^{n+2}}$ der Werth der 2ten Jahresrente u. s. w.; für den Werth R der lebenslänglichen Rente hat man demnach

$$R = \frac{r}{a}\Big(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}} + \frac{a_{n+3}}{(1+p)^{n+3}} + \ldots\Big)$$

Wir haben nun noch den Werth von R in eine jährliche Rente zu verwandeln. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte nach dem 1ten Jahre noch leben werde, ist $\frac{a_1}{a}$; der Werth der nach dem 1ten Jahre zu zahlenden Prämie m ist demnach $\frac{a_1}{a} \times \frac{m}{1+p}$; der Werth der nach dem 2ten Jahre zu zahlenden Prämie ist $\frac{a_2}{a} \times \frac{m}{(1+p)^2}$ u. s. w. bis zu $\frac{a_n}{a} \times \frac{m}{(1+p)^n}$, welches der Werth der letzten Prämie ist. Die Summe dieser Werthe ist

$$\frac{m}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \cdots \frac{a_n}{(1+p)^n}\right)$$

Daher, und weil die Prämie m auch im Anfang des 1ten Versicherungsjahrs gezahlt wird, die Gleichung

$$m + \frac{m}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \cdots \frac{a_n}{(1+p)^n}\right) = R$$

$$\text{und } m = \frac{a\,R}{a + \frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \cdots \frac{a_n}{(1+p)^n}}$$

Hierzu als praktischer Beleg der Tarif der Versicherungsanstalt der Union in Paris für aufgeschobene Lebensversicherung, oder Angabe des Kapitals oder der Leibrente, welche ein Versicherter nach einer bestimmten Anzahl Jahre vermittelst einer einzigen von ihm oder zu seinen Gunsten gemachten Anlage von 1000 Franken oder vermittelst einer durch oder für ihn zu entrichtenden jährlichen Einlage von 100 Franken erhält.

Alter des Versicherten	Nach 10 Jahren.		Nach 15 Jahren.		Nach 20 Jahren.	
	Kapital.	Rente.	Kapital.	Rente.	Kapital.	Rente.
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr
Geburt	2286	118	2886	153	3658	200
1	1854	96	2336	125	2969	263
2	1783	93	2250	121	2864	159
3	1721	90	2175	118	2774	154
4	1681	89	2128	116	2718	152
5	1655	88	2097	115	2684	151
10	1600	88	2048	115	2627	155
15	1622	91	2081	121	2677	163
20	1642	96	2112	129	2715	175
25	1651	100	2122	137	2727	191
30	1658	107	2125	149	2768	215
35	1666	116	2151	167	2891	250
40	1674	130	2250	195	3109	307
45	1750	151	2419	239	4500	407
50	1858	184	2649	313	4107	513
55	1971	233	3056	382	—	—
60	2211	276	—	—	—	—
	Nach 25 Jahren.		Nach 30 Jahren.		Nach 40 Jahren.	
Geburt.	4681	264	6005	350	9931	461
1	3800	216	3879	286	8066	529
2	3668	209	4712	279	7788	518
3	3555	204	4568	273	7549	511
4	3485	202	4482	270	7404	509
5	3443	201	4430	281	7317	513
10	3380	206	4344	310	7272	564
15	3441	222	4422	352	7740	670
20	3489	245	4544	413	8441	834
25	3541	275	4773	508	9408	1110
30	3720	322	5142	672	11368	1421
35	3996	395	5699	859	—	—
40	4434	523	6874	—	—	—
45	5349	669	—	—	—	—

Alter des Versicherten	Nach 10 Jahren.		Nach 15 Jahren.		Nach 20 Jahren.	
	Kapital.	Rente.	Kapital.	Rente.	Kapital.	Rente.
	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.	Fr.
Geburt	1444	75	2399	128	3619	198
1	1381	72	2315	124	3522	194
2	1357	71	2288	123	3493	193
3	1339	70	2269	123	3473	193
4	1327	70	2256	123	3463	194
5	1318	70	2248	123	3458	195
10	1308	72	2255	127	3477	203
15	1321	74	2277	133	3513	214
20	1328	77	2292	140	3528	228
25	1333	81	2295	148	3532	248
30	1338	86	2291	161	3577	277
35	1343	93	2223	180	3722	322
40	1348	104	2412	209	3945	390
45	1392	120	2535	251	4239	500
50	1439	142	2679	316	4815	602
55	1495	176	2980	373	—	—
60	1629	203	—	—	—	—
	Nach 25 Jahren.		Nach 30 Jahren.		Nach 40 Jahren.	
Geburt.	5212	294	7269	424	13352	862
1	5090	289	7117	417	13097	858
2	5055	289	7076	419	13027	867
3	5033	289	7051	422	12983	878
4	5022	291	7042	425	12964	892
5	5019	293	7041	429	12961	909
10	5055	308	7079	457	13878	1023
15	5097	329	7133	500	13879	1200
20	5117	359	7253	562	14914	1474
25	5189	402	7574	655	16424	1938
30	5408	468	8086	799	19507	2438
35	5755	569	8832	1042	—	—
40	6249	737	10350	1294	—	—
45	7233	904	—	—	—	—

Von der unterschiedlichen Anwendung der Sterblichkeitstabellen auf Leibrenten und Lebensversicherungs-Anstalten.

133. Obgleich (in Mitbeziehung auf das, was im §. 113 über die specielle Anwendung der Sterblichkeitstabellen bemerkt worden ist), streng genommen, die Sterblichkeitstabellen nur für diejenigen Anstalten anwendbar sind, welche aus ihren eigenen Beobachtungen hervorgegangen oder darnach berichtigt worden sind, so können sie gleichwohl auch für Anstalten in andern Ländern in Anwendung gebracht werden, weil sich in allen civilisirten Ländern diejenigen Klassen der Bevölkerung, welche von Leibrenten- und Lebensversicherungs-Anstalten am meisten Gebrauch machen, in Beziehung auf Erziehung und Lebensweise und mithin auch in Betreff der Sterblichkeitsverhältnisse nicht sehr von einander unterscheiden.

Leibrenten- und Lebensversicherungs-Anstalten haben übrigens bei der Wahl einer Sterblichkeitstabelle ein entgegengesetztes Interesse, indem es den Erstern Nachtheil bringt, wenn die Lebensdauer sich in der Wirklichkeit höher zeigt, als sie bei der Berechnung der Renten angenommen haben; und die Letztern Verlust erleiden, wenn sich die wirkliche Lebensdauer geringer herausstellt, als sie bei der Berechnung der Prämien angenommen hatten. Zur Vermeidung dieser Nachtheile wählen daher die ersten Anstalten Sterblichkeitstabellen mit höherer, und die letztern Anstalten Sterblichkeitstabellen mit geringerer Lebensdauer. So bedienen sich z. B. in Frankreich die Leibrenten-Anstalten der nach gezählten Köpfen (têtes choisies) (§. 113) von Deparcieux aufgestellten Tabelle; die Lebensversicherungs-Anstalten dagegen berechnen ihre Prämien nach der allgemeinen, für ganz Frankreich construirten Tabelle von Duvillard, weil diese Tabelle eine rapidere Sterblichkeit (§. 118) als jene darbietet.

Verbindlichkeiten der Versicherungs-Anstalt und des Versicherten bei der freiwilligen Aufhebung des Vertrags von Seiten des Letztern.

134. Die gleichen jährlichen Prämien für lebenslängliche Versicherungen betragen im Anfang mehr und später weniger, als wenn von Jahr zu Jahr versichert wird (§. 123). Wenn nun ein lebenslänglich Versicherter den Vertrag aufheben und auf das versicherte Kapital Verzicht leisten will, so hat ihm, an und für sich betrachtet, die Versicherungsanstalt das was er an Prämien zu viel gezahlt hat, zu vergüten.

Angenommen, der Versicherte sey jetzt 46 Jahre alt, habe sich vor 10 Jahren lebenslänglich versichern lassen, und die dem Alter von 36 Jahren entsprechende jährliche Prämie von

3 fl. von 100 fl. Versicherungskapital bisher entrichtet. Soll nun der Vertrag aufgehoben werden, so hat man zur Ermittlung der in Rede stehenden Vergütung die gegenwärtigen Werthe der Zahlungen, zu welchen sich beide Contrahenten verbindlich gemacht haben, zu berechnen.

Wenn der Versicherte sich jetzt in seinem 46ten Jahre versichern ließe, so könnte er den Werth des Versicherungskapitals 100 anschlagen auf:

$$\frac{100}{a}\left(\frac{a-a_1}{1+p}+\frac{a_1-a_2}{(1+p)^2}+\frac{a_2-a_3}{(1+p)^3}+\ldots\right)$$ (§. 125)

in welchem Ausdruck a_1, a_2, a_3 u. s. w. die dem 46ten, 47ten, 48ten u. s. w. Lebensalter entsprechende Anzahl der Lebenden bezeichnen. Hätte dagegen der Versicherte fernerhin die dem Alter von 37 Jahren entsprechende Prämie im Betrage von 3 fl. jährlich zu entrichten, so könnte er den gegenwärtigen Werth dieser jährlichen Zahlungen anschlagen auf

$$\frac{3}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3}{(1+p)^3}+\ldots\right)$$

oder auf $3+\frac{3}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3}{(1+p)^3}+\ldots\right)$

je nachdem der Vertrag entweder unmittelbar nach oder vor der Zahlung der jährlichen Prämie aufgehoben wird. Demnach giebt die Differenz der den obigen Ausdrücken entsprechenden Werthe der Betrag der dem Versicherten zukommenden Vergütung.

Bei der jeweils vorzunehmenden Untersuchung des Vermögenstandes einer Versicherungsanstalt muß zur Bestimmung der Passivschulden auf dieselbe Art verfahren werden; denn die Anstalt hat zu dem Ende den jetzigen Werth der auf derselben ruhenden Verbindlichkeiten zu ermitteln, und also zu untersuchen, wie viel sie an die auf Lebenszeit Versicherten zurück zu zahlen hätte, wenn alle Versicherungsverträge aufgehoben würden.

Von den verschiedenen Arten von Lebensversicherungsanstalten.

135. Lebensversicherungsanstalten können durch den Zusammentritt von Personen, welche sich gegenseitig versichern wollen, entstehen, oder auch auf Actien errichtet werden.

Es liegt in der Natur der Sache, daß im erstern Falle nur die auf Lebenszeit Versicherten wirkliche Mitglieder und Eigenthümer der Anstalt sind, und also diejenigen nicht, welche temporär, d. h. nur auf eine gewisse Anzahl von Jahren versichert sind. Die lebenslänglich Versicherten leisten sich nicht nur unter

einander, sondern auch den temporär Versicherten für die Erfüllung der von der Anstalt übernommenen Verbindlichkeiten Gewähr. Wie für alle übrigen Lebensversicherungsarten, so werden auch für die temporären Versicherungen die Prämien gewöhnlich so berechnet, daß sie wahrscheinlichen Ueberschuß gewähren, d. h. daß die Einnahme größer wie die Ausgabe ist, und dieser Gewinn kommt den Theilhabern der Anstalt als Aequivalent für die übernommene Garantie zu.

Zu den Anstalten dieser Art gehört z. B. die Gothaer Lebensversicherungsbank, welche auf Gegenseitigkeit und Öffentlichkeit beruht; auf Gegenseitigkeit, indem die Gesammtheit der Theilhaber derselben jedem einzelnen Versicherten für die Erfüllung der gegen ihn übernommenen Verbindlichkeiten Garantie leistet; auf Oeffentlichkeit, indem alljährlich öffentliche Rechenschaft ohne Rückhalt abgelegt wird.

Die Einnahme der Bank besteht zunächst und hauptsächlich in den Prämiengeldern, außerdem noch in den Zinsen von ausgeliehenen Kapitalien und in zufälligem Agiogewinn.

Die Ausgabe der Bank besteht theils in den auszuzahlenden Versicherungssummen, Dividenden und einzelnen besondern Vergütungen aus der Reserve, theils in den Verwaltungskosten, deren Betrag von dem Bankvorstande mit Rücksicht auf möglichste Ersparnisse normal bestimmt ist, und für besondere Fälle bestimmt wird, theils endlich in zufälligen Verlusten, die etwa die Bank ohne Verschulden ihrer Beamten treffen könnten. Was nach Abzug der Ausgabe von der Einnahme übrig bleibt, fließt in den Fonds der Bank, der alle vorräthigen Zahlungsmittel derselben umfaßt. Ein Theil des Fonds der Bank dient als Reserve zur Deckung der Vergütungen bei künftigen Sterbfällen; ein anderer Theil als Sicherheitsfonds, um für außerordentliche Fälle Hülfsmittel darzubieten. Nach den Statuten dieser musterhaft organisirten und verwalteten Anstalt besteht die Reserve in dem, was von den Prämiengeldern zurückgelegt werden muß, weil alle für das ganze Leben oder auf mehrere Jahre Versicherte, insoweit ihre Prämiensätze sich gleich bleiben, in den ersten Jahren mehr, in den spätern Jahren aber weniger zahlen, als das Sterblichkeitsgesetz für jedes Jahr mitbringt. Das Mehr in den frühern Jahren dient zur Deckung des Weniger in den spätern Jahren, und wird als Reserve

zurückgelegt. Der jedesmalige wahre Betrag der Reserve wird jährlich nach den Grundsätzen der Prämienberechnung ausgemittelt. Auch wird derselbe noch von Zeit zu Zeit durch besondere Berechnung nach den bei dem Institute selbst sich etwa ergebenden Abweichungen der angenommenen Sterblichkeitsgesetze berichtigt. Den Sicherheitsfonds bilden die angesammelten jährlichen reinen Ueberschüsse. Der reine Ueberschuß eines Jahres ist diejenige Summe, welche nach Abzug der Ausgabe und Reserve desselben Jahres von der Einnahme übrig bleibt. Er gehört den Banktheilhabern und zwar jedem zu seinem Antheil, nach Maaßgabe der eingezahlten Jahresprämie, und macht die Dividende des jedesmaligen Jahres aus. Die Zinsen der ausgeliehenen Kapitalien, so wie die vorkommenden zufälligen Einnahmen wachsen dem Ueberschusse des Jahres zu, in welchem sie zur Einnahme kommen. Dagegen werden zufällige Verluste von dem Ueberschusse des Jahres in Abzug gebracht. Wenn sich einmal in einem Jahre kein reiner Ueberschuß ergeben, sondern noch Etwas zuzuschießen seyn sollte, so wird dieses von den unvertheilten Ueberschüssen der vorhergehenden Jahre, und zwar nach Verhältniß eines jeden Jahres, genommen, oder bei etwaiger Unzulänglichkeit solcher Ueberschüsse durch einen Zuschuß der Banktheilhaber, der nach dem Verhältniß ihrer Jahresprämie geleistet wird, gedeckt. Die Bestimmungen über die Aufbewahrungszeit des Sicherheitsfonds und über die Vertheilung der Dividenden bleibt dem Ermessen des Bankvorstandes überlassen, wobei der Grundsatz gilt, daß die in den frühern Jahren gesammelten Ueberschüsse immer zuerst zur Vertheilung kommen. Dem Bankvorstand ist dabei die Verpflichtung auferlegt, für angemessene Sicherheitsfonds zu sorgen, damit jede Besorgniß wegen Nachschüssen wegfalle, und zu verhüten, daß nicht einerseits durch zweckloses Ansammeln das Eigenthum der Interessenten über die Gebühr zurückgehalten, und die richtige Abmessung der Antheile zu schwierig gemacht, anderseits aber bei übermäßig angehäuften Summen die Bewahrung und verzinsliche Benutzung der Fonds erschwert und gefährdet werde.

Die Auszahlung der Dividende von einem Jahre wird auf die Prämien aller in demselben Jahre versichert gewesenen Banktheilhaber, die nicht nach §. 67, 76 und 78 der Statu-

ten *) ausdrücklich davon ausgeschlossen sind, gewährt, mag ihre Versicherung zur Zeit der Auszahlung noch fortbestehen oder erloschen seyn.

Auf Versicherungen, die zur Zeit der Auszahlung der Dividende noch bestehen, wird die Dividende durch Abrechnung an der zunächst zu zahlenden Prämie, auf erloschene Versicherungen durch Baarzahlung an die Inhaber der Dividendenscheine (oder Anweisungen zur Erhebung der Dividenden) gewährt.

Die Benutzung des Bankfonds geschieht durch zinstragende Ausleihungen, welche vorzugsweise in den Staaten, aus wel-

---

*) §. 67. Die Versicherung erlischt ferner, wenn sich nach abgeschlossener Versicherung früher oder später finden sollte, daß derjenige, auf dessen Leben versichert worden ist, in der zum Behuf der Declaration irgend eine Unwahrheit angeben, oder auf die an ihn gerichteten Fragen wahrheitswidrig Etwas verschwiegen hat, oder wenn sich in den eingereichten Zeugnissen falsche Angaben, die mit Vorwissen oder gar auf Veranlassung des Antragstellers geschehen sind, finden sollten. In diesem Falle geht jeder Anspruch nicht nur auf die Versicherungssumme, sondern auch auf die bereits eingezahlten Prämien und auf die Dividenden-Antheile verloren.

§. 76. Der Bank bleibt, wenn sie die über die Ursache eines Todesfalles beigebrachten Papiere nicht auslangend findet, oder überhaupt auf den Grund möglicher Anwendung von §. 67 bis 73 nach gewissenhaftem Ermessen Bedenken tragen sollte, ohne Weiteres die Auszahlung der Versicherungssumme zugestehen, das Recht vorbehalten, besondere Nachweisungen über einige oder über alle Punkte, namentlich auch nach Befinden eidliche Bestärkung der Angaben zu fordern. Werden die überreichten Nachweisungen falsch befunden, so gehen alle aus dem Versicherungsvertrage hergeleiteten Ansprüche an die Bank verloren.

§. 78. Wenn innerhalb zweier Jahre, vom Todestage der Person an, auf deren Leben die Versicherung lautete, gerechnet, die erforderlichen Sterbefallpapiere nicht beigebracht werden, oder der Inhaber der Police mit einem Anspruch an die Bank nicht hervortritt, so fällt die Versicherungssumme an die Bank als Eigenthum zurück, und es kann alsdann an sie kein Anspruch mehr auf jene Police gegründet werden. Verweigert die Bank die Zahlung einer in Anspruch genommenen Versicherungssumme, so hat der Police-Inhaber, wenn er seinen Anspruch auf gerichtlichem Wege zu verfolgen beabsichtigt, die desfallsige Klage längstens binnen sechs Monaten vom Tage der von Seiten der Bank schriftlich zu erlassenden Verweigerung an gerechnet, bei dem Herzoglichen Justizkollegium in Gotha, bei Verlust seines Klagrechts, zu überreichen.

chen die zu verleihenden Gelder eingegangen sind, in so weit dieß thunlich ist, bewirkt werden.

Die Bücher der Bank werden kaufmännisch geführt, und am Ende eines jeden Jahres abgeschlossen. Die jährliche Abschlußrechnung wird, begleitet von kürzeren oder ausführlicheren Nachweisungen und Zusammenstellungen über die Ereignisse des abgelaufenen Jahres unter dem Namen Rechenschaftsbericht den Banktheilhabern mitgetheilt.

Nach einem andern Princip verfährt die, ebenfalls auf Gegenseitigkeit gegründete, Hannöversche Lebensversicherungsanstalt. Die Prämiensätze für die temporären und lebenslänglichen Versicherungen bleiben sich nicht gleich, sondern steigen mit dem zunehmenden Alter, und werden erst am Ende jedes Jahres nach den darin stattgefundenen Todesfällen bestimmt. Zur Bestimmung der Größe der von den Theilnehmern je nach ihrem Alter und der versicherten Summe zu leistenden Beiträge, ist vorläufig bestimmt, wie hoch sich die Beiträge für je 100 Thlr. der versicherten Summe nach dem Alter des Versicherten belaufen würden, wenn die Sterblichkeit genau nach dem Mortalitätsgesetz stattfände, und die entsprechenden Resultate geben also die muthmaßliche Größe der zu leistenden Beiträge an. Nach Ablauf eines jeden Rechnungsjahres wird nach der Summe der geleisteten Zahlungen berechnet, wie hoch sich der Beitrag eines jeden Theilnehmers nach Maaßgabe seines Alters für jedes Hundert der versicherten Summe belaufen muß, wobei vorerwähnte muthmaßliche Beiträge als Repartitionsfuß zum Grunde gelegt, und zugleich vom Grundsatz ausgegangen wird, daß außer den Verwaltungskosten von den Theilnehmern in keinem Jahre mehr aufgebracht werden soll, als in Folge der in diesem Jahre stattgefundenen Todesfälle ausgezahlt werden muß. Bei dieser Einrichtung ist darauf abgesehen, daß sich kein bedeutender Ueberschuß anhäufe, dessen Vertheilung unter die Betheiligten in so fern Schwierigkeiten darbieten dürfte, als die ältern Mitglieder der Anstalt größere Ansprüche als die neu hinzugekommenen am Gewinn haben.

II. Rentenanstalten.

136. Rentenanstalten haben den Zweck, ihren Theilnehmern gegen bestimmte Kapitaleinlagen gewisse jährliche, mit zunehmendem Alter wachsende Renten zu gewähren. Die Zunahme der Rente beruht auf der Erbvereinigung der Theilnehmer der Anstalt, und letztere ist daher eine modificirte Tontine. (§. 92).

Nehmen wir z. B. an, daß 71 83-jährige Personen (damit die Berechnung nicht zu weitläufig werde) zu gleichen Theilen 71000 fl. zusammenlegen, wonach die Einlage jedes Theilnehmers 1000 fl. beträgt. Wird dieses Kapital zu 4 Procent verzinslich angelegt, so betragen die Interessen desselben 2840 fl. Nun sind aber nach Ablauf des 1ten Jahres die Theilnehmer nicht mehr alle am Leben; nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux (IV) z. B. leben nach dem 1ten Jahre nur noch 59 Personen; mithin theilen sich 59 Theilnehmer in 2840 fl., und die Rente beträgt daher $\frac{2840}{59} = 48{,}13$ fl.

Der weitere Fortgang der Rente ist nach der angeführten Tabelle wie folgt:

für das 2te Jahr $\frac{2840}{48} =$ fl. 59,16
„ „ 3te „ $\frac{2840}{38} =$ „ 74,73
„ „ 4te „ $\frac{2840}{29} =$ „ 97,93
„ „ 5te „ $\frac{2840}{22} =$ „ 129,09
„ „ 6te „ $\frac{2840}{16} =$ „ 177,5
„ „ 7te „ $\frac{2840}{11} =$ „ 258,18
„ „ 8te „ $\frac{2840}{7} =$ „ 405,71
„ „ 9te „ $\frac{2840}{4} =$ „ 710
„ „ 10te Jahr $\frac{2840}{2} =$ „ 1420
„ „ 11te „ $\frac{2840}{1} =$ „ 2840

Theorie der Kapitalauflösung.

137. Wir haben angenommen, daß sich die Theilnehmer nur in die Zinsen des Kapitals theilen; soll denselben aber auch das Kapital wieder anheimfallen, so muß dasselbe in Renten aufgelöst werden. Die Auflösung kann entweder in der Weise stattfinden, daß man die dem Kapital und der Dauer der Verbindung der Theilnehmer entsprechende Zeitrente, oder aber die Einlagen der abgegangenen Mitglieder unter die Ueberlebenden vertheilt.

138. Weil, in Beziehung auf das im §. 136 aufgestellte Beispiel, nach dem 12ten Jahre, der Sterblichkeitstabelle zufolge, keine Theilnehmer mehr am Leben sind, so kann man das Kapital zum angenommenen Zinsfuße in eine 11-jährige Zeitrente auflösen. Da nun, nach Tabelle II., dem Kapital 8,7604 die 11-jährige Rente 1 entspricht, so entspricht dem Kapital 71000 fl. eine Rente von 8104 fl.

Die, in Folge der Erbvereinigung, steigende Rente ist also

nach dem 1ten Jahre $\frac{8104}{59}$ = fl. 137,35

„ „ 2ten „ $\frac{8104}{48}$ = „ 168,83

„ „ 3ten „ $\frac{8104}{38}$ = „ 213,26

„ „ 4ten „ $\frac{8104}{29}$ = „ 279,44

„ „ 5ten „ $\frac{8104}{22}$ = „ 368,36

„ „ 6ten „ $\frac{8104}{16}$ = „ 506,5

„ „ 7ten „ $\frac{8104}{11}$ = „ 736,72

„ „ 8ten „ $\frac{8104}{7}$ = „ 1157,71

„ „ 9ten „ $\frac{8104}{4}$ = „ 2026

„ „ 10ten „ $\frac{8104}{2}$ = fl. 4052

„ „ 11ten „ $\frac{8104}{1}$ = „ 8104

Nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux und für den Zinsfuß 4 ist das Kapital der Leibrente 1 für eine 83-jährige Person = 2,939 (Tab. XVIII); dem Kapital 1000 entspricht demnach eine Leibrente von 340,25 fl., und mithin ist, in Beziehung auf obiges Beispiel, die steigende Rente schon im 5ten Jahre größer, als die dem Alter des Betheiligten entsprechende Leibrente.

139. Theilen sich die Ueberlebenden in die Zinsen und das Kapital der abgegangenen Mitglieder, so ist, in Beziehung auf obiges Beispiel, die Rente für das

1te Jahr $\frac{71000\times4}{100\times59}+\frac{12\times1000}{59}=48{,}13+203{,}38=251{,}51$

2te „ $=\frac{59000\times4}{100\times48}+\frac{11\times1000}{48}=49{,}16+229{,}16=278{,}32$

3te „ $=\frac{48000\times4}{100\times38}+\frac{10\times1000}{38}=50{,}52+263{,}15=313{,}68$

4te „ $=\frac{38000\times4}{100\times29}+\frac{9\times1000}{29}=52{,}41+310{,}34=362{,}75$

5te „ $=\frac{29000\times4}{100\times22}+\frac{7\times1000}{22}=52{,}72+318{,}18=370{,}9$

6te „ $=\frac{22000\times4}{100\times16}+\frac{6\times1000}{16}=55+375=430$

7te „ $=\frac{16000\times4}{100\times11}+\frac{5\times1000}{11}=58{,}18+454{,}54=512{,}72$

8te „ $=\frac{11000\times4}{100\times7}+\frac{4\times1000}{7}=62{,}85+571{,}42=634{,}27$

9te „ $=\frac{7000\times4}{100\times4}+\frac{3\times1000}{4}=70+750=820$

10te „ $=\frac{4000\times4}{100\times2}+\frac{2\times1000}{2}=80+1000=1080$

11te „ $=\frac{2000\times4}{100\times1}+\frac{1\times1000}{1}=80+1000+2000=3080$

Bei dieser Vertheilungsweise ist schon im 4ten Jahre die steigende Rente größer wie die Leibrente.

140. Die Vertheilung kann auch in der Weise geschehen, daß jedem Ueberlebenden statt des Antheils am Kapital der ab-

gegangenen Mitglieder eine seinem Alter entsprechende Leibrente zufällt.

Nach der XVIIIten Tabelle ist für das Alter von 84 Jahren, für den Zinsfuß 4 und die Leibrente 1 das Kapital = 2,679; für das Kapital 203,38 ist daher die Rente = $\frac{203,38}{2,679}$ = 75,91; für 85 Jahre und das Kapital 229,16 ist die Rente = $\frac{229,16}{2,424}$ = 94,53; für 86 Jahre und das Kapital 263,15 ist die Rente = $\frac{263,15}{2,185}$ = 120,43; für 87 Jahre und das Kapital 310,34 ist die Rente = $\frac{310,34}{1,977}$ = 156,97; für 88 Jahre und das Kapital 318,18 ist die Rente = $\frac{318,18}{1,711}$ = 185,96; für 89 Jahre und das Kapital 375 ist die Rente = $\frac{375}{1,446}$ = 259,34 u. s. w. Die Rente ist daher nach dem

1ten Jahre = 48,13
2ten „ = 49,16 + 75,91 = 125,07
3ten „ = 50,52 + 75,91 + 94,53 = 220,96
4ten „ = 52,41 + 75,91 + 94,53 + 120,43 = 343,28
5ten „ = 52,72 + 75,91 + 94,53 + 120,43 + 156,97 = 500,56
6ten „ = 55 + 75,91 + 94,53 + 120,43 + 156,97 + 185,96 = 688,8
7ten „ = 58,18 + 75,91 + 94,53 + 120,43 + 156,97 + 185,96 + 259,34 = 951,32
u. s. w.

141. Der den Ueberlebenden anheimfallende Kapitalantheil kann endlich auch, nach einem angenommenen Verhältniß, zum Theil baar ausgezahlt und zum Theil in eine Leibrente verwandelt werden.

142. Zum Behufe weiterer Untersuchungen wollen wir jetzt annehmen, daß

812 80-jährige Personen
697 81 „ „
590 82 „ „
zusammen 2099 Personen;

ferner, daß 492 83-jährige Personen
404 84 „ „
327 85 „ „
zusammen 1223 Personen;
endlich, daß 261 86-jährige Personen
206 87 „ „
159 88 „ „
zusammen 626 Personen

sich dazu vereinigen, ihre Einlagen von 100 fl. dem Verein unter der Bedingung für immer zu belassen, daß die aus der Kapitaleinlage entspringende Rente der mit Tode abgehenden Mitglieder unter die Ueberlebenden vertheilt werden solle.

Soll nun für jeden dieser Vereine berechnet werden, wie hoch sich, nach einem angenommenen Zinsfuße, und nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux (XX.) die Renten stellen können, so muß vorläufig der jährliche Abgang an Mitgliedern ausgemittelt werden.

Zur Vereinfachung der Darstellung ist angenommen, daß in jedem der drei obigen Vereine die einzelnen Altersabstufungen in dem Verhältniß vorkommen, in welchem die Lebenden überhaupt nach der angeführten Sterblichkeitstabelle stehen.

Nun erleiden die zu Anfang des 1ten Jahres lebenden 2099 Mitglieder des ersten Vereins im Laufe des Jahres einen Abgang, welcher der Summe des Abgangs der 3 ersten Jahre in der Sterblichkeitstabelle gleich ist, also $= 115 + 107 + 98 = 320$; die Anzahl der Lebenden zu Ende des 1ten Jahres ist demnach $= 2099 - 320 = 1779$; in gleicher Weise ist die Anzahl der Lebenden des 2ten Jahres =

$1779 - (107 + 98 + 88) = 1779 - 293 = 1486$;

des 3ten Jahres

$1486 - (98 + 88 + 77) = 1486 - 263 = 1223$, u. s. w.

Hiernach erhält man für die drei Vereine folgende Sterblichkeitstabelle:

Erster Verein. Alter von 80 bis 83			Zweiter Verein. Alter von 83 bis 86			Dritter Verein. Alter von 86 bis 89		
Jahre.	Lebende.	Gestorb.	Jahre.	Lebende.	Gestorb	Jahre.	Lebende.	Gestorb
0	2099	320	0	1223	231	0	626	144
1	1779	293	1	992	198	1	482	126
2	1486	263	2	794	168	2	356	109
3	1223	231	3	626	144	3	247	89
4	292	198	4	482	126	4	158	66
5	794	168	5	356	109	5	92	44
6	626	144	6	247	89	6	48	25
7	482	126	7	158	66	7	23	13
8	356	109	8	92	44	8	10	6
9	247	89	9	48	25	9	4	3
10	158	66	10	23	13	10	1	1
11	92	44	11	10	6	11	0	
12	48	25	12	4	3			
13	23	13	13	1	1			
14	10	6	14	0				
15	4	3						
16	1	1						
17	0							

Die Einlage des ersten Vereins ist $= 2099 \times 100 =$ 209900 fl. Wird dieses Kapital in eine Zeitrente aufgelöst, so ist solche, nach obiger Sterblichkeitstabelle, für 16 Jahre zu berechnen, und wenn der Zinsfuß 4 angenommen wird, so ist, nach Tabelle II. die entsprechende Zeitrente =

$$\frac{209900}{11{,}6522} = 18013.$$

Die Einlage des zweiten Vereins ist $= 1223 \times 100 =$ 122300 fl.; die Zeitrente für die Kapitalauflösung ist, der Sterblichkeitstabelle zufolge, für 13 Jahre zu berechnen; sie ist daher =

$$\frac{122300}{9{,}9856} = 12247.$$

Die Einlage des dritten Vereins ist $= 626 \times 100 = 62600$; die Zeitrente für die Kapitalauflösung ist, der Sterblichkeitstabelle zufolge, für 10 Jahre zu berechnen; sie ist daher $=$

$$\frac{62600}{8{,}1108} = 7718.$$

Die, in Folge der Erbvereinigung, steigenden Renten obiger Vereine stellen sich demnach wie folgt:

Erster Verein.

1tes Jahr $\frac{18013}{1779} = 10{,}12$

2tes „ $\frac{18013}{1486} = 12{,}12$

3tes „ $\frac{18013}{1223} = 14{,}72$

4tes „ $\frac{18013}{992} = 18{,}15$

5tes „ $\frac{18013}{794} = 22{,}69$

6tes „ $\frac{18013}{626} = 18{,}77$

7tes „ $\frac{18013}{482} = 37{,}36$

8tes „ $\frac{18013}{356} = 50{,}59$

9tes „ $\frac{18013}{247} = 72{,}92$

10tes „ $\frac{18013}{158} = 114$

11tes „ $\frac{18013}{92} = 195{,}79$

12tes „ $\frac{18013}{48} = 375{,}27$

13tes „ $\frac{18013}{23} = 783{,}17$

14tes „ $\frac{18013}{10} = 1801{,}3$

15tes „ $\frac{18013}{4} = 4503{,}25$

16tes „ $\frac{18013}{1} = 18013$

Zweiter Verein.

1tes Jahr $\frac{12247}{992} = 12{,}34$

2tes „ $\frac{12247}{794} = 15{,}42$

3tes „ $\frac{12247}{626} = 19{,}56$

4tes „ $\frac{12247}{482} = 25{,}4$

5tes „ $\frac{12247}{356} = 34{,}4$

6tes „ $\frac{12247}{247} = 49{,}58$

7tes „ $\frac{12247}{158} = 77{,}51$

8tes „ $\frac{12247}{92} = 133{,}11$

9tes „ $\frac{12247}{48} = 255{,}14$

10tes „ $\frac{12247}{23} = 528{,}13$

11tes „ $\frac{12247}{10} = 1224{,}7$

12tes „ $\frac{12247}{4} = 3061{,}75$

13tes „ $\frac{12247}{1} = 12247$

Dritter Verein.

1tes Jahr $\frac{7718}{482} = 16{,}01$

2tes „ $\frac{7718}{356} = 21{,}67$

3tes „ $\frac{7718}{247} = 31{,}24$

4tes „ $\frac{7718}{158} = 48{,}84$

5tes „ $\frac{7718}{92} = 83{,}88$

$$6\text{tes} \quad " \quad \frac{7718}{48} = 160{,}79$$

$$7\text{tes} \quad " \quad \frac{7718}{23} = 335{,}56$$

$$8\text{tes} \quad " \quad \frac{7718}{10} = 771{,}8$$

$$9\text{tes} \quad " \quad \frac{7718}{4} = 1929{,}5$$

$$10\text{tes} \quad " \quad \frac{7718}{1} = 7718$$

143. Werden obige Vereine in der Weise selbst wieder mit einander vereinigt, daß die Kapitaleinlagen derselben, zusammen im Betrage von $209900 + 122300 + 62600 = 394800$ gemeinschaftlich aufgelöst, und unter die Ueberlebenden nach Verhältniß ihrer Einlagen vertheilt werden sollen, so hat man obige Summe der Einlagen in eine 16-jährige Zeitrente zu verwandeln; sie ist, zu 4 Procent berechnet,

$$\frac{394800}{11{,}6522} = 33882$$

und die Renten werden sich, unter obiger Voraussetzung und nach der berechneten Sterblichkeitstabelle, für die einzelnen Abtheilungen des Vereins wie folgt stellen:

$$1\text{tes Jahr} \quad \frac{33882}{1779 + 992 + 482} = \frac{33882}{3253} = 10{,}41$$

$$2\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{1486 + 794 + 356} = \frac{33882}{2666} = 12{,}85$$

$$3\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{1223 = 626 + 247} = \frac{33882}{2096} = 16{,}16$$

$$4\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{992 + 482 + 158} = \frac{33882}{1632} = 20{,}76$$

$$5\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{794 + 356 + 92} = \frac{33882}{1242} = 27{,}28$$

$$6\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{626 + 247 + 48} = \frac{33882}{921} = 36{,}78$$

$$7\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{482 + 158 + 23} = \frac{33882}{663} = 51{,}1$$

$$8\text{tes} \quad " \quad \frac{33882}{356 + 92 + 10} = \frac{33882}{458} = 73{,}97$$

9tes Jahr $\frac{33882}{247 + 48 + 4} = \frac{33882}{299} = 113{,}31$

10tes „ $\frac{33882}{158 + 23 + 1} = \frac{33883}{182} = 186{,}16$

11tes „ $\frac{33882}{92 + 10} = \frac{33882}{102} = 332{,}17$

12tes „ $\frac{33882}{48 + 4} = \frac{33882}{52} = 651{,}57$

13tes „ $\frac{33882}{23 + 1} = \frac{33882}{24} = 1411{,}75$

14tes „ $\frac{33882}{10} = \frac{33882}{10} = 3388{,}2$

15tes „ $\frac{33882}{4} = \frac{33882}{4} = 8470{,}5$

16tes „ $\frac{33882}{1} = \frac{33882}{1} = 33882$

Zur Vergleichung der Resultate der nach §. 142 und §. 143 bewerkstelligten Vertheilung dient folgende Zusammenstellung:

Jahre.	1. Verein.	1. Abtheil.	2. Verein.	2. Abtheil.	3. Verein.	3. Abtheil.
1	10,12	10,41	12,34	10,41	16,01	10,41
2	12,12	12,85	15,42	12,85	21,67	12,85
3	14,72	16,16	19,56	16,16	31,24	16,16
4	18,15	20,76	25,4	20,76	48,84	20,76
5	22,69	27,28	34,4	27,28	83,88	27,28
6	28,77	36,78	49,58	36,78	160,79	36,78
7	37,36	51,1	77,51	51,1	335,56	51,1
8	50,59	73,97	133,11	73,97	771,8	73,97
9	72,92	113,31	255,14	113,31	1929,5	113,31
10	114	186,16	528,13	186,16	7718	186,16
11	195,79	332,17	1224,7	332,17		
12	375,27	651,57	3061,75	651,57		
13	783,17	1411,57	12247	1411,75		
14	1801,3	3388,2				
15	4503,25	8470,5				
16	18013	33882				

144. Werden die Zinsen im Gesammtbetrage von $\frac{394800 \times 4}{100}$ = 15792, welche die Mitglieder des Vereins jährlich zu beziehen haben, von der Auflösungsrente getrennt, so ist die der Kapitalauflösung entsprechende Zeitrente = 33882 — 15792 = 18090. Die Auflösungsrenten sind demnach für das

1te	Jahr	$\frac{18090}{1779+992+482}$	=	$\frac{18090}{3253}$	= 5,56
2te	"	$\frac{18090}{1486+794+356}$	=	$\frac{18090}{2636}$	= 6,86
3te	"	$\frac{18090}{1223+626+247}$	=	$\frac{18090}{2096}$	= 8,63
4te	"	$\frac{18090}{992+482+158}$	=	$\frac{18090}{1632}$	= 11,08
5te	"	$\frac{18090}{794+356+92}$	=	$\frac{18090}{1242}$	= 14,56
6te	"	$\frac{18090}{626+247+48}$	=	$\frac{18090}{921}$	= 19,64
7te	"	$\frac{18090}{482+158+23}$	=	$\frac{18090}{663}$	= 27,28
8te	"	$\frac{18090}{356+92+10}$	=	$\frac{18090}{458}$	= 39,49
9te	"	$\frac{18090}{247+48+4}$	=	$\frac{18090}{299}$	= 60,5
10te	"	$\frac{18090}{158+23+1}$	=	$\frac{18090}{182}$	= 99,39
11te	"	$\frac{18090}{92+10}$	=	$\frac{18090}{102}$	= 177,35
12te	"	$\frac{18090}{48+4}$	=	$\frac{18090}{52}$	= 347,88
13te	"	$\frac{18090}{23+1}$	=	$\frac{18090}{24}$	= 753,75
14te	"	$\frac{18090}{10}$	=	$\frac{18090}{10}$	= 1809
15te	"	$\frac{18090}{4}$	=	$\frac{18090}{4}$	= 4522,5
16te	"	$\frac{18090}{1}$	=	$\frac{18090}{1}$	= 18090

Die Einlage der ersten Abtheilung des Vereins ist = 209900 fl; die 4-procentigen Zinsen davon betragen 8396 fl.; die Einlage der zweiten Abtheilung ist = 122300 fl.; die 4-procentigen Zinsen davon betragen 4892 fl; die Einlage der dritten Abtheilung ist = 62600 fl.; die 4-procentigen Zinsen davon betragen 2504 fl. Werden nun die Zinsen nicht gemeinschaftlich, sondern abtheilungsweise getheilt, und werden sie beim Aussterben einer Abtheilung auf die nächst jüngere Abtheilung vererbt, so stellen sich die Zinsen in der dritten Abtheilung wie folgt:

1tes Jahr $\frac{2504}{482} = 5{,}19$

2tes „ $\frac{2504}{356} = 7{,}03$

3tes „ $\frac{2504}{247} = 10{,}13$

4tes „ $\frac{2504}{158} = 15{,}84$

5tes „ $\frac{2504}{92} = 27{,}21$

6tes „ $\frac{2504}{48} = 52{,}16$

7tes „ $\frac{2504}{23} = 108{,}86$

8tes „ $\frac{2504}{10} = 250{,}4$

9tes „ $\frac{2504}{4} = 626$

10tes „ $\frac{2504}{1} = 2504$

Weil wegen Aussterbens der dritten Abtheilung nach dem 11ten Jahre 2504 fl. an Zinsen auf die 2te Abtheilung übergehen, so stellen sich die Zinsen in dieser Abtheilung wie folgt:

1tes Jahr $\frac{4892}{992} = 4{,}93$

2tes „ $\frac{4892}{794} = 6{,}16$

3tes „ $\frac{4892}{626} = 7{,}81$

4tes „ $\frac{4892}{482} = 10{,}14$

5tes Jahr $\frac{4892}{356} = 13{,}74$

6tes „ $\frac{4892}{247} = 19{,}80$

7tes „ $\frac{4892}{158} = 30{,}96$

8tes „ $\frac{4892}{92} = 53{,}17$

9tes „ $\frac{4892}{48} = 101{,}91$

10tes „ $\frac{4892}{23} = 212{,}69$

11tes „ $\frac{4892+2504}{10} = 739{,}6$

12tes „ $\frac{4892+2504}{4} = 1849$

13tes „ $\frac{4892+2504}{1} = 7396$

Weil wegen Aussterbens der 2ten Abtheilung nach dem 14ten Jahre $4892 + 2504 = 7396$ fl. an Zinsen auf die 1te Abtheilung übergehen, so stellen sich die Zinsen in dieser Abtheilung wie folgt:

1tes Jahr $\frac{8396}{1779} = 4{,}71$

2tes „ $\frac{8396}{1486} = 5{,}65$

3tes „ $\frac{8396}{1223} = 6{,}86$

4tes „ $\frac{8396}{992} = 8{,}46$

5tes „ $\frac{8396}{794} = 10{,}57$

6tes „ $\frac{8396}{626} = 13{,}41$

7tes „ $\frac{8396}{482} = 17{,}41$

8tes „ $\frac{8396}{356} = 23{,}58$

$$\text{9tes Jahr } \frac{8396}{247} = 33{,}99$$

$$\text{10tes „ } \frac{8396}{158} = 53{,}13$$

$$\text{11tes „ } \frac{8396}{92} = 91{,}26$$

$$\text{12tes „ } \frac{8396}{48} = 174{,}91$$

$$\text{13tes „ } \frac{8396}{23} = 365{,}04$$

$$\text{14tes „ } \frac{8396+7396}{10} = 1579{,}2$$

$$\text{15tes „ } \frac{8396+7396}{4} = 3948$$

$$\text{16tes „ } \frac{8396+7396}{1} = 15792$$

In den einzelnen Abtheilungen stellen sich demnach die Renten wie folgt:

Erste Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,71	5,56	10,27
2	5,65	6,86	12,51
3	6,86	8,63	15,49
4	8,46	11,08	19,54
5	10,57	14,56	25,13
6	13,41	19,64	33,05
7	17,41	27,28	44,69
8	23,58	39,49	63,07
9	33,99	60,5	94,49
10	53,13	99,39	152,52
11	91,26	177,35	268,61
12	174,91	347,88	522,79
13	365,04	753,75	1118,79
14	1579,2	1809	3388,2
15	3948	4522,5	8470,5
16	15792	18090	33882

Zweite Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,93	5,56	10,49
2	6,16	6,86	13,02
3	7,81	8,63	16,44
4	10,14	11,08	21,22
5	13,74	14,56	28,30
6	19,80	19,64	39,44
7	30,96	27,28	58,24
8	53,17	39,49	92,66
9	101,91	60,5	162,41
10	212,69	99,39	312,08
11	739,6	177,35	916,95
12	1849	347,88	2196,88
13	7396	753,75	8149,75

Dritte Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	5,19	5,56	10,75
2	7,03	6,86	13,89
3	10,13	8,63	18,76
4	15,84	11,08	26,92
5	27,21	14,56	41,77
6	52,16	19,64	71,80
7	108,86	27,28	136,14
8	250,4	39,49	289,89
9	626	60,5	686,5
10	2504	99,39	2603,39

Zur Vergleichung der Resultate der nach §. 143 und §. 144 bewerkstelligten Vertheilung dient folgende Zusammenstellung.

Jahre.	Erste Abtheilung.		Zweite Abtheilung.		Dritte Abtheilung.	
	Nach §. 143	Nach §. 144	Nach §. 143	Nach §. 144	Nach §. 143	Nach §. 144
1	10,41	10,27	10,41	10,49	10,41	10,75
2	12,85	12,51	12,85	13,02	12,85	13,89
3	16,16	15,49	16,16	16,44	16,16	18,76
4	20,76	19,54	20,76	21,22	20,76	26,92
5	27,28	25,13	27,28	28,3	27,28	41,77
6	36,78	33,05	36,78	39,44	36,78	71,8
7	51,1	44,69	51,1	58,24	51,1	136,14
8	73,97	63,07	73,97	92,66	73,97	289,89
9	113,31	94,49	113,31	162,41	113,31	686,5
10	186,16	152,52	186,16	312,08	186,16	2603,39
11	332,17	268,61	332,17	916,95		
12	651,57	522,79	651,57	2196,88		
13	1411,75	1118,79	1411,75	8149,75		
14	3388,2	3388,2				
15	8470,5	8470,5				
16	33882	33882				

145. Soll die Rente nicht höher als zu einem gewissen Betrage anwachsen, und die Kapitalauflösung mit dem Ablauf des Eintrittjahres beginnen, so hat man zur Bestimmung der Zeit bei der Berechnung der Zeitrente zu untersuchen, in welchem Jahre alle noch lebenden Mitglieder des Vereins erstmals zum Genuß der höchsten Rente gelangen können. Wird letztere, in Beziehung auf obiges Beispiel, zu 150 fl. angesetzt, so folgt aus der Zusammenstellung im §. 144, daß dieser Zeitpunkt im 7ten Jahre eintreten kann. Der Sterblichkeitstabelle zufolge sind aber noch Lebende vorhanden im

7ten Jahre 482 + 158 + 23 = 663
8ten „ 356 + 92 + 10 = 458
9ten „ 247 + 48 + 4 = 299
10ten „ 158 + 23 + 1 = 182
11ten „ 92 + 10 = 102
12ten „ 48 + 4 = 52

13ten Jahre 23 + 1 = 24
14ten „ 10
15ten „ 4
16ten „ 1

Es erhalten also im

7ten Jahre	663 Personen	663 × 150 =	fl.	99450
8ten „	458 „	458 × 150 =	„	68700
9ten „	299 „	299 × 150 =	„	44850
10ten „	182 „	182 × 150 =	„	27300
11ten „	102 „	102 × 150 =	„	15300
12ten „	52 „	52 × 150 =	„	7800
13ten „	24 „	24 × 150 =	„	3600
14ten „	10 „	10 × 150 =	„	1500
15ten „	4 „	4 × 150 =	„	600
16ten „	1 „	1 × 150 =	„	150

Werden obige Zahlungen auf das 7te Vereinsjahr zu 4 Procent discontirt, so erhält man für

99450 fl.	zahlbar im 7ten Jahre		fl.	99450
68700 „	„ „ „ 8ten „	$68700\left(\frac{100}{104}\right)=$	„	66057,70
44850 „	„ „ „ 9ten „	$44850\left(\frac{100}{104}\right)^2=$	„	41463,82
27300 „	„ „ „ 10ten „	$27300\left(\frac{100}{104}\right)^3=$	„	24266,97
15300 „	„ „ „ 11ten „	$15300\left(\frac{100}{104}\right)^4=$	„	13078,44
7800 „	„ „ „ 12ten „	$7800\left(\frac{100}{104}\right)^5=$	„	6410,82
3600 „	„ „ „ 13ten „	$3600\left(\frac{100}{104}\right)^6=$	„	2845,08
1500 „	„ „ „ 14ten „	$1500\left(\frac{100}{104}\right)^7=$	„	1139,85
600 „	„ „ „ 15ten „	$600\left(\frac{100}{104}\right)^8=$	„	438,36
150 „	„ „ „ 16ten „	$150\left(\frac{100}{104}\right)^9=$	„	105,37
		zusammen	fl.	255256,41

Das Gesammtvermögen des Vereins besteht aus 394800 fl.;

(§. 143); davon müssen also 255256,41 fl. im 7ten Jahre zur Bestreitung der Maximalrenten vorhanden seyn; zur Kapitalauflösung sind daher nur 394800 — 255256,41 = 139543,50 fl. disponibel, und dafür ist nun die 6-jährige Zeitrente zu bestimmen; sie ist (nach Tab. II.)

$$\frac{139543,59}{5,2421} = 26619,78 \text{ fl.}$$

Trennt man die Zinsen im Gesammtbetrage von $\frac{139543,59 \times 4}{100}$ = 5581,74 fl. von der Zeitrente, so ist die Auflösungsrente = 26619,78 — 5581,74 = 21038,04 fl. Bis zum 7ten Jahre erhalten aber auch die Theilnehmer die 4-procentigen Zinsen der nicht auflöslichen 255256,41 fl., im Betrage von 10210,26 fl. Es theilen sich also die Ueberlebenden bis zum 7ten Jahre in die Auflösungsrente im Betrage von 21038,04 fl. und in die Zinsen im Betrage von 5581,74 + 10210,26 = 15792 fl.

Die Auflösungsrenten stellen sich hiernach wie folgt:

1tes Jahr $\frac{21038}{3253} = 6,46$

2tes „ $\frac{21038}{2636} = 7,98$

3tes „ $\frac{21083}{2096} = 10,03$

4tes „ $\frac{21038}{1632} = 12,89$

5tes „ $\frac{21038}{1242} = 17,74$

6tes „ $\frac{21038}{921} = 22,84$

Die Renten der einzelnen Abtheilungen sind demnach wie folgt:

Erste Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,71	6,46	11,17
2	5,65	7,98	13,63
3	6,86	10,03	16,89
4	8,46	12,89	21,35
5	10,57	17,74	28,31
6	13,41	22,84	36,25
7	—	—	150
8	—	—	150
9	—	—	150
10	—	—	150
11	—	—	150
12	—	—	150
13	—	—	150
14	—	—	150
15	—	—	150
16	—	—	150

Zweite Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,93	6,46	11,39
2	6,16	7,98	14,14
3	7,81	10,03	17,84
4	10,14	12,89	23,03
5	13,74	17,74	31,48
6	19,80	22,84	42,64
7	—	—	150
8	—	—	150
9	—	—	150
10	—	—	150
11	—	—	150
12	—	—	150
13	—	—	150

Dritte Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	5,19	6,46	11,65
2	7,03	7,98	15,01
3	10,13	10,03	20,16
4	25,84	12,89	38,73
5	27,21	17,74	44,95
6	52,16	22,84	75
7	—	—	150
8	—	—	150
9	—	—	150
10	—	—	150

146. Wir wollen jetzt annehmen, daß sich in derjenigen Abtheilung, deren jüngste Mitglieder das 87te Lebensjahr erreicht haben, die Ueberlebenden in das Kapital der abgegangenen Mitglieder theilen, und daß die Vererbung von Abtheilung zu Abtheilung stattfindet; ferner, daß sich in denjenigen Abtheilungen, in welchen die Kapitalvererbung noch nicht stattfindet, die Ueberlebenden in die Zinsen der abgegangenen Mitglieder ihrer Abtheilung theilen, und daß die höchste Rente zu 150 fl. angesetzt ist.

Unter diesen Voraussetzungen stellen sich in der dritten Abtheilung die Renten wie folgt:

1tes Jahr.

Kapital = 62600; gest. 144 Mitgl.; zu vertheilen 14400 fl.;

Zinsen = $\frac{2504}{482}$ = 5,19; Erbantheil $\frac{14400}{482}$ = 29,87.

2tes Jahr.

Kapital = 62600 — 14400 = 48200; gest. 126 Mitgl.; zu vertheilen 12600 fl.;

Zinsen = $\frac{1928}{356}$ = 5,41; Erbantheil = $\frac{12600}{356}$ = 35,39.

3tes Jahr.

Kapital = 48200 — 12600 = 35600; gest. 109 Mitgl.; zu vertheilen 10900 fl.;

Zinsen = $\frac{1424}{247}$ = 5,76; Erbantheil = $\frac{10900}{247}$ = 44,12.

4tes Jahr.

Kapital = 35600 — 10900 = 24700; gest. 98 Mitgl.; zu vertheilen 8900 fl.;

Zinsen = $\frac{988}{158}$ = 6,25; Erbantheil = $\frac{8900}{158}$ = 56,32.

5tes Jahr.

Kapital = 24700 — 8900 = 15800; gest. 66 Mitgl.; zu vertheilen 6600 fl.;

Zinsen = $\frac{632}{92}$ = 6,86; Erbantheil = $\frac{6600}{92}$ = 71,73.

6tes Jahr.

Kapital = 15800 — 6600 = 9200; gest. 44 Mitgl. zu vertheilen 4400 fl.

Zinsen = $\frac{368}{48}$ = 7,66; Erbantheil = $\frac{4400}{48}$ = 91,66.

7tes Jahr.

Kapital = 9200 — 4400 = 4800; gest. 25 Mitgl.; zu vertheilen 2500 fl.;

Zinsen = $\frac{192}{23}$ = 8,34; Erbantheil = $\frac{2500}{23}$ = 108,69

8tes Jahr.

Kapital = 4800 — 2500 = 2300; gest. 13 Mitgl.; zu vertheilen 1300 fl.;

Zinsen = $\frac{92}{10}$ = 9,2; Erbantheil = $\frac{1300}{10}$ = 130.

9tes Jahr.

Kapital 2300—1300=1000; gest. 6 Mitgl.; zu vertheilen 600 fl.;

Zinsen = $\frac{40}{4}$ = 10; Erbantheil = $\frac{600}{4}$ = 150.

Weil die höchste Rente = 150 ist, so geht der Ueberschuß von 40 fl. auf die zweite Abtheilung über.

10tes Jahr.

Kapital=1000—600=400; gest. 3 Mitgl.; zu vertheilen 300 fl.;

Zinsen = $\frac{16}{1}$ = 16; Erbantheil = $\frac{300}{1}$ = 300.

Gesammtrente = 16 + 300 = 316
ab 150 als höchste Rente,
verbleiben 166 fl., welche auf die zweite Abtheilung übergehen.

Im 11ten Jahre geht auf die zweite Abtheilung über an
Kapital 100 fl.
und an Zinsen 4 fl.
zusammen 104 fl.

Zweite Abtheilung.

1tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 231 Mitgl.

$$\text{Zinsen} = \frac{4892}{992} = 4{,}93$$

2tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 198 Mitgl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{4892}{794} = 6{,}16.$$

3tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 168 Mitgl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{4892}{626} = 7{,}81.$$

4tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 144 Mitgl.; zu vertheilen 14400 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{4892}{482} = 10{,}14; \quad \text{Erbantheil} = \frac{14400}{482} = 29{,}87.$$

5tes Jahr.

Kapital = 122300 — 14400 = 107900; gest. 126 Mitgl.; zu vertheilen 12600.;

$$\text{Zinsen} = \frac{4316}{356} = 12{,}12; \quad \text{Erbantheil} = \frac{12600}{356} = 35{,}39.$$

6tes Jahr.

Kapital 107900 — 12600 = 95300; gest. 109 Mitgl.; zu vertheilen 10900 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{3812}{247} = 15{,}43; \quad \text{Erbantheil} = \frac{10900}{247} = 44{,}12.$$

7tes Jahr.

Kapital = 95300 — 10900 = 84400; gest. 89 Mitgl.; zu vertheilen 8900 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{3376}{158} = 21{,}36; \quad \text{Erbantheil} = \frac{8900}{158} = 56{,}32.$$

8tes Jahr.

Kapital = 84400 — 8900 = 75500; gest. 66 Mitgl.; zu vertheilen 6600 fl.

$$\text{Zinsen} = \frac{3020}{92} = 32{,}82; \quad \text{Erbantheil} = \frac{6600}{92} = 71{,}73.$$

9tes Jahr.

Kapital = 75500 — 6600 = 68900; gest. 44 Mitgl.; zu vertheilen 4400 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{2756}{48} = 57{,}41; \quad \text{Erbantheil} = \frac{4400}{48} = 91{,}66.$$

Im 9ten Jahre gehen ferner 40 fl., als Ueberschuß, von der dritten Abtheilung auf die zweite Abtheilung über; daher weiterer Erbantheil $= \frac{40}{48} = 0{,}83$ und Gesammtrente $= 57{,}41 + 91{,}66 + 0{,}83 = 149{,}90$.

10tes Jahr.

Kapital = 68900 — 4400 = 64500; gest. 25 Mitgl.; zu vertheilen 2500 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{2580}{23} = 112{,}17; \quad \text{Erbantheil} = \frac{2500}{23} = 108{,}69;$$

im Ganzen zu vertheilen 2580 + 2500 = 5080
hiervon ab 23 × 150 = 3450
verbleiben 1630 fl.,

welche auf die erste Abtheilung übergehen; im 10ten Jahre gehen aber auch 166 fl. von der dritten Abtheilung auf die zweite über, und es gehen hiernach im Ganzen 1630 + 166 = 1796 fl. von der zweiten Abtheilung auf die erste über.

11tes Jahr.

Kapital = 64500 — 2500 = 62000; gest. 13 Mitgl.; zu vertheilen 1300 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{2480}{10} = 248; \quad \text{Erbantheil} = \frac{1300}{10} = 130;$$

im Ganzen zu vertheilen 2480 + 1300 = 3780
hiervon ab 10 × 150 = 1500
verbleiben 2280 fl., welche auf die erste Abtheilung übergehen; im 11ten Jahre gehen aber auch 104 fl. von der dritten Abtheilung auf die zweite über, und es gehen hiernach im Ganzen 2280 + 104 = 2384 fl. von der zweiten Abtheilung auf die erste über.

12tes Jahr.

Kapital = 62000—1300=60700; gest. 6 Mitgl. z. verthl. 600 fl.

Zinsen = $\frac{2428}{4}$ = 607; Erbantheil = $\frac{600}{4}$ = 150

Im Ganzen zu verthl. 2428 + 600 = 3028

hiervon ab 4 × 150 = 600

verbleiben 2428 fl, welche auf die erste Abtheilung übergehen.

13tes Jahr.

Kapital = 60700—600=60100; gest. 3 Mitgl.; z. verth. 300 fl.

Zinsen = $\frac{2404}{1}$ = 2404; Erbantheil = $\frac{300}{1}$ = 300;

Im Ganzen z. verthl. 2404 + 300 = 2704

hiervon ab 1 × 150 = 150

verbleiben 2554 fl., welche auf die erste Abtheilung übergehen.

14tes Jahr.

Kapital = 60100 — 300 = 59800; die Zinsen hiervon betragen 2392 fl.; wonach am Ende des 14ten Jahres 59800 + 2392 = 62192 fl. auf die erste Abtheilung übergehen.

Erste Abtheilung.

1tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 320 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{1779}$ = 4,71.

2tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 293 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{1486}$ = 5,65.

3tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 263 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{1223}$ = 6,86.

4tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 231 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{992}$ = 8,46.

5tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 198 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{794}$ = 10,57.

6tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 168 Mitgl.;

Zinsen = $\frac{8396}{626}$ = 13,41.

7tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 144 Mitgl. zu vertheilen 14400 fl.

Zinsen = $\frac{8396}{482}$ = 17,41; Erbantheil = $\frac{14400}{482}$ = 29,87.

8tes Jahr.

Kapital = 209900 — 14400 = 195500; gest. 126 Mitgl. zu vertheilen 12600 fl.

Zinsen = $\frac{7820}{356}$ = 21,96; Erbantheil = $\frac{12600}{356}$ = 35,39.

9tes Jahr.

Kapital = 195500 — 12600 = 182900; gest. 109 Mitgl. zu vertheilen 10900 fl.

Zinsen = $\frac{7316}{247}$ = 29,61; Erbantheil = $\frac{10900}{247}$ = 44,12.

10tes Jahr.

Kapital = 182900 — 10900 = 172000; gest. 89 Mitgl.; zu vertheilen 8900 fl.

Zinsen = $\frac{6880}{158}$ = 43,54; Erbantheil = $\frac{8900}{158}$; im 10. Jahre gehen aber auch von der zweiten Abtheilnng 1796 fl. auf die erste über; der weitere Erbantheil ist daher = $\frac{1796}{158}$, und der gesammte Kapitalantheil ist =

$$\frac{8900}{158} + \frac{1796}{158} = \frac{10696}{158} = 67{,}69.$$

11tes Jahr.

Kapital = 172000 — 8900 = 163100; gest. 66 Mitgl. zu vertheilen 6600 fl.

Zinsen = $\frac{6524}{92}$ = 70,91; Erbantheil = $\frac{6600}{92}$; im 11. Jahre gehen aber auch 2384 fl. von der zweiten Abtheilung auf die

erste über; der weitere Erbantheil ist daher $= \frac{2384}{92}$; daher im Ganzen zu vertheilen 6524 + 6600 2384 = 15508
hiervon ab 92 × 150 = 13800
verbleiben 1708 fl.,
über welche anderweitig verfügt werden kann.

12tes Jahr.

Kapital = 163100 — 6600 = 156500; gest. 44 Mitgl. zu vertheilen 4400 fl.

Zinsen $= \frac{6260}{48} = 130{,}40$; Erbantheil $= \frac{4400}{48}$; im 12. Jahre gehen aber auch 2428 fl. von der zweiten Abtheilung auf die erste über; der weitere Erbantheil ist daher $= \frac{2428}{48}$; daher im Ganzen zu vertheilen 6260 + 4400 + 2428 = 13088
hiervon ab 48 × 150 = 7200
verbleiben 5888 fl,
über welche anderweitig verfügt werden kann.

13tes Jahr.

Kapital = 156500 — 4400 = 152100; gest. 25 Mitgl. zu vertheilen 2500 fl.

Zinsen $= \frac{6084}{23} = 264{,}52$; Erbantheil $= \frac{2500}{23}$; im 13. Jahre gehen aber auch 2554 fl. von der zweiten Abtheilung auf die erste über; der weitere Erbantheil ist daher $= \frac{2554}{23}$; daher im Ganzen zu vertheilen 6084 + 2500 + 2554 = 11138
hiervon ab 23 × 150 = 3450
verbleiben 7688 fl.,
über welche anderweitig verfügt werden kann.

14tes Jahr.

Kapital = 152100 — 2500 = 149600; gest. 13 Mitgl.; zu vertheilen 1300 fl.

Zinsen $= \frac{5984}{10} = 598{,}4$; Erbantheil $= \frac{1300}{10}$; im 14. Jahre gehen aber auch 62192 fl. von der zweiten Abtheilung auf die erste über; der weitere Erbantheil ist daher $= \frac{62192}{10}$; daher im Ganzen zu vertheilen.

$$5984 + 1300 + 62192 = 69476$$
$$\text{hiervon ab } 10 \times 150 = \underline{1500}$$
verbleiben 67976 fl.,

über welche anderweitig verfügt werden kann.

15tes Jahr.

Kapital = 149600 — 1300 = 148300; gest. 6 Mitgl.; zu vertheilen 600 fl.

Zinsen $= \frac{5932}{4} = 1483$; Erbantheil $= \frac{600}{4} = 150$; wonach über 5932 fl. anderweitig verfügt werden kann.

16tes Jahr.

Kapital = 148300 — 600 = 147700; gest. 3 Mitgl.; zu vertheilen 300 fl.

Zinsen $= \frac{5908}{1} = 5908$; Erbantheil $= \frac{300}{1} = 300$; wonach zu Ende des 16ten Jahres über

$$5908 + 150 = 6058$$
$$\text{und } 147700 - 300 = 147400$$
zusammen über 153458 fl. anderweitig verfügt werden kann.

Zur Vergleichung der Resultate obiger Vertheilungen mit denjenigen nach der im §. 145 bewerkstelligten Vertheilung dient folgende Zusammenstellung.

Erste Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Erbantheil.	Jahresrente.
1	4,71	—	4,71
2	5,65	—	5,65
3	6,86	—	6,86
4	8,46	—	8,46
5	10,57	—	10,57
6	13,41	—	13,41
7	17,41	29,87	47,28
8	21,96	35,39	57,35
9	29,61	44,12	73,73
10	43,54	67,69	111,23
11	—	—	150
12	—	—	150
13	—	—	150
14	—	—	150
15	—	—	150
16	—	—	150

Zweite Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Erbantheil.	Jahresrente.
1	4,93	—	4,93
2	6,16	—	6,16
3	7,81	—	7,81
4	10,14	29,87	40,01
5	12,12	35,39	47,51
6	15,43	44,12	59,55
7	21,36	56,32	77,68
8	32,82	71,73	104,55
9	57,41	92,49	149,90
10	—	—	150
11	—	—	150
12	—	—	150
13	—	—	150

Dritte Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Erbantheil.	Jahresrente.
1	5,19	29,87	35,06
2	5,41	35,39	40.80
3	5,76	44,12	49,88
4	6,25	56,32	62,57
5	6,86	71,73	78,59
6	7,66	91,66	99,32
7	8,34	198,69	117,03
8	9,2	130	139,2
9	—	—	150
10	—	—	150

Weil, in Folge der Annahme einer höchsten Rente, nicht das ganze Einlagekapital zur Vertheilung kommt, so kann, nach obiger Berechnung anderweitig verfügt werden zu Ende des

11ten	Jahres	über	1708 fl.
12ten	„	„	5888 „
13ten	„	„	7688 „
14ten	„	„	67976 „
15ten	„	„	5932 „
16ten	„	„	153458 „

Zu Ende des 16ten Jahres bleiben demnach übrig

$$1708\left(\frac{104}{100}\right)^5 = 2078{,}12 \text{ fl.}$$

$$5888\left(\frac{104}{100}\right)^4 = 6888{,}37 \text{ „}$$

$$7688\left(\frac{104}{100}\right)^3 = 8648{,}23 \text{ „}$$

$$67976\left(\frac{104}{100}\right)^2 = 73522{,}84 \text{ „}$$

$$5932\left(\frac{104}{100}\right)^1 = 6169{,}28 \text{ „}$$

$$153458\left(\frac{104}{100}\right)^0 = 153458{,}00 \text{ „}$$

zusammen 250764,84 fl.

§. 147. Nach der Vertheilungsart im §. 146 nimmt die Zinsrente mit jedem Jahre zu; soll sie aber vom Beginn der Kapitalvertheilung an eine constante Größe seyn, so muß die Differenz der veränderlichen und constanten Zinsrente dem Erbantheil zugeschlagen werden. So ist z. B. in der dritten Abtheilung

im 1ten Jahre die Zinsrente = 5,19, der Erbantheil = 29,87 und die Jahresrente = 35,06;

im 2ten Jahre ist die Zinsrente = 5,41, der Erbantheil = 35,39 und die Jahresrente = 40,8 u. s. w.

Ist nun die constante Zinsrente = 4, so ist der Erbantheil im 1ten Jahre = 29,87 + 5,19 — 4 = 31,06, und die Jahresrente ist, wie vorher, = 31,06 + 4 = 35,06; im 2ten Jahre ist der Erbantheil = 35,39 + 5,41 — 4 = 36,8 und die Jahresrente ist = 36,8 + 4 = 40,8 u. s. w.

148. Nehmen wir ferner, wie im §. 140 an, daß jedem Ueberlebenden statt des Antheils am Kapital der abgegangenen Mitglieder eine seinem Alter entsprechende Leibrente zufällt, daß, vom Beginn der Leibrentenvertheilung an, die Zinsrente

unveränderlich ist, und daß die Summe der jährlichen Zinsen und Leibrenten nicht über 150 fl. steigen darf.

Endlich sollen, zur Verwandlung der Erbantheile in Leibrenten, folgende, zum Zinsfuß 4 berechnete, Werthe der Leibrente 1 gebraucht werden:

Alter.	Werthe.
87	2,021
88	1,724
89	1,436
90	1,184
91	0,970
92	0,804
93	0,673
94	0,634
95	0,321

Die Berechnung dieser Werthe gründet sich auf die von Florencourt eingerichtete Deparcieux'sche Sterblichkeitstabelle (XX). Die im Anhang befindliche Leibrententabelle (XVIII) ist nach der ursprünglichen Deparcieux'schen Tabelle berechnet; weil aber die obigen Rentenrechnungen nach der Florencourt-Deparcieux'schen Tabelle angestellt worden sind, so sollen, zu mehrerer Genauigkeit, auch die derselben entsprechenden Leibrentenwerthe hier angewendet werden.

Weil die zu vertheilenden Leibrenten sich nach dem Alter der Betheiligten richten, so muß vorläufig die Anzahl der Lebenden jeder Abtheilung nach ihren Altersabstufungen bestimmt werden. Nach der im Vorhergehenden angenommenen Sterblichkeitstabelle (XX) und nach der für die Altersabtheilungen darnach berechneten Tabelle (§. 142) sind die Summen der Lebenden nach den Altersabstufungen wie folgt zusammengesetzt.

Erste Abtheilung.

Jahre.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Summe.
1	81	697	82	590	83	492	1779
2	82	590	83	492	84	404	1486
3	83	492	84	404	85	327	1223
4	84	404	85	327	86	261	992
5	85	327	86	261	87	206	794
6	86	261	87	206	88	159	626
7	87	206	88	159	89	117	482
8	88	159	89	117	90	80	356
9	89	117	90	80	91	50	247
10	90	80	91	50	92	28	158
11	91	50	92	28	93	14	92
12	92	28	93	14	94	6	48
13	93	14	94	6	95	3	23
14	94	6	95	3	96	1	10
15	95	3	96	1	—	—	4
16	96	1		—	—	—	1

Zweite Abtheilung.

Jahre.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Summe.
1	84	404	85	327	86	261	992
2	85	327	86	261	87	206	794
3	86	261	87	206	88	159	626
4	87	206	88	159	89	117	482
5	88	159	89	117	90	80	356
6	89	117	90	80	91	50	247
7	90	80	91	50	92	28	158
8	91	50	92	28	93	14	92
9	92	28	93	14	94	6	48
10	93	14	94	6	95	3	23
11	94	6	95	3	96	1	10
12	95	3	96	1		—	4
13	96	1		—		—	1

Dritte Abtheilung.

Jahre.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Summe.
1	87	206	88	159	89	117	482
2	88	159	89	117	90	80	356
3	89	117	90	80	91	50	247
4	90	80	91	50	92	28	158
5	91	50	92	28	93	14	92
6	92	28	93	14	94	6	48
7	93	14	94	6	95	3	23
8	94	6	95	3	96	1	10
9	95	3	96	1		—	4
10	96	1		—		—	1

Unter obigen Voraussetzungen ist nun die Berechnung der Renten wie folgt.

Dritte Abtheilung.

1tes Jahr.

Kapital = 62600; gest. 144 Mitgl.; zu vertheilen 14400 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{2504}{482} = 5{,}19;\quad \text{Erbantheil} = \frac{14400}{482} + 1{,}19 =$$

$29{,}87 + 1{,}19 = 31{,}06$; Jahresrente = 4.

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt, giebt eine Leibrente von

$$\frac{31{,}06}{2{,}021} = 15{,}36 \text{ für die 87-jährigen Mitgl.}$$

$$\frac{31{,}06}{1{,}724} = 18{,}01 \text{ „ „ 88- „ „}$$

$$\frac{31{,}06}{1{,}436} = 21{,}62 \text{ „ „ 89- „ „}$$

welche zu Ende des zweiten Jahres erstmals ausgezahlt wird.

2tes Jahr.

Kapital = 62600 — 14400 = 48200; gest. 126 Mitgl.; zu vertheilen 12600 fl.;

$$\text{Zinsen} = \frac{1928}{356} = 5{,}41;\quad \text{Erbantheil} = \frac{12600}{356} + 1{,}41 =$$

$35{,}39 + 1{,}41 = 36{,}8$; Jahresrente für

159 88-jährige Mitgl. = 4 + 15,36 = 19,36
117 89- „ „ = 4 + 18,01 = 22,01
80 90- „ „ = 4 = 21,62 = 25,62

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt, giebt eine Leibrente von

$$\frac{36,8}{1,724} = 21,34 \text{ für 88-jährige Mitgl.}$$

$$\frac{36,8}{1,436} = 25,62 \text{ „ 89- „ „}$$

$$\frac{36,8}{1,184} = 31,08 \text{ „ 90- „ „}$$

3tes Jahr.

Kapital = 48200 — 12600 = 35600; gest. 109 Mitgl.; zu vertheilen 10900 fl.;

Zinsen $= \frac{1424}{247} = 5,76$; Erbantheil $= \frac{10900}{247} + 1,76 =$ 44,12 + 1,76 = 45,88; Jahresrente für

117 89-jährige Mitgl. = 19,36 + 21,34 = 40,70
80 90- „ „ = 22,01 + 25,62 = 47,63
50 91- „ „ = 25,62 + 31,08 = 56,7

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt, giebt eine Leibrente von

$$\frac{45,88}{1,436} = 31,94 \text{ für 89-jährige Mitgl.}$$

$$\frac{45,88}{1,184} = 38,74 \text{ „ 90- „ „}$$

$$\frac{45,88}{0,97} = 47,29 \text{ „ 91- „ „}$$

4tes Jahr.

Kapital = 35600 — 10900 = 24700; gest. 89 Mitgl. zu vertheilen 8900 fl.;

Zinsen $= \frac{988}{158} = 6,25$; Erbantheil $= \frac{8900}{158} + 2,25 = 56,32$ + 2,25 = 58,57; Jahresrente für

80 90-jährige Mitglieder = 40,70 + 31,94 = 72,64
50 91- „ „ = 47,63 + 38,74 = 86,37
28 92- „ „ = 56,7 + 47,29 = 103,99

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{58,57}{1,184} = 49,46$ für 90-jährige Mitgl.

$\frac{58\,57}{0,97} = 60,38$ „ 91- „ „

$\frac{58,57}{0,804} = 72,84$ „ 92- „ „

5tes Jahr.

Die Jahresrente ist für

50 91-jährige Mitglieder = 72,64 + 49,46 = 122,1
28 92- „ „ = 86,37 + 60,38 = 146,75
14 93- „ „ = 103,99 + 72,84 = 176,83

Weil die höchste Rente = 150 ist, so können die ältesten Mitglieder der Abtheilung an der Vererbung nicht weiter Theil nehmen. Es betragen die Leibrenten vom

1ten Jahre her 21,62
2ten „ „ 31,08
3ten „ „ 47,29

zusammen 99,99 oder 100.

Damit vom 5ten Jahre an die ältesten Mitglieder jährlich 150 fl. erhalten, so muß denselben im 4ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 — 100 = 50 zukommen; also, weil sie im 4ten Jahre 92 Jahre alt sind, nach der obigen Leibrententabelle, $50 \times 0,804 = 40,2$ fl., und weil im 4ten Jahre die Anzahl derselben = 28 ist, so sind $28 \times 40,2 = 1125,6$ fl. zur Deckung der Renten für die ältesten, bei der Vererbung nicht mehr betheiligten Mitglieder erforderlich. Im 4ten Jahre ist daher der Erbantheil für die übrigen 130 Mitglieder

$$= \frac{8900 + \frac{8900 \times 4}{100} - 1125,6}{130} = 62,54$$

und dieser Erbantheil in Leibrenten verwandelt, giebt eine Leibrente von

$\frac{62,54}{1,184} = 52,82$ für 90-jährige Mitgl.

$\frac{62,54}{0,97} = 64,47$ „ 91- „ „

Im 5ten Jahre ist daher die Jahresrente für

50 91-jährige Mitglieder = 72,64 + 52,8 = 125,46
28 92- „ „ = 86,37 + 64,7 = 150,84
14 93- „ „ = 103,99 — 4 + 50 = 149,99 od. 150

Weil die Jahresrente der nächstältesten Mitglieder im 5ten Jahre mehr als die höchste Rente beträgt, so können auch diese Mitglieder an der Vererbung nicht weiter Theil nehmen. Es betragen die Leibrenten derselben vom

1ten Jahre her	18,01
2ten „ „	25,62
3ten „ „	38,74
zusammen	82,37

Damit nun vom 5ten Jahre an die Mitglieder jährlich 150 fl. erhalten, so muß denselben im 4ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 — 82,37 = 67,63 zukommen; also weil sie im 4ten Jahre 91 Jahre alt sind, nach der angeführten Leibrententabelle 67,63 × 0,970 = 65,6 fl., und weil im 4ten Jahre die Anzahl derselben = 50 ist, so sind 50 × 65,6 = 3280 fl. zur Deckung der Renten für die nächstältesten, bei der Vererbung ebenfalls nicht mehr betheiligten Mitglieder, erforderlich.

Für die 80 jüngsten Mitglieder der Abtheilung ist daher der Erbantheil =

$$\frac{8900 + \frac{8900 \times 4}{100} - 1125{,}6 - 3280}{80} = \frac{4850{,}4}{80} = 60{,}63$$

Die entsprechende Leibrente ist $= \frac{60{,}63}{1{,}184} = 51{,}2$, und die Jahresrente ist für 50 91-jährige Mitglieder = 72,64 + 51,2 = 123,84.

Im 5ten Jahre ist das Kapital = 24700 — 8900 = 15800; gestorben sind 66 Mitglieder und zu vertheilen sind 6600 fl.; weil aber von jetzt an nur noch die jüngsten, 91-jährigen, Mitglieder, deren Anzahl = 50 ist, bei der Vererbung betheiligt sind, so ist der Betrag der Zinsen $= \frac{632}{50} = 12{,}64$ und der Erbantheil ist $= \frac{6600}{50} + 8{,}64 = 132 + 8{,}64 = 140{,}64$. Dieser Erbantheil in eine Leibrente für das Alter von 91 Jahren verwandelt, giebt $\frac{140{,}64}{0{,}97} = 144{,}98$.

Im 6ten Jahre wäre also die Jahresrente = 123,84 + 144,98 = 268,82. Es betragen aber die Leibrenten vom

1ten	Jahre	her	15,36
2ten	„	„	21,34
3ten	„	„	31,94
4ten	„	„	51,20
		zusammen	119,84.

Damit nun vom 6ten Jahre an die Mitglieder jährlich 150 fl. zu beziehen haben, so muß denselben im 5ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 — 119,84 = 30,16 zukommen; also, weil sie im 5ten Jahre des Vereins 91 Jahre alt sind, nach der Leibrententabelle 30,16 × 0,97 = 29,25. Weil die Anzahl der Mitglieder im 5ten Jahre = 50 ist, so ist ein Kapital von 50 × 29,25 = 1462,5 fl. zur Deckung der Leibrenten erforderlich.

Zu Ende des 5ten Jahres sind zur Zahlung der constanten Zinsrente erforderlich 4 × 50 = 200 fl.; die Zinsen des im Anfang des 5ten Jahres vorhandenen Kapitals betragen aber $\frac{15800 \times 4}{100}$ = 632 fl.; daher ein Ueberschuß von 632 — 200 = 432 fl.; hierzu das Kapital im Betrage von 15800 fl. giebt 16232 fl.; zieht man hiervon die zur Deckung der Leibrenten erforderlichen 1462,5 fl. ab, so bleiben 14769,5 fl. übrig, welche zu Ende des 5ten Jahres von der dritten Abtheilung auf die zweite übergehen.

In der dritten Abtheilung sind die Jahresrenten wie folgt:

Jahre.						
1.	Für alle Mitglieder 4.					
2.	Für	159	88-jährige	Mitglieder	=	19,36
	„	117	89- „	„	=	22,01
	„	80	90- „	„	=	25,62
3.	Für	119	89-jährige	Mitglieder	=	40,70
	„	80	90- „	„	=	47,63
	„	50	91- „	„	=	56,7
4.	Für	80	90-jährige	Mitglieder	=	72,64
	„	50	91- „	„	=	86,37
	„	28	92- „	„	=	103,99

5.	Für 50 91-jährige Mitglieder = 123,84 „ 28 92- „ „ = 150 „ 14 93- „ „ = 150
6.	150
7.	150
8.	150
9.	150
10.	150

Zweite Abtheilung.

1tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 231 Mitgl.; Zinsen = $\frac{4892}{992}$ = 4,93; Jahresrente = 4,93.

2tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 198 Mitgl.; Zinsen = $\frac{4892}{794}$ = 6,16; Jahresrente = 616.

3tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 168 Mitgl.; Zinsen = $\frac{4892}{626}$ = 7,81; Jahresrente = 7,81.

4tes Jahr.

Kapital = 122300; gest. 144 Mitgl.; zu vertheilen 14400 fl.; Zinsen = $\frac{4892}{482}$ = 10,14; Erbantheil = $\frac{14400}{482}$ = 29,87.

So wie in der dritten Abtheilung, in welcher gleich Anfangs die Kapitalvererbung stattgefunden hat, die constante Zinsrente = 4 ist, so ist sie in der zweiten Abtheilung vom 4ten Jahre an, als mit welchem die Kapitalvererbung beginnt, = 10,14. Sollte die Zinsrente durchgängig vom Jahre der Kapitalvererbung an = 4 seyn, so würde die Jahresrente in dem Jahre, in welchem die Kapitalvererbung eintritt, weniger als in den vorhergehenden Jahren betragen, weil die Auszahlung der Leibrente erstmals in dem auf dem Erbanfall folgenden Jahre

stattfindet. Die Jahresrente ist daher im 4ten Jahre = 10,14. Der Erbantheil im Betrage von 29,87 in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{29,87}{2,021} = 14,77$ für die 87-jährigen Mitgl.

$\frac{29,87}{1,724} = 17,32$ „ „ 88- „ „

$\frac{29,87}{1,436} = 20,8$ „ „ 89- „ „

5tes Jahr.

Kapital = 122300 — 14400 = 107900; gest. 126 Mitgl.; zu vertheilen 12600 fl. und außerdem 14769,5 fl., welche zu Ende des 5ten Jahres von der dritten Abtheilung auf die zweite übergehen; daher zu vertheilen 27369,5 fl.; Zinsen $= \frac{4316}{356} =$ 12,12; Erbantheil $= \frac{27369,5}{356} + 1,98 = 76,88 + 1,98 =$ 78,86; Jahresrente für

159 88-jährige Mitgl. = 10,14 + 14,77 = 24,91
117 89- „ „ = 10,14 + 17,32 = 27,46
80 90- „ „ = 10,14 + 20,8 = 30,94

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{78,86}{1,724} = 45,74$ für 88-jährige Mitgl.

$\frac{78.86}{1,436} = 54,91$ „ 89- „ „

$\frac{78,86}{1,184} = 66,6$ „ 90- „ „

6tes Jahr.

Kapital = 107900 — 12600 = 95300; gest. 109 Mitgl.; zu vertheilen 10900 fl.; Zinsen $= \frac{3812}{247} = 15,43$; Erbantheil $=$ $\frac{10900}{247} + 5,29 = 44,12 + 5,29 = 44,12 + 5,29 = 49,41$; Jahresrente für

117 89-jährige Mitgl. = 24,91 + 45,74 = 70,65
80 90- „ „ = 27,46 + 54,91 = 82,37
50 91- „ „ = 30,94 + 66,6 = 97,54

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$$\frac{49,41}{1,436} = 34,4 \text{ für 89-jährige Mitgl.}$$

$$\frac{49,41}{1,184} = 41,73 \text{ „ 90- „ „}$$

$$\frac{49.41}{0,97} = 50,93 \text{ „ 91- „ „}$$

7tes Jahr.

Kapital = 95300 — 10900 = 84400; gest. 89 Mitgl.; zu vertheilen 8900 fl.; Zinsen = $\frac{3376}{158}$ = 21,36; Erbantheil = $\frac{8900}{158}$ + 11,22 = 56,32 + 11,22 = 67,54; Jahresrente für

80 90-jährige Mitgl. = 70,65 + 34,4 = 105,05
50 91- „ „ = 82,37 + 41,73 = 124,1
28 92- „ „ = 97,54 + 50,93 = 148,47

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt, giebt eine Leibrente von

$$\frac{67,54}{1,184} = 57,04 \text{ für 90-jährige Mitgl.}$$

$$\frac{67,54}{0,97} = 69,62 \text{ „ 91- „ „}$$

$$\frac{67,54}{0,804} = 84 \text{ „ 92- „ „}$$

8tes Jahr.

Die Jahresrente für

50 91-jährige Mitgl. = 105,05 + 57,04 = 162,09
28 92- „ „ = 124,1 + 69,62 = 193,72
14 93- „ „ = 148,47 + 84 = 232,47

Für die ältesten Mitglieder der zweiten Abtheilung betragen die Leibrenten vom

4ten	Jahre	20,80
5ten	„	66,60
6ten	„	50,93
zusammen		138,33

Da aber diese Mitglieder vom 8ten Jahre an jährlich 150 fl. zu beziehen haben, so muß denselben im 7ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 — 138,33 = 11,67 zukommen; also, weil sie im 7ten Jahre des Vereins 92 Jahre alt sind,

nach der Leibrententabelle, $11{,}67 \times 0{,}804 = 9{,}38$. Weil die Anzahl der Mitglieder im 7ten Jahre $= 28$ ist, so ist ein Kapital von $28 \times 9{,}38 = 262{,}64$ zur Deckung der Leibrenten erforderlich.

Für die nächstältesten Mitglieder der zweiten Abtheilung betragen die Leibrenten vom

4ten Jahre	17,32
5ten „	54,91
6ten „	41,73
zusammen	113,96

Da aber diese Mitglieder vom 8ten Jahre an jährlich 150 fl. zu beziehen haben, so muß denselben im 7ten Jahre das Kapital einer Leibrente von $150 - 113{,}96 = 36{,}04$ zukommen; also weil sie im 7ten Jahre des Vereins 91 Jahre alt sind, nach der Leibrententabelle, $36{,}04 \times 0{,}97 = 34{,}95$. Weil die Anzahl der Mitglieder im 7ten Jahre $= 50$ ist, so ist ein Kapital von $50 \times 34{,}95 = 1747{,}5$ zur Deckung der Leibrenten erforderlich.

Für die jüngsten Mitglieder der zweiten Abtheilung betragen die Leibrenten von

4ten Jahre	14,77
5ten „	45,74
6ten „	34,40
zusammen	94,91

Da aber vom 8ten Jahre an die Mitglieder jährlich 150 fl. zu beziehen haben, so muß denselben im 7ten Jahre das Kapital einer Leiarente von $150 - 94{,}91 = 55{,}09$ zukommen; also, weil sie im 7ten Jahre des Vereins 90 Jahre alt sind, nach der Leibrententabelle, $55{,}09 \times 1{,}184 = 65{,}22$. Weil die Anzahl der Mitglieder im 7ten Jahre $= 80$ ist, so ist ein Kapital von $80 \times 65{,}22 = 5217{,}6$ zur Deckung der Leibrenten erforderlich. Zur Deckung sämmtlicher Leibrenten müssen also im 7ten Jahre $262{,}64 + 1747{,}5 + 5217{,}6 = 7227{,}74$ fl. vorhanden seyn.

Zu Ende des 7ten Jahres sind zur Zahlung der constanten Zinsrente 10,14 erforderlich $158 \times 10{,}14 = 1602{,}12$; die Zinsen des im Anfang des 7ten Jahres vorhandenen Kapitals betragen aber $\frac{84400 \times 4}{100} = 3376$ fl. daher ein Ueberschuß

von 3376 — 1602,12 = 1773,88 fl.; hierzu das Kapital im Betrage von 84400 fl. giebt 86173,88; zieht man hiervon die zur Deckung der Leibrenten erforderlichen 7227,74 fl. ab, so bleiben 78946,14 fl. übrig, welche zu Ende des 7ten Jahres von der zweiten Abtheilung übergehen.

In der zweiten Abtheilung sind die Jahresrenten wie folgt.

Jahre		
1.	Für alle Mitglieder . . . . =	4,93
2.	„ „ „ . . . . =	6,16
3.	„ „ „ . . . . =	7,81
4	„ „ „ . . . . =	10,14
5.	Für 159 88-jährige Mitglieder =	24,91
	„ 117 89- „ „ =	27,46
	„ 80 90- „ „ =	30,94
6.	Für 117 89-jährige Mitglieder =	70,65
	„ 80 90- „ „ =	82,37
	„ 50 91- „ „ =	97,54
7.	Für 80 90-jährige Mitglieder =	105,05
	„ 50 91- „ „ =	124,1
	„ 28 92- „ „ =	148,47
8.	150	
9.	150	

u. s. w.

Erste Abtheilung.

1tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 320 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{1779}$ = 4,71;

Jahresrente = 4,71.

2tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 293 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{1486}$ = 5,65;

Jahresrente = 5,65.

3tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 263 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{1223}$ = 6,86;

Jahresrente = 6,86.

4tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 231 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{992}$ = 8,46;

Jahresrente = 8,46.

5tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 198 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{794}$ = 10,57;

Jahresrente = 10,57.

6tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 168 Mitgl.; Zinsen = $\frac{8396}{626}$ = 13,41;

Jahresrente = 13,41.

7tes Jahr.

Kapital = 209900; gest. 144 Mitgl.; zu vertheilen 14400 fl. und außerdem 78946,14, welche zu Ende des 7ten Jahres von der zweiten Abtheilung auf die erste übergehen; daher zu vertheilen 93346,14 fl.; Zinsen = $\frac{8396}{482}$ = 17,41 constante Zinsrente = 17,41 (s. zweite Abthl.);

Erbantheil = $\frac{93346,14}{482}$ = 193,66; Jahresrente = 17,41.

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{193,66}{2,021}$ = 95,82 für die 87-jährigen Mitgl.

$\frac{193,66}{1,724}$ = 112,33 „ „ 88- „ „

$\frac{193,66}{1,436}$ = 134,86 „ „ 89- „ „

8tes Jahr.

Jahresrente für

159 88-jährige Mitgl. = 17,41 + 95,82 = 113,23

117 89- „ „ = 17,41 + 112,33 = 129,74

80 90- „ „ = 17,41 + 134,86 = 152,27

Weil die Jahresrente der ältesten Mitglieder im 8ten Jahre mehr als die höchste Rente betragen würde, so muß denselben

im 7ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 fl. zukommen; also, weil sie im 7ten Jahre des Vereins 89 Jahre alt sind, nach der Leibrentententabelle, $150 \times 1{,}436 = 215{,}4$, und weil im 7ten Jahre die Anzahl der Mitglieder = 117 ist, so ist ein Kapital von $117 \times 215{,}4 = 25201{,}8$ fl. zur Deckung der Leibrenten erforderlich. Daher unter die übrigen $206 + 159 = 365$ Mitglieder zu vertheilen $93346{,}14 - 25201{,}8 = 68144{,}34$; folglich Erbantheil $= \frac{68144{,}34}{365} = 186{,}69$.

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{186{,}69}{2{,}021} = 92{,}37$ für die 87-jährigen Mitgl.

$\frac{186{,}69}{1{,}724} = 108{,}28$ „ „ 88- „ „

Es ist daher die Jahresrente für

159 88-jährige Mitglieder $= 17{,}41 + 92{,}37 = 109{,}78$

117 89- „ „ $= 17{,}41 + 108{,}28 = 125{,}69$

80 90- „ „ $= 150$.

Im 8ten Jahre ist das Kapital $= 209900 - 14400 = 195500$; gest. 126 Mitgl.; zu vertheilen 12600 fl.; weil aber von jetzt an nur noch die übrigen $159 + 117 = 276$ Mitglieder bei der Vererbung betheiligt sind, so ist der Betrag der Zinsen $= \frac{7820}{276} = 28{,}33$; daher Erbantheil $= \frac{12600}{276} + 10{,}92 = 45{,}65 + 10{,}92 = 56{,}57$.

Der Erbantheil in Leibrenten verwandelt giebt eine Leibrente von

$\frac{56{,}57}{1{,}724} = 32{,}81$ für die 88 jährigen Mitgl.

$\frac{56{,}57}{1{,}436} = 39{,}39$ „ „ 89- „ „

9tes Jahr.

Jahresrente für

117 89-jährige Mitglieder $= 109{,}78 + 32{,}81 = 142{,}59$

80 90- „ „ $= 125{,}69 + 39{,}39 = 165{,}08$

Hiernach würde die Jahresrente der ältern Mitglieder mehr als die höchste Rente betragen, und mithin können sie an der Vererbung nicht weiter Theil nehmen. Die Leibrente vom 7ten

Jahre her ist = 108,28; damit nun vom 9ten Jahre an die ältern Mitglieder jährlich 150 fl. erhalten, so muß denselben im 8ten Jahre das Kapital einer Leibrente von 150 — 108, 28 = 41,72 zukommen; also, weil sie im 8ten Jahre des Vereins 89 Jahre alt sind, nach der Leibrententabelle, 41,72 × 1,436 = 59,9 fl., und weil im 8ten Jahre die Anzahl derselben = 117 ist, so sind 117 × 59,9 = 7008,3 fl. zur Deckung der Renten erforderlich. Im 8ten Jahre ist der Erbantheil $= \frac{12600}{276}$ + 10,92; daher zur Vertheilung gekommen 12600 + 276 × 10,92 = 15613,92, und folglich der Erbantheil für die übrigen 159 Mitglieder =

$$\frac{15613{,}92 - 7008{,}3}{159} = \frac{8605{,}62}{159} = 54{,}12.$$

Dieser Erbantheil giebt für die 88-jährigen Mitglieder eine Leibrente im Betrage von

$$\frac{54{,}12}{1{,}724} = 31{,}39.$$

Im 9ten Jahre ist daher die Jahresrente für

117 89-jährige Mitglieder = 109,78 + 31,39 = 141,17
80 90- „ „ = 150
50 91- „ „ = 150.

Das Kapital ist = 195500 — 12600 = 182900; gestorben 109 Mitglieder; zu vertheilen 10900 fl.; Zinsen $= \frac{7316}{117}$ = 62,52; Erbantheil $= \frac{10900}{117}$ + 45,11 = 93,16 + 45,11 = 138,27. Die Leibrente, welche diesem Erbantheil entspricht ist $= \frac{138{,}27}{1{,}436} = 96{,}28.$

10tes Jahr.

Jahresrente = 141,17 + 96,28 = 237,45; also größer wie das Maximum. Es betragen die Renten vom

8ten Jahre 92,37
9ten „ 31,39
zusammen 123,76

Soll nun die Jahresrente vom 10ten Jahre an jährlich 150 fl. betragen, so muß noch eine Leibrente von 150 — 123,76 = 26,24 hinzukommen. Weil die Mitglieder im 9ten Jahre des Vereins

89 Jahre alt sind, so ist das Kapital, welches dieser Leibrente entspricht = 26,24 × 1,436 = 37,68 und weil die Anzahl der Mitglieder = 117 ist, so sind 117 × 37,68 = 4408,56 zur Deckung der Leibrenten erforderlich.

Zu Ende des 9ten Jahres sind zur Zahlung der constanten Zinsrente erforderlich 17,41 × 117 = 2036,97; die Zinsen des im Anfang des 9ten Jahres vorhandenen Kapitals betragen $\frac{182900 \times 4}{100}$ = 7316; daher ein Ueberschuß von 7316 — 2036,97 = 5279,03; hierzu das Kapital im Betrage von 182900 fl. giebt 188179,03 fl; zieht man hiervon die zur Deckung der Leibrenten erforderlichen 4408,56 fl. ab, so bleiben 183770,47 übrig, wonach zu Ende des 16ten Jahres über

$$183770{,}47 \left(\frac{104}{100}\right)^7 = 241841{,}32 \text{ fl.}$$

anderweitig verfügt werden kann. Bei der Kapitalvertheilung bleiben also zu Ende des 16ten Jahres 250764,84 — 241841,32 oder 8923,52 fl. mehr als bei der Leibrentenvertheilung übrig.

In der ersten Abtheilung sind die Jahresrenten wie folgt.

Jahre.		
1.	Für alle Mitglieder	= 4,71
2.	„ „ „	= 5,65
3.	„ „ „	= 6,86
4.	„ „ „	= 8,46
5.	„ „ „	= 10,57
6.	„ „ „	= 13,41
7.	„ „ „	= 17,41
8.	Für 159 88-jährige Mitglieder „ 117 89- „ „ „ 80 90- „ „	= 109,78 = 125,69 = 150
9.	Für 117 89-jährige Mitglieder „ 80 90- „ „ „ 50 91- „ „	= 141,17 = 150 = 150
10.	150	
11.	150	

149. Die in den §§. 142 — 148 beispielweise dargestellten Kapitalauflösungen sind in Betreff ihrer Wirkungen auf das Interesse der Theilnehmer von sehr verschiedener Art.

Im §. 142 sind vorerst drei Rentenvereine angenommen worden, welche in keiner Gemeinschaft mit einander stehen. Der erste Verein besteht aus 80-, 81- und 82-jährigen, der zweite aus 83- 84- und 85-jährigen, und der dritte aus 86-, 87- und 88-jährigen Mitgliedern und es ist aus dem in jenem Paragraphen angeführten Grunde angenommen worden, daß die einzelnen Altersabstufungen in dem Verhältniß vorkommen, in welchem die Lebenden überhaupt nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux (XX) stehen. Die Einlagekapitalien werden in Zeitrenten aufgelöst und die Auflösungszeit hängt von der Anzahl der Jahre ab, nach deren Ablauf der Verein ausgestorben ist. Dies ist, nach der angeführten Sterblichkeitstabelle, für den ersten Verein nach dem 16ten, für den zweiten nach dem 13ten und für den dritten nach dem 10ten Jahre der Fall. Das Einlagekapital des ersten Vereins ist daher in eine 16-jährige, das Kapital des zweiten Vereins in eine 13-jährige, und das Kapital des dritten Vereins in eine 10-jährige Zeitrente zu verwandeln. In dem Maaße nun, in welchem die Anzahl der abgegangenen Mitglieder größer wird, nimmt die Rente für die überlebenden Mitglieder zu, und so erhält im ersten Verein der zuletzt Lebende für seine Einlage von 100 fl. ein Kapital von 18013 fl., der im zweiten Verein zuletzt Lebende erhält 12247 fl. und der im dritten Verein zuletzt Lebende erhält 7718 fl.

Im §. 143 werden die drei Vereine zu einem einzigen vereinigt, und es wird, in Uebereinstimmung mit der frühern Bezeichnung, die Abtheilung, welche die jüngsten Mitglieder zählt, als erste, diejenige, welche die ältern Mitglieder enthält als zweite und die Abtheilung der ältesten Mitglieder als dritte Abtheilung bezeichnet. Hier wird nun die Summe der Einlagen in eine 16-jährige Zeitrente aufgelöst, und der entsprechende Betrag nach Maaßgabe des Absterbens der Mitglieder sämmtlicher Abtheilungen unter die Ueberlebenden zur Vertheilung gebracht. Die im §. 143 angenommene Vertheilung ist für die jüngern Altersklassen günstiger als für die ältern. Nach der Vertheilung im §. 142 verzehrt jede Altersklasse ihr eigenes

Kapital, während nach dem andern Verfahren das Gesammtkapital gemeinschaftlich getheilt wird.

Nach der Vertheilung im §. 144 sind die Zinsen des Gesammtkapitals von der Zeitrente getrennt worden, so zwar, daß die Vererbung der Zinsen von Abtheilung zu Abtheilung hingegen die Vererbung der Zeitrente gemeinschaftlich stattfindet. Die im §. 144 angenommene Vertheilung der Zinsen ist in der Beschaffenheit der Sache selbst begründet; jede Abtheilung theilt sich in die Zinsen ihres eigenen Einlagekapitals, und erst nach Aussterben einer Abtheilung theilt sich die Abtheilung der nächst jüngern Mitglieder durch Vererbung in die Zinsen des Kapitals der ausgestorbenen Abtheilung. Nach der im §. 143 angenommenen Vertheilung theilen sich die Ueberlebenden Mitglieder sämmtlicher Abtheilungen in die Zinsen des Gesammtkapitals, und die im §. 144 angenommene Vertheilung ist daher für die ältern Altersklassen günstiger als für die jüngern.

Nach der in den §§. 142, 143 und 144 angenommenen Vertheilung nehmen für das höhere Alter die Renten im Vergleich mit den Ertragnissen der frühern Jahre unverhältnißmäßig zu; auf den zuletzt Lebenden fällt, wenn jede Abtheilung ihr Kapital selbst verzehrt, die ganze Zeitrente seiner Abtheilung, oder aber es gelangt der zuletzt Lebende zum Besitz der Zeitrente des Gesammtkapitals, wenn, wie im §. 143, die Einlagen sämmtlicher Abtheilungen als gemeinschaftliches Kapital bei der Auflösung in Rechnung gebracht werden. Weil es aber zweckmäßiger ist, daß Viele zum Besitz mäßig großer Renten gelangen, als daß die geringe Anzahl der das höhere Alter erreichenden Mitglieder unverhältnißmäßig großer Summen theilhaftig werden, so muß dem Anwachsen der Renten eine Grenze gesetzt werden. In der im §. 145 dargestellten Kapitalauflösung ist die höchste Rente zu 150 fl., also dem Anderthalbfachen der Einlage, angesetzt worden. Zur Bestimmung der Zeitrente unter dieser Voraussetzung muß die Berechnung derselben in der Weise gesperrt werden, daß man vorläufig ausmittelt, zu welcher Zeit alle noch lebenden Mitglieder der Anstalt erstmals zum Genuß der höchsten Rente gelangen, und welches Kapital zur Fundirung der höchsten Renten erforderlich ist.

Zieht man den gefundenen Betrag vom Gesammtkapital ab, so ist der Rest der weiter auflösliche Theil desselben, und wenn

der vorhin angeführte Zeitpunkt mit dem $n$ten Jahre eintritt, so ist die Zeitrente für $n - 1$ Jahre zu bestimmen.

In Beziehung auf das im §. 145 durchgeführte Beispiel geht aus der Zusammenstellung der Resultate hervor, daß hier $n = 7$ ist; die in jedem Jahre, nach der Sterblichkeitstabelle, zur Deckung der höchsten Renten erforderlichen Summen sind hiernach auf das 7te Jahr zum angenommenen Zinsfuß zu discontiren; die Summe dieser Werthe ist = 255256,41 fl. und weil das Gesammtkapital = 394800 fl. ist, so sind 394800 — 255256,41 = 139543,59 fl. zur weitern Auflösung disponibel; werden aber die Zinsen im Gesammtbetrage von 5581,74 fl. von der Zeitrente getrennt, so ist die Auflösungsrente = 21038.

Nach der Vertheilung im §. 146 theilen sich in derjenigen Abtheilung, deren jüngste Mitglieder das 87te Lebensjahr erreicht haben, die Ueberlebenden in das Kapital der abgegangenen Mitglieder, die höchste Rente ist zu 150 fl. angesetzt, die Vererbung findet von Abtheilung zu Abtheilung statt, und in denjenigen Abtheilungen, in welchen noch keine Kaptialvererbungen vorkommen, theilen sich die Ueberlebenden in die Zinsen des Einlagekapitals der Abtheilung. Nach der Vertheilung im §. 147 wird jedem Ueberlebenden statt des Antheils am Kapital der abgegangenen Mitglieder eine seinem Alter entsprechende Leibrente gewährt, und die Maximalrente ist ebenfalls zu 150 fl. angesetzt. Durch das System der Erbkapitalvertheilung werden die Erbschaften am schnellsten und vollständigsten zur Vertheilung und zum Genuß der Mitglieder gebracht, und es erhöht sich die Rente sofort sehr bedeutend, bleibt aber bald gegen die Leibrente zurück, und während bei der Kapitalvertheilung nach dem Aussterben des Rentenvereins 250764,84 fl. übrig bleiben, so stellt sich bei dem System der Leibrentenvertheilung ein um 8923,52 fl. kleinerer Rest beim Aussterben des Vereins heraus, so daß also hierbei ein größerer Theil des Einlagekapitals als bei ersterm Systeme aufgelöst wird. Das System der Erbkapitalvertheilung hat aber auch den Nachtheil, daß es keine Stetigkeit der daraus hervorgehenden Jahresrenten garantirt, vielmehr der Bezug in jedem neuen Jahre erst wieder von neuen Todesfällen abhängt, durch diese Zufälligkeit mithin ebensowohl in einzelnen Jahren rückwärts als vorwärts schreiten kann,

während nach dem System der Leibrentenvertheilung die einmal erreichten Renten stetig bis zum Lebensende fortlaufen müssen und nur erhöht werden können.

In so fern es nun zweckmäßig ist, von beiden Systemen die vorzüglichen Seiten beizubehalten und zu vereinigen, so führt dieß auf das, im §. 141 bereits angedeutete gemischte System, dessen Combinationen freilich sehr vielfältig seyn können. Nach den Statuten der Rentenanstalt in Dresden z. B. wird ein Drittheil des Kapitalantheils baar ausgezahlt, und für den Rest wird eine entsprechende Leibrente nach Maaßgabe folgenden Tarifs gewährt.

Lebensalter am Schlusse des Anfalljahres.	Für Mitglieder männl. Geschlechts. Procente des Erbantheils.	Für Mitglieder weiblichen Geschlechts. Procente des Erbantheils.	Lebensalter am Schlusse des Anfalljahres.	Für Mitglieder männl. Geschlechts. Procente des Erbantheils.	Für Mitglieder weiblichen Geschlechts. Procente des Erbantheils.
55	8,0	7,0	71	13,8	12,5
56	8,2	7,2	72	14,5	13,1
57	8,4	7,4	73	15,2	13,7
58	8,6	7,6	74	16,0	14,4
59	8,8	7,8	75	16,8	15,1
60	9,0	8,0	76	17,4	15,9
61	9,3	8,3	77	18,7	16,7
62	9,6	8,6	78	19,8	17,6
63	9,9	8,9	79	21,0	18,6
64	10,3	9,2	80	22,4	19,7
65	10,7	9,6	81	24,0	20,9
66	11,1	10,0	82	25,8	22,3
67	11,6	10,4	83	27,8	23,9
68	12,1	10,9	84	30,0	25,7
69	12,6	11,4	85	30,0	27,7
70	13,2	11,9	86 oder darüb.	30,0	30,0

Obiger Leibrententarif beginnt mit dem 55ten Lebensjahre, weil mit Anfang desjenigen Jahres, in welchem die jüngsten in einer Altersklasse zuläßig gewesenen Personen das 55te Jahr erfüllen müßten, sämmtliche zu diesem Zeitpunkte noch lebenden Theilhaber dieser Altersklasse in die Erbkasse eintreten (§. 36 der Statuten). Eine volle Einlage beträgt 100 Thlr. und die höchste Rente ist 150 Thlr. Der Tarif ist nach demjenigen

Maaßstabe festgestellt, wonach die Bank von England die von ihr emittirten dreiprocentigen Stocks bei der Annahme des Pari-Kurses derselben gegen Leibrenten, welche je nach dem Geschlechte verschieden ausfallen, einlöst. Die Bank gewährt bis zum 80ten Jahre steigende Leibrenten, wogegen die sächsische Rentenanstalt dieselben bei Männern bis zum 84ten und bei Frauen bis zum 86ten Jahre steigen läßt. Die Bank soll ihre Berechnungen auf die Erfahrungen der Equitable-Gesellschaft, eine der ältesten Englischen Lebensversicherungsanstalten gegründet haben.*)

Durch die Zeitrentenvertheilung wird das ganze Einlagekapital aufgelöst, wenn bei der im §. 142 angenommenen Besetzung der einzelnen Abtheilungen die, der Mortalitätstabelle (§. 142) entsprechende, erwartungsmäßige Sterblichkeit mit der wirklichen Sterblichkeit übereinstimmt. Nach dem System der Erbkapitalvertheilung und Leibrentenvertheilung bleiben aber nach dem Aussterben des Vereins mehr oder weniger bedeutende Kapitalien unaufgelöst, die also den Mitgliedern desselben entzogen werden. Uebrigens können die in den Beispielen §§. 146 und 147 beim Aussterben des Vereins verbliebenen Reste in dieser Beziehung nicht maßgebend seyn, weil wegen des hohen Alters der Mitglieder und der verhältnißmäßig zu klein angenommenen Maximalrente nicht anders als viel zu bedeutende Reste herauskommen konnten. Wie aber im §. 136 schon bemerkt worden, ist bei der beispielsweisen Auseinandersetzung der verschiedenen Kapitalauflösungs-Systeme absichtlich angenommen worden, daß die Mitglieder des Rentenvereins im höhern Alter stehen, um dadurch die Rechnung abzukürzen und die Darstellung deutlicher zu machen. Bei der Auflösung durch Leibrentenvertheilung sind auch die verschiedenen Altersstufen der einzelnen Abtheilungen zu mehrer Deutlichkeit berücksichtigt worden, während für die Mitglieder der einzelnen Abtheilungen ein durchschnittliches Alter hätte angenommen werden können. Auf letztere Weise wird man aber die Rechnung führen, wenn es sich darum handelt, vorläufig, nach einer angenommenen Klasseneintheilung und mit Berücksichtigung einer

*) Becker, über eine zweckmäßigere Einrichtung der Renten-Anstalten (Berlin 1844).

als normal anzunehmenden Klassenbesetzung, zu ermitteln, wie sich die Renten in den verschiedenen Altersstufen stellen, und in welchem Alter die Mitglieder erstmals zum Genuß der Maximalrente gelangen können.

Nach den in den §§. 146 und 147 durchgeführten Kapitalauflösung ist für jede Altersklasse eine besondere Erbklasse gebildet worden; man kann aber auch sämmtliche Altersklassen zu einer einzigen Erbklasse vereinigen, wodurch aber, wie leicht zu ersehen, die ältern Klassen im Nachtheil sind.

Bei der Kapitalauflösung nach Zeitrenten und der Annahme einer höchsten Rente kann, zum Vortheil der ältern Mitglieder, die Auflösung ebenfalls wie in den §§. 146 und 147 erst für das höhere Alter beginnen.

Soll, in Beziehung auf das im §. 145 durchgeführte Beispiel, die Auszahlung der Zeitrente für diejenige Altersklasse ihren Anfang nehmen, deren jüngstes Mitglied das 87te Lebensjahr erreicht hat, so ist die Zeitrente, im Betrage von 21038 fl. zu vertheilen im

1ten Jahre

unter 482 Mitglieder der 3ten Abtheilung; im

2ten Jahre

unter 356 Mitglieder der 3ten Abtheilung; im

3ten Jahre

unter 247 Mitglieder der 3ten Abtheilung; im

4ten Jahre

unter 158 Mitglieder der 3ten Abtheilung
und 482 „ „ 2ten „ ; im
(zus. 640 Mitglieder).

5ten Jahre

unter 92 Mitglieder der 3ten Abtheilung
und 356 „ „ 2ten „ ; im
(zus. 448 Mitglieder).

6ten Jahre

unter 48 Mitglieder der 3ten Abtheilung
und 247 „ „ 2ten „
(zus. 295 Mitglieder).

Die Auflösungsrenten sind demnach in der dritten Abtheilung für das

$$1\text{te Jahr} = \frac{21038}{482} = 43{,}64$$

$$2\text{te } \text{„} = \frac{21038}{356} = 59{,}09$$

$$3\text{te } \text{„} = \frac{21038}{247} = 85{,}17$$

$$4\text{te } \text{„} = \frac{21038}{640} = 32{,}87$$

$$5\text{te } \text{„} = \frac{21038}{448} = 46{,}95$$

$$6\text{te } \text{„} = \frac{21038}{295} = 71{,}31$$

In der zweiten Abtheilung sind die Auflösungsrenten für das

$$4\text{te Jahr} = \frac{21038}{640} = 32{,}87$$

$$5\text{te } \text{„} = \frac{21038}{448} = 46{,}95$$

$$6\text{te } \text{„} = \frac{21038}{295} = 71{,}31$$

Die Mitglieder der ersten Abtheilung sind bis zum 6ten nur im Genuß der Zinsrente, und vom 7ten Jahre an erhalten sie, wie alle übrigen Mitglieder des Vereins, die höchste Rente.

Weil im 4ten Jahre die zweite Abtheilung bei der Vertheilung der Zeitrente betheiligt ist, so fällt in der dritten Abtheilung die Rente geringer als in dem vorhergehenden Jahre aus; soll nun die Rente nicht zurückgehen, so muß der ältern Abtheilung derselbe, vorjährige Rentenbetrag zugetheilt werden; was von der Zeitrente übrig bleibt, bildet vorerst und so lange den Antheil der nächstjüngern Abtheilung, bis die gemeinschaftliche Theilung wieder statt finden kann.

Im 4ten Jahre existiren aber 158 Mitglieder in der dritten Abtheilung; soll nun jeder, wie im 3ten Jahre, wieder 85,17 fl. erhalten, so sind hierzu $158 \times 85{,}17 = 13456{,}86$ fl. erforderlich; für die zweite Abtheilung bleiben übrig $21038 - 13456{,}86 = 7581{,}14$ fl., und von den 482 Mitgliedern der zweiten Abtheilung erhält Jeder $\frac{7581{,}14}{482} = 15{,}72$ fl.

Im 5ten Jahre existiren 92 Mitglieder der dritten Abtheilung; zur Zahlung der Rente von 85,17 sind also erforderlich $92 \times 85{,}17 = 7835{,}64$ fl.; für die zweite Abtheilung bleiben also

übrig 21038 — 7835,64 = 13202,36, und von den 356 Mitgliedern der zweiten Abtheilung erhält Jeder $\frac{13202,36}{356} = 37,08$.

Im 6ten Jahre existiren 48 Mitglieder der dritten Abtheilung; zur Zahlung der Rente von 85,17 sind erforderlich $48 \times 85,17 = 4088,16$; für die zweite Abtheilung bleiben also übrig 21038 — 4088,16 = 16949,84, und von den 247 Mitgliedern der zweiten Abtheilung erhält Jeder $\frac{16949,84}{247} = 68,62$.

Die Renten der einzelnen Abtheilungen stellen sich nun wie folgt:

Erste Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,71	—	4,71
2	5,65	—	5,65
3	6,86	—	6,86
4	8,46	—	10,57
5	10,57	—	13,41
6	13,41	—	150
7	—	—	150
8	—	—	150

u. s. w.

Zweite Abtheilung.

Jahre.	Zinsrente.	Auflösungsrente.	Jahresrente.
1	4,93	—	4,93
2	6,16	—	6,16
3	7,81	—	7,81
4	10,14	15,72	25,86
5	13,74	37,08	50,82
6	19,80	68,62	88,42
7	—	—	150
8	—	—	150

u. s. w.

ters der Anstalt gegenüber in gleichem Verhältnisse stehen, und daß sie also in eine Gemeinschaft treten, welche die Eintheilung der Jahresgesellschaften in Altersklassen zur nothwendigen Folge hat. Weil aber nicht immer eine hinlänglich große Anzahl von Theilnehmern gleichen Alters vorhanden ist, und weil auch die Geschäftsführung zu verwickelt wäre, wenn man für jedes Altersjahr eine besondere Abtheilung bilden wollte, so müssen gemischte Altersklassen eingeführt werden. Unter sich müssen die Abstufungen gleich seyn, wenn die Vererbungen in gleichen Perioden eintreten sollen, und weil es, wenn der beabsichtigte Zweck der Anstalt erreicht werden soll, unabläßig ist, die Vortheile, welche die Anstalt noch nebenbei abwerfen kann, dem unterstützungsbedürftigen Alter allein zufließen zu lassen, so dürfte die Eintheilung nach Abstufungen von 5 zu 5 Jahren die zweckmäßigste seyn. So werden dann auch z. B. nach den Statuten der Darmstädter und Sächsischen Rentenanstalten die Mitglieder in einer jeden Jahresgesellschaft nach Maßgabe des Alters, welches sie im Laufe des, die Jahresgesellschaft bezeichnenden Kalenderjahres vollenden, in eilf Altersklassen getheilt, und zwar dergestalt, daß diejenigen, welche vom 1ten Januar bis 31ten December dieses Jahres

0	bis einschließlich	5	Jahre	alt	werden	die	1te
6	" "	10	"	"	"	"	2te
11	" "	15	"	"	"	"	3te
16	" "	20	"	"	"	"	4te
21	" "	25	"	"	"	"	5te
26	" "	30	"	"	"	"	6te
31	" "	35	"	"	"	"	7te
36	" "	40	"	"	"	"	8te
41	" "	45	"	"	"	"	9te
46	" "	50	"	"	"	"	10te
51	Jahre oder darüber		"	"	"	"	11te

Altersklasse bilden.

Hier giebt es also nur fünfgliedrige Altersklassen, wenn man annimmt, daß nach dem 55ten Lebensjahre kein Beitritt mehr erfolgt. Man hätte übrigens noch eine 12te Klasse für das Alter von 55 bis 60 Jahren annehmen können.

Auch zur Bildung der Altersklassen ist eine hinlängliche Anzahl von Theilnehmern erforderlich. So wird z. B. nach den

Satuten der Darmstädter Rentenanstalt, wenn jeder der acht jüngern Altersklassen einer Jahresgesellschaft nicht wenigstens 30, und jeder der drei ältern dagegen nicht wenigstens 20 verschiedene Personen beitreten, die unvollzählige ältere Klasse in dieser Jahresgesellschaft ausgesetzt, und es werden die Theilnehmer alsdann in die nächstfolgende Jahresgesellschaft aufgenommen.

Normalsterblichkeitstabelle.

152. Angenommen, daß es sich bei der Rentenanstalt lediglich um die Vertheilung der Einlagen der abgegangenen Mitglieder handle, so käme hier die Anwendung der Sterblichkeitstabellen nur dann in Betracht, wenn für die Erbantheile Leibrenten ausgeworfen würden. Soll aber ein Rentenmaximum festgesetzt, und das Gesammtkapital vollständig aufgelöst werden, sollen ferner Summen, welche die Anstalt nebenbei noch abwerfen kann, im Verhältniß der mittlern Lebensdauer der einzelnen Altersklassen vertheilt werden, so muß nicht nur der Berechnung des Plans eine den Verhältnissen der Anstalt entsprechende Sterblichkeitstabelle zum Grunde gelegt, sondern es muß auch die Anzahl der Mitglieder der einzelnen Altersklassen mit in Anschlag gebracht werden. Zu dem Ende muß man die Verhältnißzahlen des Absterbens der gemischten Altersklassen vermittelst der, den Verhältnissen der Anstalt entsprechenden Sterblichkeitstabelle ausmitteln und die erhaltenen Resultate für eine normale Besetzung der einzelnen Altersklassen einrichten. Die Zusammenstellung der auf solche Weise erhaltenen Zahlen ist eine Normalsterblichkeitstabelle.

Richten wir z. B. die Deparcieux'sche Sterblichkeitstabelle (XX) für 12 fünfgliedrige Altersklassen ein. Innerhalb dieser Altersklassen kann das Verhältniß der Mitgliederzahl der einzelnen Altersabstufungen sehr unterschiedlich seyn; zur Construction einer Sterblichkeitstabelle für gemischte Altersklassen muß aber gleichwohl angenommen werden, daß sich in jeder Altersklasse die einzelnen Altersabstufungen in dem Verhältniß vorfinden, in welchem die Lebenden in der Sterblichkeitstabelle vorkommen. Hiernach kommen in der ersten Altersklasse auf

10000 Neugeborne,
7450 Einjährige,
7080 Zweijährige,

ters der Anstalt gegenüber in gleichem Verhältnisse stehen, und daß sie also in eine Gemeinschaft treten, welche die Eintheilung der Jahresgesellschaften in Altersklassen zur nothwendigen Folge hat. Weil aber nicht immer eine hinlänglich große Anzahl von Theilnehmern gleichen Alters vorhanden ist, und weil auch die Geschäftsführung zu verwickelt wäre, wenn man für jedes Altersjahr eine besondere Abtheilung bilden wollte, so müssen gemischte Altersklassen eingeführt werden. Unter sich müssen die Abstufungen gleich seyn, wenn die Vererbungen in gleichen Perioden eintreten sollen, und weil es, wenn der beabsichtigte Zweck der Anstalt erreicht werden soll, unabläßig ist, die Vortheile, welche die Anstalt noch nebenbei abwerfen kann, dem unterstützungsbedürftigen Alter allein zufließen zu lassen, so dürfte die Eintheilung nach Abstufungen von 5 zu 5 Jahren die zweckmäßigste seyn. So werden dann auch z. B. nach den Statuten der Darmstädter und Sächsischen Rentenanstalten die Mitglieder in einer jeden Jahresgesellschaft nach Maßgabe des Alters, welches sie im Laufe des, die Jahresgesellschaft bezeichnenden Kalenderjahres vollenden, in eilf Altersklassen getheilt, und zwar dergestalt, daß diejenigen, welche vom 1ten Januar bis 31ten December dieses Jahres

0	bis	einschließlich	5	Jahre	alt	werden	die	1te
6	„	„	10	„	„	„	„	2te
11	„	„	15	„	„	„	„	3te
16	„	„	20	„	„	„	„	4te
21	„	„	25	„	„	„	„	5te
26	„	„	30	„	„	„	„	6te
31	„	„	35	„	„	„	„	7te
36	„	„	40	„	„	„	„	8te
41	„	„	45	„	„	„	„	9te
46	„	„	50	„	„	„	„	10te
51	Jahre	oder darüber		„	„	„	„	11te

Altersklasse bilden.

Hier giebt es also nur fünfgliedrige Altersklassen, wenn man annimmt, daß nach dem 55ten Lebensjahre kein Beitritt mehr erfolgt. Man hätte übrigens noch eine 12te Klasse für das Alter von 55 bis 60 Jahren annehmen können.

Auch zur Bildung der Altersklassen ist eine hinlängliche Anzahl von Theilnehmern erforderlich. So wird z. B. nach den

Satuten der Darmstädter Rentenanstalt, wenn jeder der acht jüngern Altersklassen einer Jahresgesellschaft nicht wenigstens 30, und jeder der drei ältern dagegen nicht wenigstens 20 verschiedene Personen beitreten, die unvollzählige ältere Klasse in dieser Jahresgesellschaft ausgesetzt, und es werden die Theilnehmer alsdann in die nächstfolgende Jahresgesellschaft aufgenommen.

Normalsterblichkeitstabelle.

152. Angenommen, daß es sich bei der Rentenanstalt lediglich um die Vertheilung der Einlagen der abgegangenen Mitglieder handle, so käme hier die Anwendung der Sterblichkeitstabellen nur dann in Betracht, wenn für die Erbantheile Leibrenten ausgeworfen würden. Soll aber ein Rentenmaximum festgesetzt, und das Gesammtkapital vollständig aufgelöst werden, sollen ferner Summen, welche die Anstalt nebenbei noch abwerfen kann, im Verhältniß der mittlern Lebensdauer der einzelnen Altersklassen vertheilt werden, so muß nicht nur der Berechnung des Plans eine den Verhältnissen der Anstalt entsprechende Sterblichkeitstabelle zum Grunde gelegt, sondern es muß auch die Anzahl der Mitglieder der einzelnen Altersklassen mit in Anschlag gebracht werden. Zu dem Ende muß man die Verhältnißzahlen des Absterbens der gemischten Altersklassen vermittelst der, den Verhältnissen der Anstalt entsprechenden Sterblichkeitstabelle ausmitteln und die erhaltenen Resultate für eine normale Besetzung der einzelnen Altersklassen einrichten. Die Zusammenstellung der auf solche Weise erhaltenen Zahlen ist eine Normalsterblichkeitstabelle.

Richten wir z. B. die Deparcieux'sche Sterblichkeitstabelle (XX) für 12 fünfgliedrige Altersklassen ein. Innerhalb dieser Altersklassen kann das Verhältniß der Mitgliederzahl der einzelnen Altersabstufungen sehr unterschiedlich seyn; zur Construction einer Sterblichkeitstabelle für gemischte Altersklassen muß aber gleichwohl angenommen werden, daß sich in jeder Altersklasse die einzelnen Altersabstufungen in dem Verhältniß vorfinden, in welchem die Lebenden in der Sterblichkeitstabelle vorkommen. Hiernach kommen in der ersten Altersklasse auf

10000 Neugeborne,
7450 Einjährige,
7080 Zweijährige,

6823 Dreijährige,
6618 Vierjährige,

so daß im Anfang unter 37979 Mitgliedern der ersten Klasse die einzelnen Altersabstufungen nach den obigen Verhältnißzahlen enthalten sind.

In gleicher Weise muß angenommen werden, daß die zweite Altersklasse aus

6468 Fünfjährigen,
6345 Sechsjährigen,
6245 Siebenjährigen,
6154 Achtjährigen,
6073 Neunjährigen,

(Summe 31285)

daß die dritte Klasse aus

6004 Zehnjährigen,
5946 Elfjährigen,
5897 Zwölfjährigen,
5854 Dreizehnjährigen,
5815 Vierzehnjährigen,

(Summe 29516)

u. s. w. besteht.

Nun erleiden die zu Anfang des 1ten Jahres lebenden 37979 Mitglieder der ersten Alterklasse einen Abgang, welcher der Summe des Abgangs der 5 ersten Jahre in der Sterblichkeitstabelle gleich ist, also 2550 + 362 + 265 + 205 + 150 = 3532; die Anzahl der Lebenden ist daher zu Ende des 1ten Jahres = 37979 — 3532 = 34447. Zu Ende des 1ten Jahres besteht aber auch die 1te Klasse aus

7450 Einjährigen,
7088 Zweijährigen,
6823 Dreijährigen,
6618 Vierjährigen,
6468 Fünfjährigen,

und die Summe derselben ist, in Uebereinstimmung mit der vorhin gefundenen Anzahl der Lebenden = 34447. Kürzer gelangt man also zur Anzahl der Lebenden für das

1te Jahr,

wenn man von der anfänglichen Summe der Lebenden die An-

zahl der Neugebornen abzieht, und zum Rest die Anzahl der Fünfjährigen addirt; für das

2te Jahr,

wenn man von der vorhin gefundenen Anzahl der Lebenden die Anzahl der Einjährigen abzieht, und zum Rest die Anzahl der Sechsjährigen addirt; und so fort für die übrigen Jahre.

Auf diese Weise erhält man die im Anhang befindliche (XXI) Sterblichkeitstabelle für 12 fünfgliedrige Altersklassen nach der Deparcieux'schen, von Florencourt eingerichteten Sterblichkeitstabelle. Letztere ist in den französischen Leibrentenanstalten schon erprobt und fortwährend im Gebrauche, und sie dürfte für einen großen Theil Deutschlands ebenfalls passend seyn. (Vergl. §. 133).

Was nun, bei normaler Besetzung, das Verhältniß der Stärke der Altersklassen unter sich betrifft, so kann man, zur vorläufigen Orientirung, untersuchen, wie sich in dem beitrittsfähigen Alter von 0 bis n Jahren (also nach der Annahme, daß nach dem $n$ten Lebensjahre kein Beitritt mehr erfolgt) die gemischten Altersklassen der Bevölkerung unter sich verhalten.

Setzt man $n = 60$ und berechnet man die Verhältnisse für 12 fünfgliedrige Altersklassen, so ergiebt sich z. B. nach der XVIten Tabelle die derselben entsprechende Anzahl von Lebenden für 0 bis 60 Jahre, wenn man die beim Alter von 60 Jahren befindliche Zahl der Lebenden von der bei 0 stehenden Zahl abzieht; die Anzahl der Lebenden für 0 bis 5 Jahre ergiebt sich, wenn man von der bei 0 stehenden Zahl die bei 5 stehende Zahl abzieht; die Anzahl der Lebenden für 5 bis 10 Jahre ergiebt sich, wenn man von der bei 5 stehenden Zahl die bei 10 stehende Zahl abzieht, u. s. f. für die übrigen Altersklassen. Auf diese Weise gelangt man zu folgenden Resultaten.

Für	0	bis	60	Jahre	28763192	—	2553152	= 26210040
"	0	"	5	"	28763192	—	25308876	= 3454316
"	5	"	10	"	25308876	—	22487146	= 2821730
"	10	"	15	"	22487146	—	19785617	= 2701529
"	15	"	20	"	19785617	—	17205690	= 2579927
"	20	"	25	"	17205690	—	14770455	= 2435235
"	25	"	30	"	14770455	—	12495969	= 2274486
"	30	"	35	"	12495969	—	10390261	= 2105708
"	35	"	40	"	10390261	—	8456548	= 1933713
"	40	"	45	"	8456548	—	6697415	= 1759133

„ 45 „ 50 „ 6697415 — 5118652 = 1578763
„ 50 „ 55 „ 5118652 — 3731622 = 1387030
„ 55 „ 60 „ 3731622 — 2553152 = 1178470

Die Verhältnisse der Altersklassen ergeben sich demnach aus folgenden Proportionen:

Für 0 bis 5 Jahre.
26210040 : 3454316 = 100 : x = 13,17
Für 5 bis 10 Jahre.
26210040 : 2821730 = 100 : x = 10,76
Für 10 bis 15 Jahre.
26210040 : 2701529 = 100 : x = 10,30
Für 15 bis 20 Jahre.
26210040 : 2579927 = 100 : x = 9,84
Für 20 bis 25 Jahre.
26210040 : 2435235 = 100 : x = 9,29
Für 25 bis 30 Jahre.
26210040 : 2274486 = 100 : x = 8,67
Für 30 bis 35 Jahre.
26210040 : 2105708 = 100 : x = 8,03
Für 35 bis 40 Jahre.
26210040 : 1933713 = 100 : x = 7,37
Für 40 bis 45 Jahre.
26210040 : 1759133 = 100 : x = 6,71
Für 45 bis 50 Jahre.
26210040 : 1578763 = 100 : x = 6,02
Für 50 bis 55 Jahre.
26210040 : 1387030 = 100 : x = 5,29
Für 55 bis 60 Jahre.
26210040 : 1178470 = 100 : x = 4,49

(99,94)

Die solchergestalt gefundenen Verhältnisse müssen nun noch durch die Ergebnisse der Erfahrungen anderer, unter gleichen Umständen existirenden, Rentenanstalten, oder aber nach den eigenen Erfahrungen der neuen Anstalt berichtigt werden, welch' letzteres in dem Falle geschehen kann, wenn die Kapitalauflösung nicht gleich Anfangs, sondern erst nach Verlauf einiger Jahre beginnt. Das Ergebniß eigener Erfahrungen ist aber hier um so maßgebender, als bei der Construction der Normalsterblich-

keitstabelle auch die normale Gesammtzahl der Einlagen mit in Rechnung gebracht werden muß.

Nehmen wir beispielsweise an, daß die Verhältnisse der Altersklassen wie folgt angesetzt werden: für die

1te	Klasse	= 23
2te	"	= 12
3te	"	= 11
4te	"	= 10
5te	"	= 9
6te	"	= 8
7te	"	= 7
8te	"	= 6
9te	"	= 5
10te	"	= 4
11te	"	= 3
12te	"	= 2
	(Summe	100)

und daß nach einem mehrjährigen Durchschnitt die Stückzahl der Einlagen zu 3000 angenommen werden können, so kommen auf die

1te	Klasse	690	Einlagen
2te	"	360	"
3te	"	330	"
4te	"	300	"
5te	"	270	"
6te	"	240	"
7te	"	210	"
8te	"	180	"
9te	"	150	"
10te	"	120	"
11te	"	90	"
12te	"	60	"
	(Summa	3000)	

Der allgemeinen Sterblichkeitstabelle (XXI) für die dritte Altersklasse z. B.

Jahre.	Lebende.
1	29516
2	29290
3	29084
4	28886

2c. 2c.

entspricht demnach folgende Normalsterblichkeitstabelle für diese Klasse:

Jahre.	Lebende.
1	330
2	$\frac{330\times 29290}{29516}$
3	$\frac{330\times 29084}{29516}$
4	$\frac{330\times 28886}{29516}$

2c. 2c.

In Beziehung auf den Eintritt der Mitglieder ist aber die allgemeine Sterblichkeitstabelle so zu verstehen: daß vorhanden sind

zu Anfang des 1ten Gesellschaftsjahres 29516 Mitglieder
" Ende " 1ten " 29290 "
" " " 2ten " 29084 "
" " " 3ten " 28886 "

Weil aber die Mitglieder nicht gleichzeitig eintreten, und der Abgang im Sammeljahr sehr zufällig und nicht normal ist, so kann man annehmen, daß zu Ende des 1ten Gesellschaftsjahres 330 Mitglieder (Normalzahl) vorhanden sind; hiernach entspricht der allgemeinen Sterblichkeitstabelle (α) für die dritte Klasse folgende Normalsterblichkeitstabelle (β) für diese Klasse:

(α)	(β)
29516	330
29290	$\frac{330\times 29084}{29290}$
29084	$\frac{330\times 28886}{29290}$
28886	$\frac{330\times 28687}{29290}$
28687	
2c.	2c.

Daher verhält sich überhaupt die Normalzahl der zu Ende des 1ten Gesellschaftsjahres lebenden Mitglieder zur Anzahl der Lebenden des *n*ten Jahres, wie sich die Anzahl der Lebenden des zweiten Jahres der allgemeinen Sterblichkeitstabelle zur Anzahl der Lebenden des $(n+1)$ten Jahres dieser Tabellen verhält.

Volle Einlagen.

153. Die Größe der Einlage ist mit Berücksichtigung der Normalsterblichkeitstabelle durch das Rentenmaximum bedingt, und dem Zweck der Anstalt gemäß soll sie bei eintretendem Alter ihren Mitgliedern eine Rente gewähren, welche, wenn sie auch nicht zur Deckung ihres ganzen Lebensbedarfs hinreicht, doch wenigstens einen ansehnlichen Zuschuß zu ihrem Lebensunterhalt liefern kann. In den meisten deutschen Rentenanstalten ist die Einlage = 100 in der betreffenden Geldeinheit, und das Rentenmaximum = 150. In der badischen Rentenanstalt ist die Einlage = 200 fl. und das Rentenmaximum = 300 fl.

Theileinlagen.

154. Auch Theileinlagen werden unter Festsetzung eines gewissen Minimums, (auf welches wir später zurückkommen werden) gestattet, um auch den weniger Bemittelten Gelegenheit zu geben, sich bei einer Rentenanstalt zu betheiligen.

Anlegung des Activvermögens der Anstalt.

155. Die in abgesonderter Rechnung zu haltenden Fonds der Jahresgesellschaften fließen zusammen in den Centralfonds der Anstalt und bilden das Activ-Vermögen derselben, welches so schnell und sicher als möglich gegen angemessene Verzinsung anzulegen ist, z. B. auf gerichtliches Unterpfand an Gemeinden, Körperschaften und Privatpersonen, auf zinstragende Staatspapiere durch Ankauf derselben nach ihrem Courswerth, auf Faustpfänder in Staatspapieren, Pfandverschreibungen ꝛc.

Nachzahlungen.

156. Die Theileinlagen können durch baare Nachzahlungen, für welche ebenfalls ein Minimum festzusetzen ist, zur vollen Einlage ergänzt werden. Die Ergänzung der Theileinlage geschieht außerdem durch die derselben zufallenden Renten.

Eintrittsgeld.

157. Gewöhnlich wird, als Beitrag zu den Verwaltungskosten, ein für allemal ein Eintrittsgeld entrichtet, z. B. in der badischen Anstalt 1 fl., in der Darmstädter Anstalt ½ fl., in der sächsischen Anstalt ⅓ Thlr. ꝛc.

Normalzinsfuß.

158. Der Normalzinsfuß, d. h. der Zinsfuß der Anstalt für Rentenberechnungen, muß den bestehenden Verhältnissen angemessen seyn. In der badischen, bayerischen, Darmstädter und

Berliner Anstalt ist derselbe 4, in der sächsischen 3½ ꝛc. Der Normalzinsfuß wird übrigens mit dem Vorbehalt angesetzt, daß er geändert werden dürfe, wenn außerordentliche Umstände eine solche Aenderung erheischen. *)

Rentengutschrift. 159. Renten theilweiser Einlagen werden, so lange letztere nicht auf die volle Einlage ergänzt sind, nicht baar ausbezahlt, sondern dem Einleger gutgeschrieben (Rentengutschrift).

---

*) Weil in Folge der Erbvereinigung die jüngern Altersklassen Vortheile vor den ältern Klassen haben, so hat man, um eine Ausgleichung in dieser Beziehung herbeizuführen, in den ältern Rentenanstalten für jede Altersklasse eine besondere ursprüngliche Rente angesetzt; so z. B. in der Wiener (nicht auf Gegenseitigkeit, sondern durch Unternehmer gegründeten) Rentenanstalt. Hier giebt es sieben Klassen für die Altersabstufungen 0 — 10, 10 — 20, 20 — 35, 35 — 50, 50—60, 60—65 und 65 u. m. J., und es geschieht die Verzinsung für die

1te	Klasse	zu 4	Procent
2te	„	„ 4¼	„
3te	„	„ 4½	„
4te	„	„ 4¾	„
5te	„	„ 5½	„
6te	„	„ 6	„
7te	„	„ 6½	„

wonach die Interessen der Einlagen von 200 fl. für die

1te	Klasse	8 fl.	— kr.
2te	„	8 „	30 „
3te	„	9 „	— „
4te	„	9 „	30 „
5te	„	11 „	— „
6te	„	12 „	— „
7te	„	13 „	— „

anstatt durchgängig 10 fl., dem Normalzinsfuß zufolge, betragen.

Zur Vereinfachung der Verrechnung hat man aber für jede Klasse ein Kapital angesetzt, dessen 5-procentiger Zins der Rente der entsprechenden Klasse gleichsteht. Zur Bestimmung dieser Werthe hat man also in Beziehung auf die Renten von 8 fl., 8½ fl., 9 fl. ꝛc. ꝛc. der 1ten, 2ten, 3ten Klasse ꝛc. ꝛc. berechnet, wie groß die Kapitalien sind, welche zum Normalzinsfuß 5 einen Zins von beziehlich 8 fl., 8½ fl. ꝛc. abwerfen.

Die entsprechenden Kapitalien, welche man Rentenkapitalien nennt, sind für die

$$\text{1te Klasse} = \frac{8 \times 100}{5} = 160$$

$$\text{2te „} = \frac{8\frac{1}{2} \times 100}{5} = 170$$

Die gutgeschriebenen Renten werden selbst wieder als Kapital betrachtet, und werfen daher ebenfalls Renten ab.

160. In mehreren Rentenanstalten werfen die vollen Einlagen, die Theileinlagen und Nachzahlungen für das Jahr in welchem sie eingezahlt wurden, so wie für das nächstfolgende oder für die zwei nächstfolgenden Jahre keine Rente ab; was auch von den gutzuschreibenden Renten der Theilrenten gilt. Erstmalige Rentenzahlung.

$$\text{3te } \text{“} = \frac{9 \times 100}{5} = 180$$

$$\text{4te } \text{“} = \frac{9\frac{1}{2} \times 100}{5} = 190$$

$$\text{5te } \text{“} = \frac{11 \times 100}{5} = 220$$

$$\text{6te } \text{“} = \frac{12 \times 100}{5} = 240$$

$$\text{7te } \text{“} = \frac{13 \times 100}{5} = 260$$

Die Summe der Rentenkapitalien der Mitglieder einer Altersklasse bildet das Gesammtrentenkapital dieser Klasse, und die Summe der Rentenkapitalien einer Jahresgesellschaft ist das Gesammtrentenkapital dieser Jahresgesellschaft. Der Gesammtheit der Mitglieder der Jahresgesellschaft kommen die Zinsen des Gesammtrentenkapitals zum Normalzinsfuß 5 zu; weil aber einem Mitgliede der 1ten Klasse die Einlage von 200 fl. in Betreff der Verzinsung nur zu 160 fl., einem Mitgliede der 2ten Klasse die Einlage von 200 fl. in Betreff der Verzinsung nur 160 fl. ꝛc. angerechnet wird, so stellt sich der Zinsfuß der 1ten Klasse auf 4, der für die 2te Klasse auf $4\frac{1}{4}$ u. s. w.

Das Verhältniß der Zunahme des Zinsfußes von Klasse zu Klasse ist aber nicht mathematisch begründet, sondern willkührlich angenommen. Gesetzt aber auch, daß die ursprünglichen Renten nach richtigen Principien angesetzt wären, so wird die beabsichtigte Ausgleichung doch nur für eine gewisse Normalstärke der einzelnen Altersklassen statt finden; weil aber die Einlage-Verhältnisse sehr wandelbar sind, so hat das System der verschiedenen ursprünglichen Renten durchaus keinen sichern Grund und Boden. Eine solche Einrichtung ist ferner aus dem Grunde unpraktisch, weil in den jüngern Klassen sehr häufig Theileinlagen und in den ältern Klassen in der Regel nur volle Einlagen vorkommen, und der Unterschied zwischen der Rente der jüngern Klasse und dem Normalzinsfuße die Mittel zur Verzinsung der Einlagen der ältern Klassen nach einem höhern Zinsfuße liefern muß, weßhalb es geschehen kann, daß die Anstalt im Anfang die zur Auszahlung der Zinsen erforderlichen Mittel nicht besitzt, namentlich in dem Falle, wenn in Folge einer den gewöhnlichen Zinsfuß übersteigenden ursprünglichen Rente, die älteste Klasse unverhältnißmäßig stark besetzt ist.

Die Zinſen, welche die Einlagen in dieſer Zwiſchenzeit abwerfen, haben den Zweck, zur Beſtreitung der Verwaltungskoſten der Anſtalt beizutragen.

Einlagekapital. 161. Die Summe der den Mitgliedern einer Altersklaſſe angehörenden urſprünglich vollen und theilweiſen Einlagen, ſo wie zur Ergänzung der letztern vollzogenen Nachzahlungen und Rentengutſchriften bildet das Einlagekapital dieſer Altersklaſſe.

Rentenkapital. 162. Ein gewiſſer Theil des Einlagekapitals wird unter der Benennung Rentenkapital als Stammvermögen der betreffenden Altersklaſſe ausgeſetzt, und der Reſt fällt dem Reſervefonds zu. Z. B. in der badiſchen Rentenanſtalt beträgt das Rentenkapital $\frac{7}{8}$, in der ſächſiſchen und Darmſtädter Anſtalt $\frac{9}{10}$ des Einlagekapitals. *)

Zinsrente. 163. Jeder Altersklaſſe wird die aus ihren Einlagen abfließende Rente nach dem Betrag ihres Rentenkapitals von der Anſtalt jährlich zugetheilt. Wird $\frac{1}{n}$ der Einlage für den Re-

*) Es verſteht ſich von ſelbſt, daß die Nachzahlungen und Rentengutſchriften in demſelben Verhältniß wie die vollen Einlagen und Theileinlagen zum Reſervefonds beitragen müſſen. In der Wiener und Stuttgarter Anſtalt, welch' letztere ebenfalls durch Unternehmer gegründet iſt, geſchieht dieß nicht, ſondern es wird nur aus den vollen Einlagen und Theileinlagen das Rentenkapital gebildet, während die Nachzahlungen und Rentengutſchriften in ihrem vollen Betrage dem Rentenkapital zugeſchlagen werden.

Wenn z. B. der Beitrag der Einlage zum Reſervefonds $\frac{1}{8}$ beträgt, ſo wird, wenn eine Einlage von 16 fl. gemacht wird, dem Einleger dafür der Betrag von $\frac{7}{8} \times 16 = 14$ fl. gutgeſchrieben. Wird nun im folgenden Jahre durch eine Nachzahlung von $100 - 16 = 84$ fl. die Theileinlage auf eine volle von 100 fl. ergänzt, ſo iſt, weil die Nachzahlung in ihrem vollen Betrage angeſchrieben wird, das Rentenkapital $= 84 + 14 = 98$ fl.; letzteres wäre hingegen nur $\frac{7}{8} \times 100 = 87\frac{1}{2}$ fl., wenn gleich Anfangs eine volle Einlage gemacht worden wäre. Hierdurch wird für Diejenigen, welche Theileinlagen machen und ſolche ſpäter ergänzen, der Zinsfuß in den jüngern Klaſſen heraufgetrieben und dagegen in den ältern Klaſſen, in welchen wegen der größern urſprünglichen Rente (§. 158, Note) das Rentenkapital größer als das Einlagekapital iſt, heruntergedrückt, weßhalb in dieſen Anſtalten die Theileinlagen in den jüngern Klaſſen vorherrſchend ſind. Ein ſolches Verfahren würde daher einer auf Gegenſeitigkeit gegründeten Anſtalt zum großen Nachtheil gereichen.

servefonds vorbehalten, wonach der Einlage 1 das Rentenkapital $\frac{n-1}{n}$ entspricht, und ist der Normalzinsfuß $= p$, so wird die Einlage zum Zinsfuß $\frac{p\,(n-1)}{n}$ verzinst. Die anfängliche Zinsrente erhöht sich allmählich durch den zum Normalzinsfuß berechneten Zins des Rentenkapitals der abgegangenen Mitglieder.

164. Kommen bei der Repartition der Renten Brüche heraus, deren Werth nicht wohl in Geld erstattet werden kann, wie z. B. Kreuzerbrüche, so wird die Rente nur in Gulden und vollen Kreuzern angesetzt, und über die Summe der nicht ausgezahlten Kreuzerbrüche kann sonach anderweitig verfügt werden. Bruchkreuzerfonds.

165. In allen, dermalen bestehenden, Rentenanstalten, mit Ausnahme der Hannöverschen, wird beim Abgange eines Mitgliedes durch Ableben demselben; beziehungsweise seinen Erben, die Summe seiner baaren Einlagen und Nachzahlungen zurückvergütet, jedoch die Summe aller bis dahin auf seine Einlagen baar ausgezahlten Renten in Abzug gebracht, und zwar aus dem Grunde, weil Viele sich bei diesen Anstalten nicht betheiligen würden, wenn sie zu befürchten hätten, daß ihre Einlage für ihre Erben selbst dann verloren sey, wenn sie schon in der ersten Zeit ihres Eintritts mit Tode abgehen sollten. Rückvergütung beim Abgang eines Mitgliedes.

In Folge dieses Systems der Rückzahlung steigt die Rente, namentlich in den jüngern Altersklassen, weil langsamer, als wenn selbst im Falle eines frühern Ausscheidens der Mitglieder die Einlagen der Anstalt für immer verblieben, denn außerdem müssen die Einlagen natürlicher Weise unwiderruflich seyn, d. h. es dürfen die bei der Anstalt einmal gemachten Einlagen und Ergänzungen unter keiner Bedingung, Auswanderungsfälle abgerechnet, zurückgefordert werden.

Nimmt man, um die Folgen der Rückzahlung beispielsweise zu ermessen an, daß die Anzahl der Mitglieder der jüngsten Klasse für die Altersabstufung von 0 bis 5 Jahre $= 37979$ und die Einlage $= 100$ fl. ist, so stellt sich für den Zinsfuß 4 und nach der XXIten Sterblichkeitstabelle heraus, daß beiläufig im 20ten Jahre die noch lebenden Mitglieder ungefähr 100 fl. an Renten bezogen haben, und daher von dieser Zeit an die Rückzahlungen aufhören.

Die Rentenanstalten weichen in dem Verhältniß, in welchem die Rückvergütung oder die sogenannte Abfertigung, theils aus dem Rentenkapital und theils aus dem Reservefonds gewährt wird, von einander ab. Nach den Statuten der badischen Anstalt z. B. ruht auf dem Reservefonds die Verbindlichkeit zu den Abfertigungen in dem Verhältniß beizutragen, nach welchem ihm früher ein Theil der Einlagen zugeflossen ist.

Jeder Abgang eines Mitgliedes muß übrigens in Beziehung auf die Verrechnung in der Anstalt so angesehen werden, als wäre derselbe am Schlusse des Jahres erfolgt.

Gewöhnlich wird auch beim Abgang eines Mitgliedes dessen Rechtsnachfolgern noch der volle Betrag der aus dem Abgangsjahre auf seine Einlage fallenden Jahresrente gewährt, gleichviel ob das betreffende Mitglied bereits mehr als den Betrag seiner Einlagen aus der Anstalt bezogen hat oder nicht.

Gleichstellung zwischen den Theileinlagen und den vollen Einlagen.

166. Weil die Rentenerhöhung auf der Erbvereinigung der Mitglieder der Anstalt beruht, so kann der spätere Zutritt weiterer Mitglieder nicht gestattet werden. Die Renten vertheilen sich aber nicht auf die Anzahl der Mitglieder, sondern auf die Einlagen, weil sie von verschiedenem Betrage seyn können. Wenn nun die Mitglieder die Befugniß haben, später ihre Einlagen zu vergrößern, und wenn sie mit diesen Einlagevermehrungen an dem Gewinne Theil nehmen dürfen, welcher lediglich durch die ursprünglichen Einlagen entstanden ist, so läuft dies, zum Nachtheil derjenigen Mitglieder, welche ihre Einlagen nicht vermehren, auf dasselbe hinaus, als wenn die Jahresgesellschaft nicht abgeschlossen wäre.

Nehmen wir z. B. an, daß eine

volle Einlage von 100 fl.
und eine Theileinlage von 10 „

mit ihrer Gesammteinlage von 110 fl.

einen Gewinn von 22 fl. gemacht haben. Hiernach beträgt der Gewinn für die volle Einlage 20 fl., und für die Theileinlage 2 fl. Wenn nun die Theileinlage den rechten Zeitpunkt zur Ergänzung abgewartet hat und sich plötzlich ergänzt, so beträgt das Einlagekapital 200 fl. und auf jede Einlage kommen 11 fl. Die volle Einlage, durch welche der Gewinn größtentheils herbeigeführt worden ist, erhält jetzt 9 fl. weniger als wenn

die Einlagevermehrung nicht stattgefunden hätte, und die Theileinlage, welche nur mit $^1/_{10}$ ihres Kapitals zur Erlangung des Gewinnes mitgewirkt hat, erhält ebenfalls 11 fl.

Weil aber Theileinlagen gestattet sind, und folglich auch Nachzahlungen erlaubt seyn müssen, so kommt es nur darauf an, in Beziehung auf letztere gewisse Bedingungen oder Einschränkungen, durch welche die Rechte der vollen Einlagen in Schutz genommen worden, eintreten zu lassen.

In den bestehenden Rentenanstalten wird dieser Gegenstand verschiedentlich behandelt. In der badischen Anstalt z. B. wird Denjenigen, welche Nachzahlungen machen, die Verpflichtung auferlegt, sich in den Fonds, welcher dem jeweiligen Stand der Rente entspricht einzukaufen, wenn letztere von einer vollen Einlage von 200 fl. mehr als 8 fl., als Zins derselben zum Normalzinsfuß 4, beträgt.

Ist z. B. die Einlage = 100, der Betrag zum Reservefonds. $= \frac{1}{10}$ der Einlage, und der Normalzinsfuß = 4, so wird die Einlage zu 3,6 Procent verzinst. Ist nun in der jüngsten Altersklasse die Rente auf 6 fl. gestiegen, soll ferner eine Theileinlage von 80 fl. ergänzt werden, so muß der Einleger, wenn die übrigen Mitglieder der Klasse nicht verkürzt werden sollen, und nach dem in den badischen Statuten angenommenen Verfahren, so viel mehr als 100 — 80 zahlen, als aus nachstehender Berechnung folgt.

Die Erhöhung über die ursprüngliche Rente von 3,6 beträgt 6 — 3,6 = 2,4. Weil aber das Rentenkapital und das bis dahin von der Klasse oder Jahresgesellschaft errungene Kapital zu 4 Procent verzinst wird, so entspricht der Rentenerhöhung im Betrage von 2,4 ein errungenes Kapital von $\frac{2{,}4 \times 100}{4}$ = 60. Wenn also der Einlage 100 das Kapital 60 entspricht, so entspricht der Einlage 20 (als Ergänzung von 80 zu einer vollen Einlage) das Kapital $\frac{20 \times 60}{100} = 12$. Der Einleger muß demnach 20 + 12 = 32 fl. zahlen. Er erhält nun

von 80 fl.	früherer Einlage	zu 6 Procent	4,80 fl.
„ 20 „	Nachzahlung	zu 3,6 „	0,72 „
„ 12 „	Zuschuß zum errungenen Kapital	zu 4 Procent. . . .	0,48 „
Einlage=112 fl.			Rente = 6 fl.

Aus obiger Darstellung folgt, daß der zu leistende Zuschuß, das sogenannte Aufgeld, der 25-fache Betrag der Rentenerhöhung ist.

Es ist daher bei einer Rentenerhöhung von

1 fl. das Aufgeld = 25 fl.
2 " " " = 50 ".
3 " " " = 75 "

u. s. w. für eine Nachzahlung von 100 fl.

Oder es ist bei einer Rentenerhöhung von

1 kr. das Aufgeld = $\frac{1}{4}$ kr.
2 " " " = $\frac{2}{4}$ "
3 " " " = $\frac{3}{4}$ "

u. s. w. für eine Nachzahlung von 1 fl.

Von Nachzahlungen, für welche das Aufgeld nicht gleichzeitig ebenfalls baar entrichtet wird, so wie von gutgeschriebenen Theilrenten ist das Aufgeld durch Abzug zu erheben, und es wird alsdann nur der übrig bleibende Theil derselben dem Kapital der Theileinlage zugeschrieben. Es versteht sich übrigens von selbst, daß das Aufgeld in den Kapitalfonds derjenigen Altersklasse fällt, welcher die zuzuschreibende Nachzahlung oder Theilrente angehört.

Nach den Statuten der badischen Rentenanstalt wird aber kein Aufgeld entrichtet, wenn die Rente weniger als 8 fl. beträgt. Weil wegen des langsamen Steigens der Rente, je nach der Altersklasse, erst nach einer mehr oder weniger langen Reihe von Jahren die Rente den Normalzinsfuß erreicht, so haben die Theileinlagen sehr ausgedehnte Fristen, binnen welcher sie sich, ohne Aufgeld zu entrichten, ergänzen können. Die Schwankungen, welche die Rente während dieser Zwischenzeit in Folge der ohne Aufgeld entrichteten Nachzahlungen machen kann, sind nicht bedeutend, und allenfallsige Rentenrückschläge können erforderlichen Falls aus dem Reservefonds ergänzt werden.

Einen bessern Weg zur Gleichstellung zwischen den Theileinlagen und den vollen Einlagen hat die Darmstädter Rentenanstalt eingeschlagen. Hier werden nämlich nicht die Zinsen der Rentenkapitalien jeder Altersklasse nach Verhältniß der Ein-

lagenbeträge unter die noch lebenden Mitglieder vertheilt, sondern es kommt der beim Abgang eines Mitgliedes nach Abzug der Rückvergütung (§. 165) verbleibende Rest seines Rentenkapitals den überlebenden Mitgliedern der betreffenden Altersklasse nach Verhältniß der ihnen bereits zustehenden Rentenkapitale zu gut. So lange nämlich das jüngste, in einer Altersklasse zulässig gewesene Mitglied das 51te Lebensjahr (nach dessen Ablauf die Betheiligung bei der Kapitalauflösung beginnt) noch nicht vollendet hat, geschieht die Vertheilung der jeweiligen Erbanfälle dergestalt, daß die Antheile der einzelnen Mitglieder am Schlusse des Anfalljahres den ihnen bereits zustehenden Rentenkapitalien zugeschrieben und dadurch der Maaßstab für die weitere Vertheilung der Klassenrente festgestellt wird. Außerdem werden die den Theileinlagen zufließenden Ergänzungsbeträge (baare Nachzahlungen und Rentengutschrift) ebenfalls dem Abzug für den Reservefonds unterworfen, und es werden baare Nachzahlungen nicht mehr zugelassen, wenn der Inhaber einer Theileinlage das 45te Lebensjahr vollendet hat, und, in Folge anderweitiger Anordnung an dieser Anstalt, in den Genuß der aus den Ueberschüssen des Reservefonds gebildeten Zeitrente eintritt, weil diese eine von den Zinsen der Rentenkapitalien unabhängige Rente ist. Diese Einrichtung hat nun die Folge, daß die den Theileinlagen späterhin zugefügt werdenden Ergänzungsbeträge Anfangs keine höhere Rente abwerfen, als die ursprünglich geschehenen Einlagen, indem hiernach jede Einlage genau diejenige Rente erhält, welche nach Maaßgabe des Normalzinsfußes ihrem in dem Rentenfonds befindlichen Kapitalantheil entspricht.

Maximum der Theileinlagen.

167. Die geringste Höhe der Theileinlagen (§. 154) wird unterschiedlich angesetzt; sie beträgt z. B. in der Wiener Rentenanstalt $\frac{1}{20}$, in der Berliner $\frac{1}{10}$, in der Sächsischen $\frac{1}{5}$ (und nur ausnahmsweise auch $\frac{1}{10}$), in der Bayerischen $\frac{1}{4}$ der vollen Einlage für die jüngste Altersklasse; in den höhern Altersklassen ist das Minimum mehrentheils etwas höher als in der jüngsten. Dieses Minimum darf aber nicht willkürlich bestimmt werden. Der Natur der Sache nach kann man bei der Bestimmung der geringsten Einlage davon ausgehen, daß sie bei dem

Eintritt in das unterstützungsbedürftige Alter, in welchem die Vertheilung der Fonds der Anstalt ihren Anfang nimmt, durch Rentengutschriften (§. 159) zu einer vollständigen Einlage angewachsen seyn müsse. In Uebereinstimmung mit diesem Grundsatze scheinen die Bestimmungen der Sächsischen Rentenanstalt hierüber zu seyn, nach welchen die geringsten Theileinlagen in der

1ten	Klasse	auf	20	Rthlr.
2ten	"	"	25	"
3ten	"	"	30	"
4ten	"	"	35	"
5ten	"	"	40	"
6ten	"	"	45	"
7ten	"	"	50	"
8ten	"	"	60	"

angesetzt und nur ausnahmsweise auch Einlagen von 10 Thlr. in den drei jüngsten Klassen gestattet sind. In den drei ältesten Klassen dürfen keine Theileinlagen gemacht werden.

Reservefonds. 168. Gewisse Einnahmen oder Theile von Einnahmen der Anstalt fließen in den Reservefonds, welcher, als solcher, die Verbindlichkeit hat, zu etwaigen Verlusten der Vermögensverwaltung beizutragen und etwaige Rentenrückschläge zu decken. Zu jenen Einnahmen gehören die bei der Bildung der Rentenkapitalien von den Einlagen und Nachzahlungen gemachten Abzüge, und alle Vermögenstheile oder Zuflüsse zum Vermögen der Anstalt, welche weder die Bestimmung haben, als Rente ausbezahlt zu werden, noch als Kapitaltheil dem Rentenkapital zugeschieden, oder der Verwaltung zugewiesen sind. In den meisten Rentenanstalten hält man sich aber nicht so streng an die eigentliche Bedeutung des Reservefonds, sondern es werden demselben noch andere Einnahmen und Functionen zugewiesen, was in der Veränderlichkeit der Größe des Verwaltungsaufwands und in den verschiedenen Systemen der Rentenvertheilung und Kapitalauflösung seinen Grund hat, und außerdem auch zur Vereinfachung der Verrechnung geschieht. Zu den Einnahmen des Reservefonds rechnet man daher gewöhnlich außer den vorhin aufgezählten, auch noch die Eintrittsgelder (§. 157), den Mehrertrag der Zinsen über den Normalzinsfuß von den Rentenkapitalien, wenn nämlich die

Kapitalien der Anstalt zu einem höhern Zinsfuß als dem Normalzinsfuß angelegt worden sind, ferner den Bruchkreuzerfonds (§. 164), den etwaigen Gewinn beim Umsatz von Staatspapieren, den Antheil an den etwaigen Vermögensresten erloschener Jahresgesellschaften ꝛc.

Dagegen hat der Reservefonds außer der Verbindlichkeit zu etwaigen Verlusten der Vermögensverwaltung beizutragen, auch die, seinen Antheil zu den Abfertigungen (§. 165) beim Abgang von Mitgliedern zu leisten, und zu den Verwaltungskosten nöthigenfalls beizutragen.

Verwaltungsfonds.

169. In den Verwaltungsfonds, welcher zur Bestreitung der Ausgaben für die Errichtung und Gesammtverwaltung der Anstalt dient, fließen die Eintrittsgelder, die Zinsen von den noch nicht zum Rentenbezug berechtigten Einlagen (§. 160), die Zinsen-Ueberschüsse (wenn solche nicht in den Reservefonds fließen (§. 168) und der Ertrag aus etwaigen Nebenanstalten (§. 173). Reichen diese und andere, dem Verwaltungsfonds zugewiesenen Einnahmen zur Bestreitung der Verwaltungskosten nicht hin, so wird das Fehlende aus dem Reservefonds genommen.

Wird von der Summe, welche nach dem jährlichen Rechnungsabschluß übrig bleibt, der Betrag der Verwaltungskosten für das nächste Jahr nach einem Voranschlag abgezogen, so kann über den Rest anderweitig verfügt werden.

Vertheilung der Verwaltungsüberschüsse.

170. Die Verwaltungsüberschüsse (§. 169) sind begreiflicherweise gemeinschaftliches Eigenthum sämmtlicher Jahresgesellschaften der Anstalt, und sie sind daher unter die Jahresgesellschaften nach Verhältniß ihrer Rentenkapitalien zu vertheilen. Der Antheil an diesen Zuflüssen kann theils dem Reservefonds der Jahresgesellschaft zugewiesen und theils zur Rentenaufbesserung benutzt, oder aber ausschließlich auf die eine oder andere Art verwendet werden.

Ueberschüsse des Reservefonds.

171. Zur Deckung der dem Reservefonds obliegenden Verbindlichkeiten kann ein gewisser Procentsatz des jeweiligen Gesammt-Rentenkapitals jeder Jahresgesellschaft als Sicherheitsfonds im Bestande des Reservefonds betrachtet, und die Ueberschüsse des letztern über den festgesetzten Procentsatz hinaus können unter Zurechnung ihres Zinses zur Erhöhung der Renten verwendet werden.

Jahresrente und Rentenmaximum.

172. Die Jahresrente, besteht aus der Zinsrente, aus den Antheilen der Mitglieder an den sonstigen Ertragnissen der Rentenanstalt und an den Erbanfällen. Die jährliche Auszahlung der beiden letztern Bestandttheile der Jahresrente hat mit dem Anfang des unterstützungsbedürftigen Alters (das 50te bis 55te Lebensjahr) zu beginnen, und es wird, aus dem im §. 149 angeführten Grunde, dem Anwachsen der Rente eine Grenze gesetzt. Der Betrag, welchen die Jahresrente nicht überschreiten darf, ist das Rentenmaximum.

Die einzelnen Bestandtheile der Jahresrente und das Gesetz der periodischen Zunahme derselben hängen, unter übrigens gleichen Umständen, vom System der Kapitalauflösung, von der Behandlung des Reservefonds und der Art der Vertheilung aller Nebenertragnisse ab, und es bieten hierin die dermalen bestehenden Rentenanstalten wesentliche Verschiedenheiten dar.

In der sächsischen Rentenanstalt z. B. treten mit Anfang desjenigen Jahres, in welchem die jüngsten in einer Altersklasse zulässig gewesenen Personen das 55te Jahr erreichen müßten, sämmtliche, zu diesem Zeitpunkte noch lebende Theilhaber dieser Altersklasse in die Erbklasse ihrer Jahresgesellschaft ein. Bei dem Uebertritt einer Altersklasse in die Erbklasse und demgemäß erfolgender Ueberweisung des zu dieser Zeit bestehenden gesammten Rentenkapitals der übergehenden Altersklasse wird der auf jeden mit übergehenden Theilnehmer dieser Klasse nach Verhältniß seiner Einlagenbeträge fallende Antheil besonders in seinem Conto notirt, und es bezieht jedes Mitglied der Erbklasse zunächst die, auf diesen seinen inferirten Kapitalantheil ausfallende Quote der vom Centralfonds zu leistenden $3^1/_3$ Procent Zinsrente. Diesen inferirten Rentenkapitalsantheilen wachsen alsdann die ererbten zu. Kommt nämlich ein Mitglied aus der Erbklasse in Abgang, so bildet der, seinen Conto überhaupt zugeschriebene Antheil am Rentenkapitale, nach Abzug der etwaigen Abfertigung, den Gegenstand der Vererbung, an welcher sämmtliche Mitglieder der Erbklasse, welche mit Schluß desjenigen Jahres, worin der Abgang eintritt, noch ferner zur Rentenerhebung überhaupt berechtigt bleiben, nach Verhältniß ihrer in die Erbklasse inferirten Rentenkapitalsantheile partiepiren. Die Vererbung geschieht auf zweierlei Weise. Es werden nämlich von dem vererbfällten Rentenkapitalantheile

a) zwei Dritttheile von der Gesammtsumme des Rentenkapitals der Erbklasse abgeschrieben und im Centralfonds aus dem Rentenkapitalfonds in den Leibrentenfonds überwiesen, wogegen Letzterer einem jeden Theilnehmer der Erbklasse, anstatt der von jenen zwei Dritttheilen auf ihn zu vertheilen gewesenen Kapitalquote, eine entsprechende Leibrente nach Maaßgabe des im §. 149 enthaltenen Tarifs gewährt;

b) ein Drittheil wird von dem Rentenkapitalfonds herausgezahlt und baar vertheilt, und nebst den Jahresrenten für das auf den Erbantheil folgende Jahr ausgezahlt. Sobald die Summe der einer Einlage der Erbklasse zukommenden Jahresrente an Zins- oder Leibrente 150 Thlr. erreicht hat, so werden der Ueberschuß oder die weitern Anfälle an Renten und Rentenkapitalantheilen nicht weiter zugeschrieben, sondern mit auf die zu diesem Rentenmaximum noch nicht gelangten Einlagen der Erbklasse zur Vertheilung gebracht. Die Zins- und Leibrentenantheile der Theileinlagen werden den Einlegern nicht ausgezahlt, sondern denselben als Theilrente mit dem Jahresabschluß des betreffenden Rechnungsjahres auf Conto gutgeschrieben. Wird durch die letzte Gutschrift der Contobetrag der betreffenden Theileinlage noch über 100 Thlr. hinaus (dem Betrage der vollen Einlage) erhöht, so erhält der Inhaber den Ueberschuß baar ausgezahlt.

Desgleichen bleiben die das Rentenmaximum (von 150 Thlr.) beziehenden Einlagen von der Theilnahme an der sub b. erwähnten Kapitalvertheilung ausgeschlossen. Wird ferner bei Einlagen, welche das Rentenmaximum noch nicht beziehen, durch Zurechnung des auf sie fallenden Antheils dieser Kapitalvertheilung zu ihren Zins- und Leibrenten der Betrag von 150 Thlr. in einem Jahre überstiegen, so wird denselben der Ueberschuß ebenfalls nicht verabreicht, sondern im folgenden Jahre mit zur Erbkapitalvertheilung gebracht. — Wenn der Fall eintritt, daß alle Mitglieder einer Altersklasse vor dem Uebertritt in die Erbklasse bereits zum Bezug des Rentenmaximums gelangt sind, so wird der zur Rentenleistung für selbige nicht weiter erforderliche, mithin hierdurch zur Disposition kommende Theil des Rentenkapitals dieser Altersklasse auf die Erbklasse vererbt. Endlich, wenn alle Mitglieder der Erbklasse aussterben, oder bereits in den Genuß der höchsten Rente ge-

treten sind, so fällt der hierdurch disponibel werdende Theil des Rentenkapitals oder des Zuwachses der Erbklasse

a) wenn noch Mitglieder der nämlichen Jahresgesellschaft in einzelnen Altersklassen existiren sollten, auf die älteste unter diesen Altersklassen, und soweit deren Mitglieder hiernach oder sonst bereits das Rentenmaximum beziehen, auf die folgende und so fort;

b) wenn in den einzelnen Altersklassen keine Mitglieder mehr vorhanden, oder alle schon im Genuße der höchsten Rente seyn sollten, auf die Erbklassen der zehn ältesten noch activen Jahresgesellschaften nach gleichen Theilen.

Die Auflösung des Kapitals der Jahresgesellschaften müßte eigentlich in der Art erfolgen, daß zu der Zeit nichts mehr vom Kapital übrig bleibt, in welcher das letzte Mitglied derselben mit Tod abgeht. Nach der Auflösungsart der sächsischen Rentenanstalt wird aber bei dem gänzlichen Aussterben der Jahresgesellschaft derjenige Theil des Rentenkapitals als nicht aufgelöst noch vorhanden seyn, welcher den zuletzt verstorbenen Mitgliedern beim Eintritt in die Erbklasse zugehört hat; und wenn alle Mitglieder der Jahresgesellschaft schon im Besitz der höchsten Rente sind, so bleibt auch das nicht zu vererbende Kapital, als nicht aufgelöst, übrig.

Sämmtliche Jahresgesellschaften der Rentenanstalt haben einen gemeinschaftlichen Reservefonds. Die Ueberschüsse desselben sollen zur Aufbesserung der Renten verwendet werden, und zwar nach Gutdünken der Direktion. Dies soll aber nicht früher geschehen, als insofern der Reservefonds mit dem betreffenden Jahresschluß nach Abzug aller ihm obliegenden Ausgaben wenigstens 10 Procent von der Summe der activen Rentenkapitale beträgt. Sodann nehmen an den zur Vertheilung zu bringenden Ueberschüssen nur diejenigen Jahresgesellschaften Theil, welche volle drei Jahre bestanden haben, diese aber nach Verhältniß des Gesammtbetrags der Einlegekapitale einer jeden. Der hierdurch für jede Jahresgesellschaft ausfallende Antheil wird halb der Erbklasse und halb den sämmtlichen noch activen Altersklassen zugewiesen, welche nach Verhältniß ihrer Einlagekapitale daran participiren. Die dadurch auf die einzelnen Mitglieder ausfallenden Raten werden ihren Jahresrenten zugeschlagen. Sofern endlich bei den in besonderer Rechnung zu haltenden Leib-

rentenfonds ein zur Sicherstellung der schuldigen Leibrenten entbehrlicher Ueberfluß sich bilden sollte, so kann dieser nach dem Ermessen der Direktion an den Reservefonds abgegeben werden.

Es bedarf wohl keiner ausführlichen Nachweisung, daß obige, den Reservefonds betreffenden Anordnungen großer Verbesserungen bedürfen; sehr verfehlt ist besonders die Einführung eines allgemeinen Reservefonds, wenigstens in der Art und Weise, wie solcher seine Ueberschüsse an die einzelnen Jahresgesellschaften der Anstalt austheilen soll.

Die Einnahmen und Ausgaben des Reservefonds einer Rentenanstalt sind zum Theil solche, welche die ganze Anstalt betreffen, und theils solche, welche die einzelnen Jahresgesellschaften speciell angehen. Am geeignetsten ist es daher, letztere Einnahmen und Ausgaben für jede Jahresgesellschaft besonders festzustellen und derselben als Specialreservefonds zu überweisen, und dagegen die Differenz derjenigen Einnahmen und Ausgaben, welche die gesammte Anzahl betreffen, auf die Specialreservefonds der Jahresgesellschaften zu repartiren; mithin die Ueberschüsse dem Specialreservefonds zuzuschreiben, und eine Mehrausgabe von demselben abzuschreiben. *)

Nach den Statuten der im Jahr 1844 errichteten Darmstädter Rentenanstalt hat jede Jahresgesellschaft ihren besondern Reservefonds, welchem folgende Einnahmen zufließen: ein Zehntel der Einlagenbeträge, der Antheil der Jahresgesellschaft an den Verwaltungsüberschüssen, verjährte Renten und Guthaben abgegangenener Mitglieder derselben Jahresgesellschaft, **) der etwaige Ueberschuß des Leibrentenfonds, Antheil an den etwaigen Vermögensresten erloschener Jahresgesellschaften, und überhaupt alle Vermögenstheile der Jahresgesellschaft, welche weder zur

*) Ausführliche, durch Beispiele erläuterte Vorschläge zur Einführung derartiger Anordnungen giebt J. F. Becker in seiner Schrift. „Über eine zweckmäßigere Einrichtung der Rentenanstalten" (Berlin, 1844).

**) Jede baar zu erhebende Jahresrente ist verjährt und fällt, nach den Bestimmungen aller Rentenanstalten, der betreffenden Jahresgesellschaft anheim, wenn solche nicht binnen einer festgesetzten Frist (nach den Statuten der Darmstädter Rentenanstalt binnen 4 Jahren) nach deren Fälligkeit in Empfang genommen worden ist. Dasselbe gilt von den binnen einer gewissen Zeit nicht erhobenen Abfertigungen.

Bildung der Rentenkapitale oder des Leibrentenfonds, noch zur Auszahlung der Jahresrenten oder zur Bestreitung der Verwaltungskosten bestimmt sind. Dagegen hat dieser Fonds die Verbindlichkeit: ein Zehntel zu den Abfertigungen beim Abgange von Mitgliedern zu leisten, so wie nöthigenfalls zur Bestreitung der Verwaltungskosten und zur Deckung etwaiger Verluste und Ausfälle jeder Art beizutragen. Der hiernach verbleibende Ueberschuß dient zur Erhöhung der Jahresrenten. Zur Deckung der dem Reservefonds jeder Jahresgesellschaft obliegenden Verbindlichkeiten werden 5 Procent des jeweiligen Rentenkapitals der Jahresgesellschaft als Sicherheitsfonds im Bestande des Reservefonds betrachtet, und die Ueberschüsse des letztern über diesen Procentsatz hinaus unter Zurechnung ihres 4-procentigen Zinses periodisch in Zeitrente aufgelöst. Die Auflösung beginnt mit dem Anfange der 6ten Gesellschaftsjahres, und wird, was die weiteren Ueberschüsse betrifft, von 5 zu 5 Jahren fortgesetzt. Bei der spätern Berechnung der Zeitrente ist diese so zu bestimmen, daß der ganze Reservefonds einschließlich seines als Sicherheitsfonds geltenden Theiles mit dem Erlöschen der Jahresgellschaft, wo möglich, ganz aufgezehrt ist. Der jedesmalige Jahresbetrag der Zeitrente einer Jahresgesellschaft wird unter diejenigen Altersklassen vertheilt, deren jüngstes, darin zuläßig gewesenes Mitglied im Jahre der Vertheilung das 46te Lebensjahr vollenden müßte, so daß nach und nach sämmtliche Altersklassen an dieser Rente Theil nehmen. Die Vertheilung der Zeitrente unter die einzelnen Altersklassen geschieht alljährlich im Verhältniß zu der Anzahl der noch rentenberechtigten Einlagen jeder Klasse, unter Berücksichtigung der mittlern Lebensdauer jeder Altersklasse, nach der Normalsterblichkeitstabelle der Anstalt.

Das gesammte Rentenkapital einer Jahresgesellschaft sey z. B. am Anfang des 6ten Gesellschaftsjahres = 50000 fl., der Reservefonds dieser Gesellschaft sey . . . . . 5800 fl.
Hiervon abgezogen 5% des Rentenkapitals mit . . 2500 „
giebt einen Ueberschuß von . . . . . 3300 „

Dieser Ueberschuß muß also dergestalt in eine Rente verwandelt werden, daß vom Kapital und dem 4-procentigen Zins desselben nach Ablauf des in den Statuten bestimmten Zeitraums nichts mehr übrig bleibt. Der hierbei anzunehmende

Zeitraum soll aber bestehen: aus der Dauer der mittlern Lebensdauer der jüngsten, zur Zeitrente berechtigten Altersklasse nach der Sterblichkeitstabelle, und aus der Zeit, nach welcher die jüngste Altersklasse der Jahresgesellschaft ebenfalls zum Zeitrentengenuß gelangt. Da nun alle Altersklassen an dieser Rente participiren sollen, sobald deren jüngste Mitglieder das 46te Lebensjahr zurückgelegt haben würden, so ergiebt sich aus der bei der Anstalt eingeführten Klasseneintheilung (§. 151), daß bei erster Vertheilung der Zeitrente im 6ten Gesellschaftsjahre die 11te, 10te und 9te Klasse betheiligt sind, und daß die 1te Klasse von da an nach 40 Jahren, also im 46ten Gesellschaftsjahre, ebenfalls in den Genuß der Zeitrente eintritt. Addirt man zu diesen 40 Jahren die mittlere Lebensdauer der 9ten Klasse am Anfang des 6ten Gesellschaftsjahres, so ist die Summe dieser Jahre die Auflösungsperiode für den obigen Reservefonds-Ueberschuß. Nun soll die Vertheilung der Zeitrente unter die dazu berechtigten Altersklassen im Verhältniß der noch bestehenden Einlagen und der mittlern Lebensdauer der Altersklassen stattfinden. Nun sey die Anzahl dieser Einlagen zu Anfang des Jahres, welches dem obigen Reservefondsüberschuß entspricht, in der

11ten Klasse = 50
10ten „ = 55
9ten „ = 60

Die mittlere Lebensdauer betrage zu dieser Zeit nach der Sterblichkeitstabelle für die

11te Klasse 15 Jahre,
10te „ 20 „
9te „ 23 „

Hiernach hat die 11te Klasse die Rente während 15 Jahren, die 10te Klasse hat solche während 20 Jahren und die 9te Klasse während 23 Jahren zu genießen. Soll aber die Rente auf gerechte Weise vertheilt werden, so müssen die Mitglieder der ältern Klassen in der vor ihnen liegenden kürzern Anzahl Jahre dieselbe Rentensumme erhalten, welche die jüngern Mitglieder in der größern Anzahl Jahre, die sie zu durchleben haben, empfangen, d. h. ihre Rente muß in dem Verhältniß größer seyn, als ihre mittlere Lebensdauer kürzer ist. Es hat daher die 11te Klasse 23 Theile, die 10te Klasse 20 Theile, und

die 9te Klasse 15 Theile der Rente zu empfangen. Weil aber die Anzahl der Einlagen verschieden ist, so müssen diese Verhältnißzahlen mit den Zahlen, welche die Anzahl der Einlagen bezeichnen, multiplicirt werden.

Die mittlere Lebensdauer der 9ten Altersklasse ist zu Anfang des 6ten Gesellschaftsjahres in runder Zahl = 23 Jahre *); die Auflösungsperiode begreift daher einen Zeitraum von 40 + 23 = 63 Jahren, und die dem Kapital 3300 fl. und dem Zinsfuß 4 entsprechende Zeitrente ist = 144 fl.

Es erhält also die

11te Klasse	23 × 50	Theile von	144 fl.	= 52 fl.	34 kr.
10te „	20 × 55	„ „	„ „	= 50 „	18 „
9te „	15 × 60	„ „	„ „	= 41 „	8 „
			zusammen	144 fl.	— kr.

Obige Rentenbeträge werden nun auf die einzelnen Einlagen nach Verhältniß ihrer Rentenkapitale vertheilt. Sind die Einlagen unten sich gleich, so kommt auf eine Einlage in der

11ten Klasse	1 fl.	3 kr.
10ten „	— „	54 „
9ten „	— „	41 „

Auf diese Weise würde die erstmalige Zeitrente von 144 fl. bis zum Schlusse des 10ten Gesellschaftsjahres vertheilt. Der ihr zu Grunde liegende Ueberschuß wäre von dem Reservefonds abzuschreiben und auf den Zeitrentenfonds der Jahresgesellschaft zu übertragen. Nun wird zu Anfang des 11. Gesellschaftsjahres der Bestand des Reservefonds abermals mit der Größe des gesammten Rentenkapitals der Jahresgesellschaft verglichen. Was derselbe auch diesmal mehr als 5 Procent des Rentenkapitals beträgt, wird ebenfalls in Zeitrente aufgelöst. Dieser abermalige Ueberschuß betrage 1000 fl. Die Auflösungsperiode ist nun um 5 Jahre kürzer, also = 58 Jahre, weil die 1. Klasse dem Zeitrentengenuß um 5 Jahre näher gerückt ist. Es ergiebt sich sonach aus diesen 1000 fl. eine neue, 58 Jahre lang zahlbare Rente von beiläufig 45 fl., welche

*) Nach der für die Darmstädter Rentenanstalt eingerichteten Sterblichkeitstabelle in J. J. Rau's „Beitrag zur nähern Kenntniß der Rentenanstalten im Allgemeinen, und insbesondere der allgemeinen Rentenanstalt zu Darmstadt" (Darmstadt 1844), aus welchem wir obige Darstellung entlehnt haben.

mit der bereits bestehenden von 144 fl. vereinigt vom 11ten Gesellschaftsjahre an unter die 11te, 10te, 9te und 8te Altersklasse nach dem obigen Verfahren vertheilt wird. Nehmen wir an, es beständen zu Anfang dieses Gesellschaftsjahres in der

11ten Klasse noch 42 Einlagen
10ten „ „ 50 „
9ten „ „ 56 „
8ten „ „ 60 „

Die mittlere Lebensdauer der

11ten Klasse beträgt nun noch 12 Jahre
10ten „ „ „ „ 16 „
9ten „ „ „ „ 20 „
8ten „ „ „ „ 23 „

Von der Zeitrentensumme = 189 fl. erhält daher die

11te	Klasse	23 × 42	Theile	=	50 fl.	58 kr.
10te	„	20 × 50	„	=	52 „	46 „
9te	„	16 × 56	„	=	47 „	16 „
8te	„	12 × 60	„	=	38 „	— „
			zusammen		189 fl.	— kr.

Setzt man die Größe der Rentenkapitale innerhalb jeder Altersklasse wieder als unter sich gleich voraus, so käme auf eine Einlage in der

11ten Klasse 1 fl. 12 kr.
10ten „ 1 „ 3 „
9ten „ — „ 50 „
8ten „ — „ 38 „

Auf diese Weise wird die Zeitrente von Jahr zu Jahr vertheilt. Je nach Ablauf von 5 Jahren tritt eine jüngere Altersklasse und mit ihr voraussichtlich auch ein neuer Zeitrentenbetrag bei der Vertheilung hinzu. Da sich das Rentenkapital nach eingetretener Ergänzung aller Theileinlagen nicht mehr erhöht, wohl aber durch Verwandlung in Leibrenten fortwährend vermindert, so werden die als Sicherheitsfonds geltenden 5 Procent des Rentenkapitals immer geringer, bis endlich mit dem Erlöschen der Jahresgesellschaft der ganze Reservefonds in Zeitrente aufgelöst seyn wird.

Die aus den Bestimmungen der Statuten sich ergebenden Auflösungsperioden sind immer kürzer als die wahrscheinliche Dauer des Bestehens einer Jahresgesellschaft, wofür nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux, (welche die Darmstädter Rentenanstalt für ihre Berechnungen angenommen hat) 95 Jahre

anzusetzen sind. Je kleiner aber die Auflösungsperiode ist, desto größer ist, unter übrigens gleichen Umständen, die Zeitrente. In Folge jener Anordnung in Betreff der Auflösungsperiode ist die Auflösung für die verschiedenen Altersklassen eine beschleunigte, was zur Erhöhung der Jahresrenten vorzugsweise im mittlern und höhern Lebensalter allerdings wesentlich beiträgt. Und wenn auch, in Folge der kürzern Auflösungszeit, die Auflösung vor dem Erlöschen der Jahresgesellschaft erfolgen kann, so werden doch bis dahin die andern Bestandtheile der Jahresrente, nämlich die Klassen- und Leibrente, so zugenommen haben, daß es auf den Zuschuß aus dem Zeitrentenfonds nicht weiter mehr viel ankommen wird.

In Betreff der Kapitalauflösung hat sich die Darmstädter Rentenanstalt den Bestimmungen der sächsischen Rentenanstalt angeschlossen, nur mit dem Unterschiede, daß, im Interesse der ältern Altersklasse, bis zu ihrem Aussterben jede Altersklasse abgesondert (wie im §. 142) behandelt wird, und daß nur die zur Deckung der Maximalrente nicht erforderlichen Kapitale der zunächst folgenden Altersklasse überwiesen werden. Auch die hannöversche Rentenanstalt hat letzteres System der Kapitalauflösung eingeführt, nur mit dem Unterschiede, daß in der zuletzt übrig bleibenden Altersklasse einer jeden Jahresgesellschaft dem Steigen der Rente keine Grenze gesetzt ist, und daß die Rentenkapitalien der im letzten Gesellschaftsjahre Sterbenden an deren Erben ausgezahlt werden.

In der badischen Rentenanstalt erfolgt die Kapitalauflösung nach dem Zeitrentensystem (§. 138). Von dem ganzen Kapital einer Jahresgesellschaft wird, unter der Bezeichnung Reserve-Procent, ein nach dem Verhältniß der Zahl der Einlagen der jüngsten Klasse, zur Zahl aller Einlagen der Jahresgesellschaft besonders festzusetzender Theil zur Deckung der Maximalrente für alle im 82ten Gesellschaftsjahre noch vorhandenen Mitglieder bis zu ihrem Ableben abgezogen, und der Rest des Kapitals durch das Auflösungsprocent in der Art in eine Zeitrente verwandelt, daß derselbe nach Ablauf des 82ten Gesellschaftsjahres völlig amortisirt ist.

Die zur Deckung der Maximalrente (§. 145) erforderliche, nach der Normalsterblichkeitstabelle (§. 152) berechnete, Summe wird als aliquoter Theil des Vermögensstocks der

Jahresgesellschaft betrachtet, und nach Procenten desselben bestimmt. Es läßt sich alsdann diese Bestimmung auf Jahresgesellschaften von jeder Größe, die Zahl der Einlagen mag stärker oder geringer wie die als normalmäßig angenommene seyn, anwenden, da immer zwischen der Zahl der Einlagen und dem von ihnen zurückbleibenden Vermögensstock ein dem angenommenen Normalverhältniß ziemlich gleiches Verhältniß bestehen wird. Es können zwar in den verschiedenen Jahresgesellschaften bedeutende Abweichungen vom Normalverhältniß der einzelnen Altersklassen vorkommen; doch hat nur das Verhältniß der Zahl der Einlagen der jüngsten Altersklasse (1- bis 10-jährige Mitglieder) zu der Zahl aller Einlagen der Jahresgesellschaft einen Einfluß auf die Größe vorerwähnten Procentsatzes. Die Berechnung des normalmäßigen Procentsatzes beruht auf der Annahme, daß auf 4000 Einlagen der Jahresgesellschaft 1600 Einlagen der jüngsten Klasse kommen, oder daß die jüngste Klasse 40 Procent aller Einlagen der Jahresgesellschaft beträgt. Sind nun z. B. von 4000 Einlagen statt der angenommenen 1600 Einlagen, deren 3200 in die jüngste Altersklasse gefallen, so werden auch statt der nach der Sterblichkeitstabelle angenommenen 67 Mitglieder doppelt so viele das 82te Jahr erleben, und es ist daher zur Deckung ihrer Rente das doppelte Kapital zu reserviren. Nach angestellter Berechnung*) beträgt in der Normaljahresgesellschaft bei 40 Procent aller Einlagen in der jüngsten Altersklasse die zu reservirende Summe 68229 fl.; da der Vermögensstock in 613600 fl. besteht, so ist sie mit 12 Procent des Vermögensstocks, also mit 73632 fl. hinreichend gedeckt. Enthielte dagegen die jüngste Klasse 50 Procent aller Einlagen der Jahresgesellschaft, so müßte auch das reservirte Kapital in $\frac{5}{4} \times 68229$ fl. bestehen, d. h. der Reserveprocentsatz muß von 12 auf 15 Procent erhöht werden, wenn genügende Deckung vorhanden seyn soll. Ebenso steigt er bei

60 Procent auf $12 \times 1\frac{1}{2} = 18$ Proc,
„ 70 „ „ $12 \times 1\frac{3}{4} = 21$ „
„ 80 „ „ $12 \times 2 \quad = 24$ „

u. s. w.

des Vermögensstocks.

*) S. Kühlenthal, Bericht über den mathematischen Grundplan der Statuten der allgemeinen Versorgungsanstalt im Großh. Baden (Karlsruhe 1841).

Dagegen wird der Procentsatz geringer, wenn die Einlagen in der jüngsten Klasse weniger als 40 Procent aller Einlagen betragen. Er fällt z. B. bei nur 30 Procent aller Einlagen in der jüngsten Klasse auf $12 \times {}^{3}/_{4} = 9$ Procent; bei 20 Procent auf $12 \times {}^{1}/_{2} = 6$ Procent; bei 10 Procent auf $12 \times {}^{1}/_{4} = 3$ Procent, u. s. w.

Für die zwischenliegenden Abstufungen sind keine besondere Procentsätze, sondern nur Grenzen erforderlich. (§. 66 der Statuten).

Weil im Anfang des 6ten Jahres, in welchem die Kapitalauflösung beginnt, das ganze Kapital noch nicht eingezahlt ist, so daß der Vermögensstock fortwährend durch Nachzahlungen, Rentengutschriften und theilweise auch durch Verwaltungsüberschüsse erhöht wird, so müßte die Auflösungsrente für die in jedem einzelnen Jahre eingetretene Erhöhung besonders berechnet, und der Auflösungsrente des 6ten Jahres beigeschlagen werden. Weil aber diese Erhöhung von Jahr zu Jahr unbedeutend seyn kann, so tritt, nach den Statuten der Anstalt, je nach Ablauf von 5 Jahren eine neue Untersuchung und Regulirung der Auflösungsrente ein. Sollte dagegen ausnahmsweise bei einer Regulirung der Vermögensstock geringer befunden werden, als bei der nächst vorhergehenden, so muß die Auflösungsrente im Verhältniß der Abnahme vermindert werden.

Obige Bestimmungen, deren weitere Details aus den Statuten (v. J. 1843) zu ersehen sind, beruhen auf Voranschlägen und approximativen Verfahrungsarten, was auch bei derartigen Anstalten nicht anders seyn kann, wenn es sich um eine möglichst vollständige Kapitalauflösung handelt. Einfacher gestaltet sich freilich die Sache, wenn, wie z. B. bei der sächsischen Rentenanstalt, das Kapital der Gesellschaft nur bis zum Gesammtbelauf der Maximalrente aufgelöst wird, und der Rest auf die andern Jahresgesellschaften übergeht; oder wenn, wie bei der hannöverschen Anstalt, dem Steigen der Rente in der jüngsten Altersklasse keine Grenze gesetzt ist, und die Rentenkapitalien der im letzten Gesellschaftsjahre Sterbenden an deren Erben ausgezahlt werden; oder endlich, wenn keine Rückvergütungen stattfinden, keine Theileinlagen gestattet sind, und, mit einem Wort, wenn die Rentenanstalt eine reine Tontine (§. 92) ist, die aber beim größern

Theile des bei Rentenanstalten sich betheiligten Publikums wenig Eingang finden würde.

Verbindung von Depositenkassen u. Creditinstituten mit Rentenanstalten.

173. Mehrere Rentenanstalten, so z. B. die badische und darmstädtische, können zugleich als Depositenkassen und Creditinstitute benutzt werden. Als Depositenkasse bietet die Rentenanstalt Gelegenheit zur Hinterlegung baaren Geldes (z. B. Erbschaftsgelder, wenn noch keine Einigung über die Vertheilung oder sonstige Verwendung desselben statt gefunden hat, Baarschaften Minderjähriger ꝛc.); sie haftet dafür mit ihrem Vermögen und benützt das Hinterlegte gegen mäßige Verzinsung zu den Zwecken der Anstalt. Als Creditinstitut giebt sie Darleihen, welche durch jährliche gleiche Zahlungen auf Zins und Kapital (Annuitäten) nach Umlauf einer Reihe von Jahren getilgt werden. Solche Nebenanstalten tragen ihrerseits zur Steigerung der Renten bei, und ihre Einführung ist daher überall zu empfehlen.

Schlußbemerkung.

174. Obige Theorie der Rentenanstalten setzt voraus, daß sie auf Gegenseitigkeit gegründet sind. Auch Unternehmer haben das System der Erbvereinigung zu ihrem Vortheile ausgebeutet; jetzt aber werden sie, wenigstens in Deutschland, nicht mehr damit aufkommen, weil man zu der Erkenntniß gelangt ist, daß man sich gegenseitig selbst und wohlfeiler helfen kann, daher solcher theueren Helfershelfer nicht bedarf.

VI.

Allgemeine Theorie der Zeitrenten, Leibrenten und Anwartschaften.

Erste Abtheilung.

Zeitrente.

Unveränderliche Zeitrenten.

175. Ist der Betrag der Zeitrente in jedem Termine von gleicher Größe, so ist die Rente eine unveränderliche Zeitrente; die Rente kann aber auch nach mancherlei Verhältnissen zunehmen oder abnehmen, und sie ist in diesem Falle eine veränderliche Zeitrente. Die unveränderliche Zeitrente ist im §. 91 für die Jahresperioden bereits abgehandelt worden, und wir haben nun noch den Fall anzunehmen, daß die Periode einen größern Zeitraum als denjenigen eines Jahres umfaßt.

Ist die Periode $= n$ Jahre, und wird also nach Verlauf von n Jahren, $2n$ Jahren, $3n$ Jahren u. s. w. die Rente l entrichtet, so ist, wenn die Rente während m Perioden zu entrichten ist und für den Zinsfuß p der gegenwärtige Werth der Zeitrente $=$

$$l\left\{\frac{1}{(1+p)^n}+\frac{1}{(1+p)^{2n}}+\frac{1}{(1+p)^{3n}}+\cdots\frac{1}{(1+p)^{mn}}\right\}$$

$$=l\times\frac{\frac{1}{(1+p)^{(m+1)n}}-\frac{1}{(1+p)^n}}{\frac{1}{(1+p)^n}-1}$$

Anwendung der Zeitrentenrechnung auf die Ablösung von Feudallasten und Baulasten und auf die Arbitrage für öffentliche Arbeiten.

176. Ist, in Beziehung auf die Formel des vorhergehenden Paragraphen, m unendlich groß, so verschwindet $\frac{1}{(1+p)^{(m+1)n}}$, und der gegenwärtige Werth der Zeitrente reducirt sich unter dieser Voraussetzung auf $\frac{l}{(1+p)^n-1}$.

Diese Formel findet ihre Anwendung bei der Ablösung von Feudallasten und Baulasten.

Wenn man z. B. 20 Jahre als die mittlere Zwischenzeit zwischen zwei Handlohnzahlungen annimmt, und wenn man letztere zu 100 fl. und den Zinsfuß zu 4 Procent ansetzt, so ist in obiger Formel

$$l = 100,\ n = 20,\ p = \frac{4}{100}$$

und der gegenwärtige Werth aller spätern Entrichtungen ist $=$

$$\frac{100}{\left(\frac{104}{100}\right)^{20}-1} = \frac{100}{2{,}19112-1} = 83{,}95 = 83 \text{ fl. } 57 \text{ kr.};$$

wofür 84 fl. angesetzt werden kann, und wenn man die jetzt fälligen 100 fl. hinzuzählt, so wäre eine Handlohnpflichtigkeit von 100 fl. auf 184 fl. zu schätzen.

Bei der Ablösung der auf dem Zehnten ruhenden Baulasten wird zur Bestimmung des Kapitals gewöhnlich ein anderer Weg eingeschlagen. Hier handelt es sich um die Ermittlung von Summen, deren Zinsertrag durch Zinseszinsen zu einem geringern Zinsfuße als demjenigen jener Summen, nach einer gewissen Anzahl von Jahren zu der Größe anwächst, welche für die Bestreitung des in der betreffenden Zeit nöthig werdenden Neubaues oder auch der jährlichen Unterhaltung erforderlich ist.

Was die Berechnung des Anschlags der Pflicht zum Neubau betrifft, so unterscheidet das Gesetz drei Fälle, je nachdem die Dauer des künftigen Gebäudes gleich lang, länger oder kürzer abgeschätzt ist, als die Dauer des dermalen vorhandenen Gebäudes.

Setzen wir vorerst den Fall, daß die Dauer des künftigen Gebäudes auf eben so lang wie diejenige des jetzigen Gebäudes abgeschätzt ist, nehmen wir, zur Vereinfachung des Beispiels, nur 10 Jahre an; es sey ferner der Aufwand für den

Neubau = 1000 fl., und der kleinere Zinsfuß = 2. Hier muß nun vorerst bestimmt werden, welche Summe jährlich bis zum 10ten Jahre fortgereicht mit Zins und Zinseszinsen zu 2 Proc. zur Bausumme im Betrage von 1000 fl. anwächst.

Wird die gesuchte Summe, der sogenannte Reädificationsbetrag, durch r bezeichnet, so ist die nach dem

1ten Jahre	. . . . .	$r\left(\frac{102}{100}\right)^9$
2ten „	. . . . .	$r\left(\frac{102}{100}\right)^8$
3ten „	gezahlte Summe r	$r\left(\frac{102}{100}\right)^7$
⋮	im 10ten Jahre werth	⋮
⋮	. . . . .	⋮
10ten „	. . . . .	r

Nun ist

$$r\left\{\left(\frac{102}{100}\right)^9+\left(\frac{102}{100}\right)^8+\left(\frac{102}{100}\right)^7+\ldots 1\right\}=r\times\frac{\left(\frac{102}{100}\right)^{10}-1}{\frac{102}{100}-1}$$

Es soll aber

$$r\times\frac{\left(\frac{102}{100}\right)^{10}-1}{\frac{102}{100}-1}=1000 \text{ seyn; daher}$$

$$r=\frac{\left(\frac{102}{100}-1\right)1000}{\left(\frac{102}{100}\right)^{10}-1}=91{,}32$$

Eine jährliche Zahlung von 91 fl. 32 kr. entspricht zum Zinsfuß 5 einem Kapital von $\frac{91\frac{32}{60}\times 100}{5}=20\times 91\frac{32}{60}=1830\frac{2}{3}$ fl., und so viel beträgt also unter obigen Voraussetzungen der Kapitalanschlag der Last. Es handelt sich hier darum, daß die Lastenübernehmer oder die Baupflichtigen die ihnen zugeschiedenen Baukapitalien zu 5 Procent ausleihen, und

die Zinsen hiervon wieder zu 2 Procent zinstragend anlegen. Weil aber die Zinsen, besonders wenn sie nicht von großem Betrage sind, nicht immer selbst wieder sogleich zinstragend untergebracht werden können, so wird der Berechnung des Reädifikationsbetrags billigerweise ein kleinerer Zinsfuß als der gewöhnliche zum Grunde gelegt.

Ist überhaupt die Dauer des jetzigen und des künftigen Gebäudes auf n Jahre, und der Aufwand für den Neubau auf b fl. abgeschätzt, und ist der kleinere Zinsfuß $= p$, so ist der gesuchte Reädifikationsbetrag

$$r = \frac{pb}{(1+p)^n - 1}$$

Hat man also eine Hülfstabelle, welche angiebt, auf wie viel die Jahresrente 1 am Schlusse jedes Jahres gereicht mit Zins und Zinseszinsen zum angenommenen Zinsfuß nach so viel Jahren als in der Praxis vorkommen können, anwächst, so hat man zur Bestimmung des Reädifikationsbetrags nur den Betrag des Aufwands für den Neubau durch die der gegebenen Anzahl der Jahre entsprechende Hülfszahl zu dividiren.

Wird der größere Zinsfuß durch P bezeichnet, so ist der Kapitalanschlag der Last $= \frac{pb}{P((1+p)^n - 1)}$

Wird für das vorhandene Gebäude eine kürzere Dauer bestimmt, als für einen künftigen Neubau, so genügt es nicht, dem Uebernehmer der Last als Gegenleistung ein Kapital zu geben, dessen Zinsertrag binnen der ganzen Dauer eines Neubaus mit Zins und Zinseszinsen zur Bausumme anwächst, denn der erste Baufall tritt ein, bevor die inzwischen fällig gewordenen Zinsbeträge mit ihren Zinsen und Zinseszinsen zur Bausumme anwachsen konnten; es muß daher noch außerdem eine Summe gereicht werden, die mit Zins und Zinseszinsen dereinst, wenn der Baufall eintritt, dem Minderbetrage gleich kommt.

Nehmen wir an, ein Gebäude, welches, wenn es neu gebaut wird, 7622 fl. kostet, und dessen Dauer auf 110 Jahre abgeschätzt ist, sey schon nach Verlauf von 30 Jahren neu zu erbauen. Wäre es erst nach 110 Jahren zu ersetzen, so würde, wenn der kleinere Zinsfuß zu 2½ Procent angesetzt ist, der

Reädifikationsbetrag = 13,4924 fl. seyn; denn für $p = \frac{2\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{40}$ ist

$$40\left(\frac{41}{40}\right)^{100} = 564{,}90748 \text{ und } \frac{7622}{564{,}90748} = 13{,}4924.$$

Ein Reädifikationsbetrag von 1 giebt nach 30 Jahren $40\left(\frac{41}{40}\right)^{30}$ = 43,90288; der Reädifikationsbetrag von 13,4824 giebt mithin nach 30 Jahren

$$13{,}4924 \times 43{,}90288 = 592{,}3552 \text{ fl.}$$

Da nun der Reädifikationsbetrag nach 30 Jahren nur 592,3552 fl. liefert, und dagegen die alsdann aufzuwendende Bausumme 7622 fl. beträgt, so ist der Minderbetrag = 7622 — 592,3552 = 7029,6448 fl. Ist der größere Zinsfuß = 5, so muß nun eine Summe ausgemittelt werden, die mit ihren 5-procentigen Zinsen und den 2½-procentigen Zinseszinsen derselben nach 30 Jahren den Betrag von 7029,6448 fl. liefert. Es giebt aber der Reädifikationsbetrag oder die Rente 1 in 30 Jahren mit Zinseszinsen zu 2½ Procent 43,90288; sie wächst also mit ihrem 5-procentigen Kapital von $\frac{100}{5} = 20$ in derselben Zeit auf 43,90288 + 20 = 63,90288 an. So wie nun 63,90288 aus dem ursprünglichen Kapital von 20 entsteht, so entsteht der Betrag von 7029,6448 fl. aus der ursprünglichen Summe x; daher

$$x = \frac{7029\ 6448 \times 20}{63{,}90288} = 2200{,}1026 \text{ fl.} = 2200 \text{ fl. } 6 \text{ kr.}$$

Hiernach besteht der Kapitalanschlag der Baulast aus 20 × 13,4924 = 270 fl. und 2200 fl. 6 kr., also aus 2470 fl.

Wenn dagegen für das vorhandene Gebäude, auf welches sich die Baulast bezieht, eine längere Dauer geschätzt ist, als für jedes künftige, so muß dem Baupflichtigen ein Kapital gegeben werden, welches in den Jahren, um welche die Dauer des jetzigen Gebäudes höher bestimmt ist, als die des künftigen, mit Zinsen zum höhern Zinsfuß und Zinseszinsen zum kleinern Zinsfuß, zu einer Summe anwächst, deren zum größern Zinsfuß berechnete Interessen dem Reädifikationsbetrag für das künftige Gebäude entsprechen.

Ist z. B. die Dauer für das künftige Gebäude auf 150 Jahre und für das jetzt vorhandene auf 200 Jahre abgeschätzt, und betragen die Kosten für den Neubau 10500 fl., so wird der Kapitalanschlag der Last wie folgt berechnet. Der Reädifikationsbetrag 1 giebt mit Zinseszinsen zu 2½ Procent in 150 Jahren 1584,2204; um bis dahin 10500 fl. zu erhalten, muß demnach der Reädifikationsbetrag $= \frac{10500}{1584,22038} = 6,6278$ fl. seyn. Das Kapital, welches diesem Reädifikationsbetrag als 5-procentigem Zins entspricht ist $= \frac{100}{5} \times 6,6278 = 132,556$ fl. Die Dauer des jetzigen Gebäudes ist aber um 50 Jahre länger; daher ist der Kapitalanschlag der Baulast eine Summe, die in 50 Jahren mit Zinsen zu 5 Procent und Zinseszinsen zu 2½ Procent zum Kapital von 132,556 fl. anwächst. Der Reädifikationsbetrag oder die jährliche Rente 1 giebt mit Zins und Zinseszinsen zu 2½ Procent in 50 Jahren 97,4849; also das Kapital 20 mit 5-procentigem Zins 1 und den Zinseszinsen zu 2½ Procent 117,4849. Wie nun der Betrag 117,4849 aus 20, so entsteht der Betrag 132,556 aus der gesuchten Summe x; daher

$$117,4849 : 20 = 132,556 : x = 22,565 \text{ fl.}$$

Diese 22,565 fl. oder 22 fl. 34 kr. sind demnach der Kapitalanschlag der Last; sie liefern in 50 Jahren mit Zins zu 5 Procent und Zinseszinsen zu 2½ Procent die Summe von 132,556 fl., und deren 5-procentiger Zins im Betrage von 6,6278 fl. giebt mit Zins und Zinseszins zu 2½ Procent je in 150 Jahren die Bausumme von 10500 fl.

Was die Berechnung des Anschlages der Verbindlichkeit zur Unterhaltung betrifft, so unterscheidet das Gesetz gleichfalls drei Fälle, je nachdem der jährliche Unterhaltungsaufwand für das jetzige Gebäude eben so hoch, höher oder niederer als für das künftige Gebäude abgeschätzt ist.

Ist der jährliche Unterhaltungsaufwand für das jetzige Gebäude gerade so hoch abgeschätzt, als für das künftige, so besteht der Kapitalanschlag der Baulast aus einer Summe, deren jährlicher Zins zum angenommenen Zinsfuß dem Unterhaltungsaufwand entspricht, also z. B. aus dem Zwanzigfachen dieses Aufwands, wenn der hiebei angenommene Zinsfuß = 5 ist.

Ist dagegen der jährliche Unterhaltungsaufwand für das jetzige Gebäude höher abgeschätzt als für das künftige, so besteht der Kapitalanschlag der Last aus dem Kapitalanschlag des jährlichen Unterhaltungsaufwandes vom künftigen Gebäude, und aus dem mit Rücksicht auf Zins und Zinseszinsen zum angenommenen Zinsfuße berechneten jetzigen Werth des von jetzt an bis zum Eintritt des ersten Neubaus weiter erforderlichen jährlichen Unterhaltungsaufwandes.

Ist z. B. die Dauer des dermal vorhandenen Gebäudes auf 30 Jahre, der Unterhaltungsaufwand für dieses Gebäude auf 55 fl. 20 kr. jährlich, und der für das künftige Gebäude auf 45 fl. 13 kr. jährlich abgeschätzt, so wird der Kapitalanschlag der Baulast wie folgt berechnet.

Das Kapital für die Unterhaltung des künftigen Gebäudes ist, wenn hierbei der Zinsfuß 5 angenommen wird, $= 20 \times 45\frac{13}{60}$ fl. $= 904$ fl. 20 kr.

Während der nächsten 30 Jahre, so lange nämlich das dermalige Gebäude noch ausdauern wird, sind aber für den Unterhalt nicht 45 fl. 13 kr., sondern 55 fl. 20 kr., also 10 fl. 7 kr. jährlich weiter erforderlich. Es muß daher berechnet werden, wie hoch sich der gegenwärtige Werth dieses Mehraufwandes mit Rücksicht auf Zins und Zinseszinsen zum angenommenen Zinsfuß beläuft. Ist dieser Zinsfuß $= 4$, so ergiebt sich aus der im Anhang befindlichen Tabelle II., daß der gegenwärtige Werth einer Jahresrente 1, welche 30 Jahre lang am Schluß jedes Jahres geleistet werden muß, mit Rücksicht auf Zins und Zinseszinsen zu 4 Procent 17,29201 beträgt. Demnach beträgt der gegenwärtige Werth einer während 30 Jahren zu leistenden Jahresrente von 10 fl. 7 kr.

$$17{,}29201 \times 10\frac{7}{60} = 174 \text{ fl. } 57 \text{ kr.}$$

Der Kapitalanschlag der Last ist daher $= 904$ fl. 20 kr. $+$ 174 fl. 57 kr. $= 1079$ fl. 17 kr.

Ist endlich der jährliche Unterhaltungsaufwand für das dermal vorhandene Gebäude niederer abgeschätzt, als für das künftige, so besteht der Kapitalanschlag der Last aus dem Kapitalanschlag des jährlichen Unterhaltungsaufwandes vom dermal vorhandenen Gebäude, und aus dem mit Rücksicht auf Zins und Zinseszins

zum angenommenen Zinsfuß berechneten gegenwärtigen Werth der zur Zeit des ersten Neubaues fälligen Summe, um welche der Kapitalanschlag der jährlichen Unterhaltungskosten des künftigen Gebäudes den Kapitalanschlag der jährlichen Unterhaltungskosten des dermals vorhandenen Gebäudes übersteigt.

Ist z. B. der jährliche Unterhaltungsaufwand für das jetzige Gebäude zu 35 fl. 12 kr., der für das künftige zu 47 fl. 28 kr., und die Dauer des jetzigen Gebäudes zu 35 Jahren abgeschätzt, so wird der Kapitalanschlag der Baulast wie folgt berechnet.

Der Kapitalanschlag des jährlichen Unterhaltungsaufwands des jetzigen Gebäudes beträgt für den Zinsfuß 5

$$20 \times 35\frac{12}{60} = 704 \text{ fl.}$$

Für jetzt, und so lange das jetzt vorhandene Gebäude besteht, liefert das Kapital von 704 fl. den jährlichen Unterhaltungsaufwand. Sobald aber das vorhandene Gebäude unbrauchbar geworden ist, also nach 35 Jahren, sind zu diesem Behufe

$$20 \times 47\frac{28}{60} = 949 \text{ fl. } 20 \text{ kr.}$$

d. i. das Zwanzigfache vom Unterhaltungsaufwand des künftigen Gebäudes erforderlich. Letzterer Betrag (949 fl. 20 kr.) übersteigt den erstern (704 fl.) um 245 fl. 20 kr. Es muß also der gegenwärtige Werth dieser Summe mit Berücksichtigung der Zinseszinsen zum vorgeschriebenen Zinsfuß berechnet werden. Nun ist z. B. der gegenwärtige Werth des am Schlusse des 35ten Jahres fälligen Betrags 1 mit Rücksicht auf Zins und Zinseszinsen zu 4 Procent = 0,25342; hiernach beläuft sich der gegenwärtige Werth von 245 fl. 20 kr. auf $0{,}25342 \times 245\frac{20}{60}$ = 62 fl. 10 kr. Der Kapitalanschlag der Baulast ist daher = 704 fl. + 62 fl. 10 kr. = 766 fl. 10 kr.

Aehnliche Berechnungen werden bei der Arbitrage für öffentliche Arbeiten, z. B. Eisenbahnbauten, also zur Vergleichung der ökonomischen Vortheile verschiedener Constructionsarten, angestellt. Hierbei werden für die Haupttheile der Construction wahrscheinliche Dauerzeiten angenommen, und die jährlichen Renten bestimmt, welche nach Ablauf der Dauerzeit durch ihren Zins eine Summe erzeugen, die dem ursprünglichen, um den

Werth der alten Baumaterialien verminderten Kostenaufwande gleich ist.

Veränderliche Zeitrente.

177. Bei der Berechnung der veränderlichen Zeitrenten beschränken wir uns auf diejenigen Verhältnisse, nach welchen die Renten der nach einander folgenden Jahre entweder eine geometrische oder arithmetische Reihe bilden, oder auch nach den Potenzen der natürlichen Zahlen fortschreiten, weil andere Bestimmungen in der Praxis nicht wohl vorkommen.

Soll die Rente in geometrischer Progression fortschreiten, ist die 1te Jahresrente $= l$, und nimmt sie im Verhältniß von $1 : 1 + b$ in jedem Jahre zu, so ist die 2te Jahresrente $= l\,(1+b)$, die dritte $= l\,(1+b)^2$ u. s. w. Ist nun p der Zinsfuß und n die Anzahl der Jahre, so ist der gegenwärtige Werth W der Rente $=$

$$\frac{l}{1+p} + \frac{l\,(1+b)}{(1+p)^2} + \frac{l\,(1+b)^2}{(1+p)^3} + \ldots \frac{l(1+b)^{n-1}}{(1+p)^n}$$

Oder:

$$W\,(1+p) = l\left(1 + \frac{1+b}{1+p} + \left(\frac{1+b}{1+p}\right)^2 + \ldots . \left(\frac{1+b}{1+p}\right)^{n-1}\right)$$

$$= l\left(\frac{\left(\frac{1+b}{1+p}\right)^n - 1}{\frac{1+b}{1+p} - 1}\right) \text{ und } W = \frac{l}{1+p}\left(\frac{\left(\frac{1+b}{1+p}\right)^n - 1}{\frac{1+b}{1+p} - 1}\right)$$

Ist $b = p$, so hat man

$$W\,(1+p) = l\left(1 + \frac{1+p}{1+p} + \left(\frac{1+p}{1+p}\right)^2 + \ldots \left(\frac{1+p}{1+p}\right)^{n-1}\right)$$

$$= l\,n\text{; daher } W = \frac{l\,n}{1+p}$$

178. Soll die Rente in arithmetischer Reihe fortschreiten, und zwar nach der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 an, so wird, wenn p den Zinsfuß und n die Anzahl der Jahre bezeichnet, das Kapital der Rente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p} + \frac{2}{(1+p)^2} + \frac{3}{(1+p)^3} + \ldots \frac{n}{(1+p)^n}$$

Setzt man $1 + p = q$ und bezeichnet man obige Summe durch $\int^n \frac{n}{q^n}$, so ist

$$\int \frac{n}{q^n} = \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \ldots\ldots \frac{n}{q^n}$$

und $(q-1)\int \frac{n}{q^n} = 1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \ldots\ldots \frac{n}{q^{n-1}}$

$$- \frac{1}{q} - \frac{2}{q^2} - \frac{3}{q^3} + \ldots\ldots \frac{n-1}{q^{n-1}} - \frac{n}{q^n}$$

Daher $(q-1)\int \frac{n}{q^n} = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots\ldots$

$$\frac{1}{q^{n-1}} - \frac{n}{q^n} = 1 + \int \frac{1}{q^{n-1}} - \frac{n}{q^n}$$

und $\int \frac{n}{q^n} = \frac{1}{q-1}\left(1 + \int \frac{1}{q^{n-1}} - \frac{n}{q^n}\right)$

Setzt man für q seinen Werth $1+p$ so ist

$$\int \frac{n}{(1+p)^n} = \frac{1}{p}\left(1 + \int \frac{1}{(1+p)^{n-1}} - \frac{n}{(1+p)^n}\right)$$

Nun ist aber $\int \frac{1}{(1+p)^{n-1}} = 1 \frac{1 - \frac{1}{(1+p)^{n-1}}}{p}$; daher

$$\int \frac{n}{(1+p)^n} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{(1+p)^{n-1}}}{p} - \frac{n}{(1+p)^n}\right)$$

Ist z. B. die Rente des ersten Jahres $= 1$, $p = \frac{4}{100}$, und $n = 20$, so ist

$$\frac{n}{(1+p)^n} = \frac{20}{2{,}19113} = 9{,}12771$$

$$\frac{1 - \frac{1}{(1+p)^{n-1}}}{p} = \frac{1 - 0{,}47465}{0{,}04} = 13{,}13375$$

$$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{(1+p)^{n-1}}}{p} - \frac{n}{(1+p)^n}\right) = 25\ (1 +$$

$13{,}13375 - 9{,}12771) = 25 \times 5{,}00604 = 125{,}151.$

179. Soll die Rente in einer arithmetischen Reihe so fortschreiten, daß sie nach dem 1ten Jahre a, nach dem 2ten Jahre $a+d$, nach dem 3ten Jahre $a+2d$ u. s. w. nach dem $n$ten Jahre $a+(n-1)d$ ist, so wird der gegenwärtige Werth dieser Rente ausgedrückt durch

$$\frac{a}{1+p}+\frac{a+d}{(1+p)^2}+\frac{a+2d}{(1+p)^3}+\ldots\frac{a+(n-1)d}{(1+p)^n}=$$
$$\frac{a}{1+p}+\frac{a}{(1+p)^2}+\frac{a}{(1+p)^3}+\ldots\frac{a}{(1+p)^n}+\frac{d}{1+p}\times$$
$$\left(\frac{1}{1+p}+\frac{2}{(1+p)^2}+\frac{3}{(1+p)^3}+\ldots\frac{(n-1)d}{(1+p)^{n-1}}\right)$$

Der eine Theil dieser Summe ist der Werth der Jahresrente a für n Jahre, und der andere ist der Werth einer nach der Reihe der natürlichen Zahlen wachsenden Rente 1 im Produkt mit $\frac{d}{1+p}$. Die erste Summe ist $=a\left(\frac{1-\frac{1}{(1+p)^n}}{p}\right)$, und die andere ist $=\frac{d}{1+p}\times\frac{1}{p}\left(1+\frac{1-\frac{1}{(1+p)^{n-2}}}{p}-\frac{n-1}{(1+p)^{n-1}}\right)$

180. Soll die Rente im 1ten Jahre $=a$ seyn, und in jedem Jahre bis zum Ablauf des $n$ten Jahres nach der Reihe der natürlichen Zahlen abnehmen, so ist, wenn man der Gleichförmigkeit wegen $a+1=b$ setzt, und die Summe der gegenwärtigen Werthe der jährlichen Rentenzahlungen durch $\int\frac{b-n}{(1+p)^n}$ bezeichnet,

$$\int\frac{b-n}{(1+p)^n}=\frac{b-1}{1+p}+\frac{b-2}{(1+p)^2}+\frac{b-3}{(1+p)^3}+\ldots\frac{b-n}{(1+p)^n}$$

Setzt man $1+p=q$, und multiplicirt man die Gleichung mit $q-1$, so ist

$$(q-1)\int\frac{b-n}{q^n}=\frac{b-1}{q^0}+\frac{b-2}{q^1}+\frac{b-3}{q^2}+\ldots\frac{b-n}{q^{n-1}}$$
$$-\frac{b-1}{q^1}-\frac{b-2}{q^2}-\frac{b-3}{q^3}+\ldots\frac{b-n+1}{q^{n-1}}-\frac{b-n}{q^n}$$

Daher $(q-1)\int\frac{b-n}{q^n}=b-1-\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\right.$
$\left.\frac{1}{q^{n-1}}\right)-\frac{b-n}{q^n}=b-1-\int\frac{1}{q^{n-1}}-\frac{b-n}{q^n}$; und

$$\int\frac{b-n}{q^n}=\frac{1}{q-1}\left(b-1-\int\frac{1}{q^{n-1}}-\frac{b-n}{q^n}\right)$$

Wenn die Rentenzahlungen so lange dauern sollen bis $n=b$ ist, so ist $\frac{b-n}{q^n}=0$, und in diesem Falle ist

$$\int^{b-n}_{q^n} = \frac{1}{q-1}\left(b-1-\int^{1}_{q^{n-1}}\right)$$

Weil $q\int^{1}_{q^n} = q\int\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots\frac{1}{q^n} = 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots\frac{1}{q^{n-1}}$

so ist $q\int^{1}_{q^k} = 1+\int^{1}_{q^{n-1}}$ und $q\int\frac{1}{q^n}-1 = \int\frac{1}{q^{n-1}}$

Daher durch Substitution des Werths von $\int\frac{1}{q^{n-1}}$

$\int^{b-n}_{q^n} = \frac{1}{q-1}\left(b-q\int\frac{1}{q^n}\right)$, und wenn man für b seinen Werth $a+1$ und $1+p$ für q setzt,

$$\int^{a+1-n}_{(1+p)^n} = \frac{1}{p}\left(a+1+(1+p)\int\frac{1}{(1+p)^{a+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(a-\int\frac{1}{(1+p)^a}\right) = \frac{1}{p}\left(a-\frac{1-\frac{1}{(1+p)^a}}{p}\right)$$

Zur Anwenwung dieser Formel nehmen wir an, daß bei einer Anleihe eine Prämie von 150 fl. solchergestalt gegeben werde, daß sie in den nächsten 35 Jahren jedesmal mit $\frac{1}{35}$ bezahlt, und der rückständige Theil jährlich mit 2 Procent verzinst werden solle; man sucht den Werth dieser Prämie nach dem Zinsfuß 4.

Das Kapital der Prämie kann als eine Zeitrente angesehen werden, die in 35 Jahren jedesmal mit $\frac{150}{35} = \frac{30}{7}$ fl. bezahlt werden soll, und davon ist der Werth nach dem Zinsfuße 4

$$\frac{30}{7}\int\frac{1}{1{,}04^{35}} = \frac{30}{7}\times 18{,}6646 = 79{,}9912.$$

Der Uebernehmer des Anleihens hat außerdem, dem Vertrag zufolge, zu erhalten:

zu Ende des 1. Jahres die Zinsen von 150 fl. $\Big\}$ oder von $35\times\frac{7}{30}$

" " " 2. " " " " " $150-\frac{30}{70}$ $\Big\}$ oder von $34\times\frac{30}{7}$

" " " 3. " " " " " $150-\frac{60}{70}$ $\Big\}$ oder von $33\times\frac{33}{7}$

" " " 4. " " " " " $150-\frac{120}{7}$ $\Big\}$ oder von $32\times\frac{30}{7}$

u. s. w.

Diese Zinsen betragen zum Zinsfuß 2

$$\frac{30}{7} \times \frac{2}{100} \times 35, \frac{30}{7} \times \frac{2}{100} \times 34, \frac{30}{7} \times \frac{2}{100} \times 33 \text{ u. s. w.}$$

oder $\frac{6}{70} \times 35, \frac{6}{70} \times 34, \frac{6}{70} \times 33$ u. s. w.

Der zum Zinsfuß 4 berechnete gegenwärtige Werth dieser Zinsbeträge ist demnach

$$\frac{6}{70} \times \frac{1}{0{,}04}\left(35 - \int \frac{1}{1{,}04^{35}}\right) = \frac{6}{70} \times 25\left(35 - \frac{1 - \frac{1}{1{,}04^{35}}}{0{,}04}\right)$$

$$= \frac{6}{70} \times 25\left(35 - \frac{1 - 0{,}25342}{1{,}04}\right)$$

$$= \frac{6}{70} \times 25\left(35 - 18{,}6645\right) = 35{,}0046$$

Der gegenwärtige Werth der Prämie ist hiernach $= 79{,}9912 + 35{,}0046 = 114{,}9958$.

Obiges Beispiel hat Meyer in seiner Anleitung zur Berechnung der Leibrenten ꝛc. (Kopenhagen, 1823) aufgestellt, mit dem Bemerken, daß die dänische Regierung bei einer Anleihe im Jahr 1785 eine ähnliche Prämie gegeben habe.

181. Soll die Rente nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 an fortgehen, d. h. soll im 1ten Jahre 1^2, im 2ten Jahre 2^2, im 3ten Jahre 3^2 u. s. w., oder im 1ten Jahre 1^3, im 2ten Jahre 2^3, im 3ten Jahre 3^3 u. s. w., und überhaupt im 1ten Jahre 1^m, im 2ten Jahre 2^m, im 3ten Jahre 3^m u. s. w. gezahlt werden, und wird der gegenwärtige Werth dieser Rente durch $\int \frac{n^m}{(1+p)^n}$ bezeichnet, so ist

$$\int \frac{n^m}{(1+p)^n} = \frac{1^m}{1+p} + \frac{2^m}{(1+p)^2} + \frac{3^m}{(1+p)^3} + \cdots \frac{n^m}{(1+p)^n}$$

Setzt man $1 + p = q$, so ist auch

$$(q-1)\int \frac{n^m}{q^n} = \frac{1^m}{q^0} + \frac{2^m}{q^1} + \frac{3^m}{q^2} + \frac{4^m}{q^3} + \cdots \frac{n^m}{p^{n-1}}$$

$$- \frac{1^m}{q} - \frac{2^m}{q^2} - \frac{3^m}{q^3} - \cdots \frac{(n-1)^m}{q^{n-1}} - \frac{n^m}{q^n}$$

$$= 1 + \frac{1+(1+1)^m - 1^m}{q} + \frac{(2+1)^m - 2^m}{q^2} + \frac{(3+1)^m - 3^m}{q^3}$$

$$+ \cdots \frac{(n-1+1)^m - (n-1)^m}{q^{n-1}} - \frac{n^m}{q^n}$$

Wird jedes Glied binomisch entwickelt, so ist

$$\frac{(1+1)^m-1^m}{q}=\frac{m}{1}\frac{1^{m-1}}{q}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\frac{1^{m-2}}{q}+$$
$$\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1^{m-3}}{q}+\ldots\frac{m\,.\,m-1\ldots 1}{1\,.\,2\ldots m}\frac{1^{m-m}}{q}\left(\text{oder }\frac{1}{q}\right)$$
$$\frac{(2+1)^m-2^m}{q^2}=\frac{m}{1}\frac{2^{m-1}}{q^2}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\frac{2^{m-2}}{q^2}+$$
$$\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{2^{m-3}}{q^2}+\ldots\frac{m\,.\,m-1\ldots 1}{1\,.\,2\ldots m}\frac{2^{m-m}}{q^2}\left(\text{oder }\frac{1}{q^2}\right)$$
$$\frac{(3+1)^m-3^m}{q^3}=\frac{m}{1}\frac{3^{m-1}}{q^3}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\frac{3^{m-2}}{q^3}+$$
$$\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{3^{m-3}}{q^3}+\ldots\frac{m\,.\,m-1\ldots 1}{1\,.\,2\ldots m}\frac{3^{m-m}}{q^3}\left(\text{oder }\frac{1}{q^3}\right)$$
$$\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots$$
$$\frac{(n-1+1)^m-(m-1)^m}{q^{n-1}}=\frac{m}{1}\frac{(m-1)^{m-1}}{q^{n-1}}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times$$
$$\frac{(n-1)^{m-2}}{q^{n-1}}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{(n-1)^{m-3}}{q^{n-1}}+\ldots.$$
$$\frac{m\,.\,m-1\ldots 1}{1\,.\,2\ldots m}\frac{m^{m-m}}{q^{n-1}}\left(\text{oder }\frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

Durch Substitution dieser Werthe ergiebt sich

$$(q-1)\int\frac{n^m}{q^n}=1+\frac{m}{1}\int\frac{(n-1)^{m-1}}{q^{n-1}}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times$$
$$\int\frac{(n-1)^{m-2}}{q^{n-1}}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\int\frac{(n-1)^{m-3}}{q^{n-1}}+\ldots$$
$$\int\frac{1}{q^{n-1}}-\frac{n^m}{q^n};$$

daher

$$\int\frac{n^m}{q^n}=\frac{1}{q-1}\left(1+\frac{m}{1}\int\frac{(n-1)^{m-1}}{q^{n-1}}+\right.$$
$$\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\int\frac{(n-1)^{m-2}}{q^{n-1}}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\int\frac{(n-1)^{m-3}}{q^{n-1}}$$
$$\left.+\ldots.\int\frac{1}{q^{n-1}}-\frac{n^m}{q^n}\right)$$

Um diesen Ausdruck in einen anderen zu verwandeln, in welchem alle Glieder Summen von $\frac{n^x}{r^n}$ und nicht von $\frac{(n-1)^x}{q^{n-1}}$ sind, setze man

$$\int\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}=\frac{1}{q-1}\left(1+\frac{m}{1}\int\frac{n^{m-1}}{q^n}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times\right.$$
$$\left.\int\frac{n^{m-2}}{q^n}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\int\frac{n^{m-3}}{q^n}+\ldots\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}\right)$$

Es ist ferner

$$\int\frac{n^m}{q^n}=\int\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}-\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}=\frac{1}{q-1}\Big(1+\frac{m}{1}\times$$
$$\int\frac{n^{m-1}}{q^n}+\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{n^{m-2}}{q^n}.+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\times$$
$$\int\frac{n^{m-3}}{q^n}+\ldots\Big)-\frac{1}{q-1}\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}-\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}$$

Weil ferner die Summe der beiden letzten Glieder $=$
$\Big(\frac{1}{q-1}+1\Big)\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}=\frac{r}{q-1}\times\frac{(n+1)^m}{q^{n+1}}=\frac{1}{q-1}\times$
$\frac{(n+1)^m}{q^n}$, so ist

$$\int\frac{n^m}{q^n}=\frac{1}{q-1}\Big(1+\frac{m}{1}\int\frac{n^{m-1}}{q^n}+\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{n^{m-2}}{q^n}+$$
$$\int\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\int\frac{n^{m-3}}{q^n}+\ldots.\int\frac{1}{q^n}-\frac{(n+1)^m}{q^n}\Big)$$

Ist z. B. $m=1$, so ist

$$\int\frac{n}{r^n}=\frac{1}{q-1}\Big(1+1\int\frac{1}{q^n}-\frac{n+1}{q^n}\Big)$$

Nun ist

$$\int\frac{1}{q^n}=\frac{1}{q^1}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\frac{1}{q^n}=\frac{1}{q-1}$$

und setzt man $\frac{1}{q-1}=k$, so wird die Summe der Glieder der Reihe von $\frac{1}{q}$ bis $\frac{1}{q^n}$ ausgedrückt durch $\int\frac{1}{q^n}=k-k\times$ $\frac{1}{q^n}$. Für $n=4$, z. B., ist

$$\int\frac{1}{q^4}=\frac{1}{q^1}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\ldots-\frac{1}{q^4}\times$$
$$\Big(\frac{1}{q^1}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\Big)=\frac{1}{q^1}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}$$
$$+\frac{1}{q^5}+\ldots-\Big(\frac{1}{q^5}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^7}+\ldots\Big)=\frac{1}{q^1}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}$$

Substituirt man den gefundenen Werth von $\int\frac{1}{q^n}=k-k\times\frac{1}{q^n}$ und k für $\frac{1}{q-1}$ in die Gleichung

$$\int\frac{n}{q^n}=\frac{1}{q-1}\left(1+\int\frac{1}{q^n}-\frac{n+1}{q^n}\right)$$ so ist

$$\int\frac{n}{q^n}=k\left(1+k-\frac{k}{q^n}-\frac{n+1}{q^n}\right)=k\left(1+k-\frac{k+n+1}{q^n}\right)$$

Für $m=2$ ist

$$\int\frac{n^2}{q^n}=k\left(1+2\int\frac{n}{q^n}+\int\frac{1}{q^n}-\frac{(n+1)^2}{q^n}\right)$$

Substituirt man in dieser Gleichung den gefundenen Werth von $\int\frac{n}{q^n}$ so ist

$$\int\frac{n^2}{q^n}=k\left(1+3k+2k^2-\frac{n^2+2n(1+k)+1+3k+2k^2}{q^n}\right)$$

Ist z. B. $m=2$, $n=2$, $q=1+p=1{,}04$, so hat man $k=\frac{1}{p}=25$ und

$$\int\frac{n^m}{q^n}=25\,[1+3\,.\,25+2\,.\,625-(4+4.26+1+\cdot$$
$$75+1250)\,0{,}92455]=4{,}6597$$

Durch die gewöhnliche Berechnung findet man

$$\frac{1^2}{1{,}04}=0{,}961538$$
$$\frac{2^2}{1{,}04^2}=3{,}698224$$
$$\int\frac{n^m}{qn}=4{,}659762$$

in Uebereinstimmung mit der obigen Berechnung.

Für $m=3$ ist

$$\int\frac{n^3}{q^n}=k\left(1+3\int\frac{n^2}{q^n}+3\int\frac{n}{q^n}+\int\frac{1}{q^n}-\frac{(n+1)^m}{q^n}\right)$$

in welcher Gleichung die im Obigen gefundenen Werthe von $\int\frac{n^2}{q^n}$, $\int\frac{n}{q^n}$ und $\int\frac{1}{q^n}$ zu substituiren sind.

182. Wenn die Rente nach gleichnamigen Potenzen der natürlichen Zahlen in umgekehrter Ordnung so abnehmen soll,

daß sie zu Ende des 1ten Jahres mit $(a-1)^m$, zu Ende des 2ten Jahres mit $(a-2)^m$ und so fort zu Ende des $n$ten Jahres mit $(a-n)^m$ bezahlt wird, so kann der gegenwärtige Werth derselben, nämlich

$$\frac{(a-1)^m}{q^1} + \frac{(a-2)^m}{q^2} + \frac{(a-3)^m}{q^3} + \ldots + \frac{(a-n)^m}{q^n}$$

durch $\int \frac{(a-n)^m}{q^n}$ bezeichnet werden.

Auch ist $a^m + \int \frac{(a-n)^m}{q^n} = a^m + \frac{(a-1)^m}{q^1} + \frac{(a-2)^m}{q^2} + \ldots \frac{(a-n)^m}{q^n}$;

und $\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(a^m + \int \frac{(a-n)^m}{q^n}\right) = \frac{a^m}{b^0} + \frac{(a-1)^m}{q^1} + \frac{(a-2)^m}{q^2} + \ldots \frac{(a-n)^m}{q^n} - \frac{a^m}{q} - \frac{(a-1)^m}{q^2} - \ldots \frac{(a-n+1)^m}{q^n} - \frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}$

$$= a^m - \frac{a^m-(a-1)^m}{q} - \frac{(a-1)^m-(a-2)^m}{q^2} - \ldots \frac{(a-n+1)^m-(a-n)^m}{q^n} - \frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}$$

Entwickelt man in jedem Gliede die Potenz, von welcher der Abzug geschehen soll, binomisch, und setzt man

$a-1+1$ für a
$a-2+1$ „ $a-1$
$a-3+1$ „ $a-2$
u. s. w.

so hat man

$$(a-1+1)^m-(a-1)^m = (a-1)^m + \frac{m}{1}(a-1)^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}(a-1)^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(a-1)^{m-3} + \ldots \frac{m\ldots1}{1\ldots m}(a-1)^0 - (a-1)^m$$

$$(a-2+1)^m-(a-2)^m = (a-2)^m + \frac{m}{1}(a-2)^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}(a-2)^{m-2} + \frac{m.m-1.m-3}{1.2.3}(a-2)^{m-3} + \ldots \frac{m\ldots1}{1\ldots m}(a-2)^0 - (a-2)^m$$

$$(a-3+1)^m-(a-3)^m=(a-3)^m+\frac{m}{1}(a-3)^{m-1}$$

$$+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}(a-3)^{m-2}+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}(a-3)^{m-3}$$

$$+\,\ldots\,.\,\frac{m\,\ldots\,.\,1}{1\,\ldots\,m}(a-3)^0-(a-3)^m$$

u. s. w.

Es ist daher

$$-\frac{a^m-(a-1)^m}{q}=-\frac{m}{1}\,\frac{(a-1)^{m-1}}{q}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times\frac{(a-1)^{m-2}}{q}-\ldots\frac{1}{q}$$

$$-\frac{(a-1)^m-(a-2)^m}{q^2}=-\frac{m}{1}\,\frac{(a-2)^{m-1}}{q^2}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times\frac{(a-2)^{m-2}}{q^2}-\ldots\frac{1}{q^2}$$

$$-(a-2)^m-(a-3)^m=-\frac{m}{1}\,\frac{(a-3)^{m-1}}{q^3}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times\frac{(a-3)^{m-2}}{q^3}-\ldots\frac{1}{q^3}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{(a-n+1)^m-(a-n)^m}{q^n}=-\frac{m}{1}\,\frac{(a-n)^{m-1}}{q^n}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\times\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}-\ldots\frac{1}{q^n}$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdruck, so ist

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(a^m+\int\frac{(a-n)^m}{q^n}\right)=a^m-$$

$$\frac{m\,(a-1)^{m-1}}{1\,.\,q}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,\frac{(a-1)^{m-2}}{q}-\ldots\ldots\frac{1}{q}$$

$$-\frac{m}{1}\,\frac{(a-2)}{q^2}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,\frac{(a-2)^{m-2}}{q^2}-\ldots\ldots\frac{1}{q^2}$$

$$-\frac{m}{1}\,\frac{(a-3)}{q^3}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,\frac{(a-3)^{m-2}}{q^3}-\ldots\frac{1}{q^3}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{m}{1}\,\frac{(a-n)}{q^n}-\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\,\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}-\ldots\ldots\frac{1}{q^n}-\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}$$

Oder:

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(a^m+\int\frac{(a-n)^m}{q^n}\right)=a^m-\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{q^n}-\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}-\ldots\ldots\int\frac{1}{q^n}-\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}$$

Folglich

$$\int\frac{(a-n)^m}{q^n}+a^m=\frac{q}{q-1}\left(a^m-\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{q^n}-\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}-\ldots\ldots\int\frac{1}{q^n}-\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}\right)$$

und

$$\int\frac{(a-n)^m}{q^n}=\left(\frac{q}{q-1}-\frac{q-1}{q-1}\right)a^m-\frac{q}{q-1}\left(\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{q^n}+\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}+\ldots\int\frac{1}{q^n}+\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{q-1}\times a^m-\frac{q}{q-1}\left(\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{q}+\frac{m.m-1}{1.2}\times\int\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}+\ldots\int\frac{1}{q^n}+\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}\right)$$

Wenn man n bis auf a zunehmen läßt, so wird das letzte Glied des in der Klammer befindlichen Ausdrucks oder $\frac{(a-n)^m}{q^{n+1}}=0$, und das vorletzte Glied oder $\int\frac{1}{q^n}$ wird $=\int\frac{1}{q^a}$. Für diesen Fall ist daher

$$\int\frac{(a-n)^m}{q^n}=\frac{1}{q-1}\times a^m-\frac{q}{q-1}\left(\frac{m}{1}\int\frac{(a-n)^{m-1}}{q^n}+\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{(a-n)^{m-2}}{q^n}+\ldots.m\int\frac{(a-n)^1}{q^n}+\int\frac{1}{q^a}\right)$$

Soll die Rente im 1ten Jahre b, im 2ten $b-1$, im 3ten $b-2$ u. s. w. betragen, so daß sie bis auf 0 abnimmt, so kann man in obiger Gleichung $b+1$ für a substituiren, und es ist alsdann

$$\int\frac{(b+1-n)^m}{q^n}=\frac{1}{q-1}\times(b+1)^m-\frac{q}{q-1}\left(m\int\frac{(b+1-n)^{m-1}}{q^n}+\frac{m.m-1}{1.2}\int\frac{(b+1-n)^{m-2}}{q^n}+\ldots m\int\frac{(b+1-n)^1}{q^n}+\int\frac{1}{q^{b+1}}\right)$$

wonach n bis $b+1$ zunimmt.

Wenn z. B. die Rente mit b anfängt und bis 0 abnehmen soll und $m = 1$ ist, so hat man

$$\int\frac{(b+1-n)}{q^n} = \frac{1}{q-1}\left(b+1-q\int\frac{1}{q^{b+1}}\right)$$

Nun ist $q\int\frac{1}{q^{b+1}} = q\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\ldots\frac{1}{q^{b+1}}\right)$

$$= 1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots\frac{1}{q^b}$$

$$= 1+\int\frac{1}{q^b}$$

Substituirt man diesen Werth in obiger Gleichung für $q\int\frac{1}{q^{b+1}}$, so ist

$$\int\frac{(b+1-n)}{q^n} = \frac{1}{q-1}\left(b+1-1-\int\frac{1}{q^b}\right)$$

$$= \frac{1}{q-1}\left(b-\int\frac{1}{q^b}\right)$$

in Uebereinstimmung mit der für den vorliegenden Fall im §. 180 hergeleiteten Formel.

Zweite Abtheilung.

Leibrenten.

Erster Abschnitt.

Verschiedene Methoden zur Berechnung der Leibrenten.

Unveränderliche u. veränderliche Leibrenten.

183. Ist die Einnahme der Leibrente in jedem Termin von gleicher Größe, so ist die Leibrente *unveränderlich*; sie kann aber auch, wie z. B. bei der Tontine, *veränderlich* seyn. Gewöhnlich sind die eigentlichen Leibrenten unveränderlich; die Methoden, deren man sich zur Berechnung derselben bedient, sind aber zum Theil von der Beschaffenheit, daß es auf dasselbe hinausläuft, als wenn sie nach verschiedenen Gesetzen jährlich größer oder kleiner würden. Hier finden

dann auch die im Vorhergehenden aufgestellten Berechnungsarten der veränderlichen Zeitrenten (welche, als solche, ebenfalls in Praxis nicht wohl vorkommen) ihre Hauptanwendung.

Berechnung der unveränderlichen Leibrenten vermittelst der Decremente.

184. Zur Vereinfachung der Leibrentenrechnung kann man die Decremente oder die auf einander folgenden Differenzen der in der Sterblichkeitstabelle enthaltenen Zahlen der Lebenden in Rechnung bringen; letztere wird dadurch vereinfacht, weil die Decremente kleinere Zahlen als diejenigen der Lebenden sind. Hierbei kann man auch noch weiter gehen, und aus demselben Grunde vermittelst der Differenzen der Decremente die Rechnung führen.

Zieht man z. B. nach der Tabelle von Deparcieux für die 12 letzten Jahre die Zahl der Lebenden succesiv von einander ab, und werden in gleicher Weise die gefundenen Decremente von einander subtrahirt, so erhält man folgende Zahlen:

Jahre.	Lebende.	Decremente.	Differenzen.
84	59		
		11	
85	48		1
		10	
86	38		1
		9	
87	29		2
		7	
88	22		1
		6	
89	16		1
		5	
90	11		1
		4	
91	7		1
		3	
92	4		1
		2	
93	2		1
		1	
94	1		1
		1	
95	0		0

Nach der im Vorhergehenden eingeführten Notation ist

$$a = 59,\ a_1 = 48,\ a_2 = 38,\ \text{u. s. w.}$$

Das erste Decrement ist $a - a_1 = 11$, das zweite $a_1 - a_2 = 10$, das dritte $a_2 - a_3 = 9$ u. s. w.

Zur Vereinfachung kann man

${}^d a$ für $a - a_1$, ${}^d a_1$ für $a_1 - a_2$, ${}^d a_2$ für $a_2 - a_3$ u. s. w. setzen.

Die Differenz vom ersten und zweiten Decrement ist $11 - 10 = 1$; diejenige vom zweiten und dritten Decrement ist $10 - 9 = 1$; diejenige vom dritten und vierten Decrement ist $9 - 7 = 2$ u. s. w.; oder nach obiger Notation;

$${}^d a - {}^d a_1 = 1,\ {}^d a_1 - {}^d a_2 = 1,\ {}^d a_2 - {}^d a_3 = 2 \text{ u. s. w.}$$

Zur Vereinfachung kann man

${}^{d^2} a$ für ${}^d a - {}^d a_1$, ${}^{d^2} a_1$ für ${}^d a_1 - {}^d a_2$ u. s. w. setzen, und in ähnlicher Weise die weitern Differenzen durch ${}^{d^3} a$, ${}^{d^4} a$ u. s. w. bezeichnen.

Nach §. 120 kann das Kapital R der Rente r berechnet werden vermittelst der Formel:

$$R = \frac{r}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\ldots \frac{a_x}{(1+p)^x}\right)$$

wonach auch, wenn man $1 + p = q$ setzt,

$$\frac{aR}{r} = \frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \ldots\ldots \frac{a_x}{q^x}$$

$$\text{und } \left(q-1\right)\frac{aR}{r} = \frac{a_1}{q^0} + \frac{a_2}{q^1} + \frac{a_3}{q^2} + \ldots\ldots \frac{a_x}{q^{x-1}}$$

$$- \frac{a_1}{q} - \frac{a_2}{q^2} - \ldots\ldots \frac{a_{x-1}}{q^{x-1}} - \frac{a_x}{q^x}$$

Substituirt man in dieser Gleichung $a - {}^d a$ für a_1 (also in Beziehung auf obiges Beispiel $59 - 11$ für 48), $a_1 - {}^d a_1$ für a_2 (oder $48 - 10$ für 38), $a_2 - {}^d a_2$ für a_3 (oder $38 - 9$ für 29) u. s. w. so ist

$$(q-1)\frac{aR}{r} = \frac{a - {}^d a}{q^0} + \frac{a_1 - {}^d a_1}{q^1} + \frac{a_2 - {}^d a_2}{q^2} + \ldots\ldots \frac{a_x - {}^d a_x}{q^x}$$

$$- \frac{a_1}{q^1} - \frac{a_2}{q^2} - \frac{a_3}{q^3} - \ldots\ldots \frac{a_x}{q^x}$$

$$= \frac{a}{q^0} - \frac{{}^d a}{q^0} + \frac{a_1}{q^1} - \frac{{}^d a_1}{q^1} + \frac{a_2}{q^2} - \frac{{}^d a_2}{q^2} + \ldots\ldots \frac{a_x}{q^x} - \frac{{}^d a_x}{q^x}$$

$$- \frac{a_1}{q^1} \qquad - \frac{a_2}{q^2} \qquad\qquad - \frac{a_x}{q^x}$$

$$= a - \left({}^{d}a + \frac{{}^{d}a_1}{q^1} + \frac{{}^{d}a_2}{q^2} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^x}\right)$$

Daher $\frac{aR}{r} = \frac{1}{q-1}\left(a - \left[{}^{d}a + \frac{{}^{d}a_1}{q^1} + \frac{{}^{d}a_2}{q^2} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^x}\right]\right)$

und $R = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{a}\left[{}^{d}a + \frac{{}^{d}a_1}{q^1} + \frac{{}^{d}a_2}{q^2} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^x}\right]\right)$

Soll z. B. das Kapital einer Leibrente von 100 fl. für eine 88-jährige Person nach der Tabelle von Deparcieux zum Zinsfuß 4 berechnet werden, so ist

$r = 100$, $q = \frac{4}{100}$ $a = 22$, $a_1 = 16$, $a_2 = 11$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$, $a_7 = 0$, ${}^{d}a = a - a_1 = 6$, ${}^{d}a_1 = a_1 - a_2 = 5$, ${}^{d}a_2 = a_2 - a_3 = 4$, ${}^{d}a_3 = a_3 - a_4 = 3$, ${}^{d}a_4 = a_4 - a_5 = 2$, ${}^{d}a_5 = a_5 - a_6 = 1$, ${}^{d}a_6 = a_6 - a_7 = 1$.

Daher

$$R = \frac{100}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{22}\left[6 + \frac{5}{1{,}04} + \frac{4}{1{,}04^2} + \frac{3}{1{,}04^3} + \frac{2}{1{,}04^4} + \frac{1}{1{,}04^5} + \frac{1}{1{,}04^6}\right]\right)$$

$$= \frac{100}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{22}\left[6 + 5 \times 0{,}9616 + 4 \times 0{,}9246 + 3 \times 0{,}8890 + 2 \times 0{,}8549 + 1 \times 0{,}8220 + 1 \times 0{,}7\,904\right]\right)$$

$$= \frac{100}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{22} \times 20{,}4956\right) = 171.$$

Wird die Berechnung vermittelst der Zahlen der Lebenden geführt, so ist

$$R = \frac{100}{22}\left(\frac{16}{1{,}04} + \frac{11}{1{,}04^2} + \frac{7}{1{,}04^3} + \frac{4}{1{,}04^4} + \frac{2}{1{,}04^5} + \frac{1}{1{,}04^6}\right) = \frac{100}{22}\left(16 \times 0{,}9616 + 11 \times 0{,}9246 + 7 \times 0{,}8890 + 4 \times 8549 + 2 \times 0{,}8220 + 7 \times 0{,}7904\right) = \frac{100}{22} \times 37{,}6332 = 171{,}06$$

was bis auf 0,06 mit dem Resultat der ersten Berechnung übereinstimmt.

Berechnung der unveränderlichen Leibrente vermittelst der Differenzen der Decremente.

185. Vermittelst der Differenzen der Decremente kann die Rechnung auf folgende Art geführt werden.

Bezeichnet man die in obiger Gleichung

$$R = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{a}\left({}^{d}a + \frac{{}^{d}a_1}{q^1} + \frac{{}^{d}a_2}{q^2} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^x}\right)\right)$$

enthaltene Reihe durch k, so ist

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)k = {}^{d}a + \frac{{}^{d}a_1}{q^1} + \frac{{}^{d}a_2}{q^2} + \frac{{}^{d}a_3}{q^3} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^x}$$
$$- \frac{{}^{d}a}{q} - \frac{{}^{d}a_1}{q^2} - \frac{{}^{d}a_2}{q^3} - \frac{{}^{d}a_3}{q^4} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^{x+1}}$$

Setzt man in dieser Gleichung ${}^{d}a - {}^{d^2}a$ für ${}^{d}a_1$, ${}^{d}a_1 - {}^{d^2}a_1$ für ${}^{d}a_2$, ${}^{d}a_2 - {}^{d^2}a_2$ für ${}^{d}a_3$ u. s. w.; so ist

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)k = {}^{d}a + \frac{{}^{d}a}{q^1} - \frac{{}^{d^2}a}{q^1} + \frac{{}^{d}a_1}{q^2} - \frac{{}^{d^2}a_1}{q^2} + \frac{{}^{d}a_2}{q^3}$$
$$- \frac{{}^{d^2}a_2}{q^3} + \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^{x+1}} - \frac{{}^{d^2}a_x}{q^{x+1}}$$
$$- \frac{{}^{d}a}{q^1} - \frac{{}^{d}a_1}{q^2} - \frac{{}^{d}a_2}{q^3} - \frac{{}^{d}a_3}{q^4} - \ldots \frac{{}^{d}a_x}{q^{x+1}} = {}^{d}a -$$
$$\left(\frac{{}^{d^2}a}{q^1} + \frac{{}^{d^2}a_1}{q^2} + \frac{{}^{d^2}a_2}{q^3} + \ldots \frac{{}^{d^2}a_x}{q^{x+1}}\right)$$

Daher $k = \frac{q}{q-1}\left({}^{d}a - \left(\frac{{}^{d^2}a}{q^1} + \frac{{}^{d^2}a_1}{q^2} + \frac{{}^{d^2}a^2}{q^3} + \ldots \frac{{}^{d^2}a_x}{q^{x+1}}\right)\right)$

und $R = \frac{r}{q-1}\left\{1 - \frac{q}{a(q-1)}\left({}^{d}a - \left(\frac{{}^{d^2}a}{q^1} + \frac{{}^{d^2}a_1}{q^2} + \ldots \frac{{}^{d^2}a_x}{q^{x+1}}\right)\right)\right\}$

In Beziehung auf obiges Beispiel ist

$$\begin{aligned}
{}^{d}a &= a - a_1 = 22 - 16 = 6\\
{}^{d^2}a &= {}^{d}a - {}^{d}a_1 = 6 - 5 = 1\\
{}^{d^2}a_1 &= {}^{d}a_1 - {}^{d}a_2 = 5 - 4 = 1\\
{}^{d^2}a_2 &= {}^{d}a_2 - {}^{d}a_3 = 4 - 3 = 1\\
{}^{d^2}a_3 &= {}^{d}a_3 - {}^{d}a_4 = 3 - 2 = 1\\
{}^{d^2}a_4 &= {}^{d}a_4 - {}^{d}a_5 = 2 - 1 = 1\\
{}^{d^2}a_5 &= {}^{d}a_5 - {}^{d}a_6 = 1 - 1 = 0\\
r &= 100,\ 1 + p = q = 1{,}04
\end{aligned}$$

Daher $R = \frac{100}{0{,}04}\left\{1 - \frac{1{,}04}{22 \times 0{,}04}\left(6 - \left(\frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \frac{1}{1{,}04^4} + \frac{1}{1{,}04^5} + \frac{1}{1{,}04^6} + \frac{1}{1{,}04^7}\right)\right)\right\} = \frac{100}{0{,}04} \times$

$\left\{1 - \frac{1{,}04}{0{,}88}\left(6 - 5{,}212\right)\right\} = \frac{100}{1{,}04}\left(1 - \frac{1{,}04}{0{,}88} \times 0{,}788\right) = 171{,}75$

was bis auf 0,75 mit den beiden frühern Resultaten übereinstimmt.

Berechnung der Leibrenten nach der Hypothese von Moivre.

186. In den frühern Jahren ist der Gang der Sterblichkeit sehr unregelmäßig; später wird derselbe mehr oder weniger gleichförmig. So kommen z. B. nach der Sterblichkeitstabelle von Halley vom 33ten bis zum 40ten Jahre 9, vom 48ten bis zum 52ten Jahre 11, vom 53ten bis zum 68ten Jahre 10 Sterbfälle auf's Jahr. Auf diese Beobachtung gründet sich die Hypothese von Moivre, *) daß die Abnahme der Zahl der Lebenden eine arithmetische Progression bildet und der Begründer derselben ist dabei von der Voraussetzung ausgegangen, daß sich die etwaigen Unregelmäßigkeiten im Gang der Sterblichkeit so gegen einander ausgleichen, daß, nach seiner Ansicht, der Fehler der auf dieser Annahme basirten Leibrentenrechnung unerheblich ist. Obgleich nun diese Hypotese mit den bisherigen Erfahrungen keineswegs genau übereinstimmt, so kann sie doch, gehörig modificirt, zur Auffindung von Näherungswerthen, namentlich bei der Berechnung der Verbindungsrenten, in Anwendung gebracht werden. Durch die Anwendung der Hypothese des gleichförmigen Absterbens wird die Berechnung deswegen vereinfacht, weil die Zähler der Brüche, aus deren Summe der Werth der Leibrente besteht, eine arithmetische Progression bilden, und also die Reihe durch eine allgemeine Formel ausgedrückt werden kann.

Um aber diese Hypothese in Anwendung bringen zu können, mußte Moivre eine bestimmte Lebensgränze annehmen, und er setzte dafür 86 Jahre an, weil, nach seiner Ansicht die Beispiele von länger lebenden Personen so selten seyen, daß man keine Rücksicht darauf zu nehmen habe. Nach dieser Annahme stirbt von 86 zugleich gebornen Personen jährlich eine, so daß sie nach 86 Jahren ausgestorben sind, und also die Anzahl der in irgend einem Alter noch lebenden Personen der Anzahl von Jahren gleich ist, welche zwischen dieser Alterszahl und 86 Jahren liegen. Diese Zahl nennt Moivre die Lebensergänzung einer Person. Die Sterblichkeitstabelle, welche dieser Annahme entspricht, ist daher folgende:

*) Doctrine of Chances. London, 1756.

Jahre.	Lebende.
0	86
1	85
2	84
3	83
⋮	⋮
40	46
41	45
⋮	⋮
86	0

Hiernach ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß eine 40-jährige Person nach einem Jahre noch am Leben seyn werde $= \frac{45}{46}$.

Obige Tabelle wird durch die Gleichung $y = 86 - x$ repräsentirt. Ist z. B. das Alter $x = 40$, so ist die Anzahl der Lebenden $= 86 - 40 = 46$.

Es ist indessen nicht nöthig, die von Moivre als höchstes Lebensziel angenommene Alterszahl gelten zu lassen, und es läßt sich dafür jede andere, mit den wirklichen Beobachtungen besser übereinstimmde Lebensgränze substituiren.

Wendet man diese Hypothese auf die Berechnung der einfachen Leibrente an, so ist, nach §. 120

$$R = \frac{r}{a}\left(\frac{a-1}{1+p} + \frac{a-2}{(1+p)^2} + \frac{a-3}{(1+p)^3} + \cdots \frac{a-a}{(1+p)^a}\right)$$

Nun wird, nach §. 180, die Summe der in der Klammer enthaltenen Reihe ausgedrückt durch

$$\frac{1}{q-1}\left(a - 1 - \int \frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

in welchem Ausdruck $q = p + 1$; daher ist

$$R = \frac{r}{a(q-1)}\left(a - 1 - \int \frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

Soll z. B. der Werth einer Leibrente von 1 fl. für eine Person von 40 Jahren zum Zinsfuß 5 berechnet werden, so ist $r = 1, a = 86 - 40 = 46, n = 46, \int \frac{1}{1{,}05^{45}} = 17{,}774$; daher

$$R = \frac{1}{46 \times 0{,}05}\left(46 - 1 - 17{,}774\right) = \frac{1}{2{,}3} \times 27{,}226 = 11{,}83$$

Dieſelbe Leibrente nach der Tabelle von Deparcieux berechnet, giebt 13,46 für den Werth derſelben, was um 1,63, alſo um mehr als dem Betrag einer Jahresrente vom obigen Reſultate abweicht.

Die Hypotheſe von Moivre läßt ſich indeſſen ohne merklichen Fehler auf die Berechnung der Leibrenten in der Weiſe anwenden, daß man nur für denjenigen Theil des Lebens einer Perſon, für welchen die jährlichen Decremente wenig von einander abweichen, ſolche als conſtant betrachtet, und für den übrigen Theil mit den Zahlen der Sterblichkeitstabelle die Rechnung führt.

Bezeichnet z. B. n die Anzahl der Jahre, für welche die Zahl der Lebenden jährlich um gleichviel abnimmt, iſt ferner h die Anzahl der Lebenden von dem Alter der Perſon, für welche die Leibrente berechnet werden ſoll, und bezeichnet a die Anzahl der Lebenden von einem um n Jahre höhern Alter, und d die gleiche jährliche Abnahme der Lebenden, ſo wird der Werth der Leibrente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{h}\left(\frac{h-d}{1+p}+\frac{h-2d}{(1+p)^2}+\frac{h-3d}{(1+p)^3}+\ldots\frac{h-nd}{(1+p)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_2}{(1+p)^{n+2}}+\frac{a_3}{(1+p)^{n+3}}+\ldots.\right)$$

Dieſer Ausdruck läßt ſich in die beiden folgenden zerlegen:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{h-d}{1+p}+\frac{h-2d}{(1+p)^2}+\frac{h-3d}{(1+p)^3}+\ldots.\frac{h-nd}{(1+p)^n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_2}{(1+p)^{n+2}}+\frac{a_3}{(1+p)^{n+3}}+\ldots.\right)\right.$$

Die erſte Reihe läßt ſich in die beiden folgenden zerlegen:

$$\frac{1}{1+p}+\frac{1}{(1+p)^2}+\frac{1}{(1+p)^3}+\ldots.\frac{1}{(1+p)^n}$$
$$-\frac{d}{h}\left(\frac{1}{1+p}+\frac{2}{(1+p)^2}+\frac{3}{(1+p)^3}+\ldots\frac{n}{(1+p)^n}\right.$$

Die Summe der letztern Reihe wird nach §. 178 ausgedrückt durch

$$\frac{d}{h}\times\frac{1}{p}\left(1+\int\frac{1}{(1+p)^{n-1}}-\frac{n}{(1+p)^n}\right)$$

Der Totalwerth der Rente iſt demnach

$$\int\frac{1}{(1+p)^n}-\frac{d}{hp}\left(1+\int\frac{1}{(1+p)^{n-1}}-\frac{n}{(1+p)^n}\right)+$$
$$\frac{1}{h}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_2}{(1+p)^{n+2}}+\ldots\right)$$

Wenn nun nach irgend einer Sterblichkeitstabelle die Zahl der Lebenden vom *k*ten bis zum *l*ten Alter faſt gleichförmig zunimmt, und man den Werth einer Leibrente für eine Perſon von *l* Jahren berechnet, ſo läßt ſich daraus vermittelſt obiger Formel der Werth einer Leibrente für eine Perſon von jedem Alter zwiſchen *k* und *l* Jahren näherungsweiſe leicht beſtimmen. Nach der Nordhamptoner Tabelle (IX) z. B. nimmt die Zahl der Lebenden von 20 bis zu 80 Jahren ſo gleichförmig ab, daß man die Reihe derſelben ohne merklichen Fehler als eine arithmetiſche Progreſſion betrachten kann. Bei der Anwendung obiger Formel hat man aber für die Differenz *d* dieſer Progreſſion den der Sterblichkeitstabelle entſprechenden Werth zu ſubſtituiren, und man kann dafür ohne merklichen Fehler $\frac{h-a}{n}$, als Durchſchnittszahl anſetzen.

Für die Northamptoner Tabelle iſt $h = 5132$, $a = 469$, $n = 80 - 20 = 60$ und $d = \frac{5132-469}{60} = 77.$

Subſtituirt man $\frac{h-a}{n}$ für *d* in obiger Formel, ſo wird der Werth der Rente ausgedrückt durch

$$\int\frac{1}{(1+p)^n}-\frac{h-a}{hnp}\left(1+\int\frac{1}{(1+p)^{n-1}}-\frac{n}{(1+p)^n}\right)+\frac{1}{h}\times$$
$$\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_2}{(1+p)^{n+2}}+\frac{a_3}{(1+p)^{n+3}}+\ldots\right)$$

Nach der Northamptoner Tabelle wird daher der Werth der Leibrente ausgedrückt durch

$$\int\frac{1}{(1+p)^n}-\frac{77}{hp}\left(1+\int\frac{1}{(1+p)^{n-1}}-\frac{n}{(1+p)^n}\right)+\frac{1}{h}\times$$
$$\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_2}{(1+p)^{n+2}}+\frac{a_3}{(1+p)^{n+3}}+\ldots\right)$$

Soll z. B. der Werth der Leibrente 1 zum Zinsfuß 5 für eine 20-jährige Perſon beſtimmt werden, ſo iſt $n = 80 - 20 = 60$, $h = 5132$; ferner

$\int \frac{1}{1{,}05^{60}} = 18{,}9293, \int \frac{1}{1{,}05^{59}} = 18{,}8758, \frac{60}{1{,}05^{60}} = 60 \times$ $0{,}0536 = 3{,}216$, $hp = 5132 \times 0{,}05 = 256{,}6$, $\frac{77}{255{,}6} = 0{,}3$

Daher

$$\int \frac{1}{1{,}05^{60}} - \frac{77}{256{,}6}\left(1 + \int \frac{1}{1{,}05^{59}} - \frac{60}{1{,}05^{60}}\right) = 18{,}9293$$
$$- 0{,}3\,(1 + 18{,}8758 - 3{,}216) = 18{,}9293 - 4{,}9979 = 13{,}9314.$$

Anstatt den Werth von $\frac{1}{h}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}} + \frac{a_2}{(1+p)^{n+1}} + \ldots.\right)$ zu berechnen, wollen wir denselben aus einer nach der Northamptoner Sterblichkeitstabelle berechneten Leibrententabelle herleiten. Der Werth der Leibrente 1 für eine um n Jahre ältere Person, also für eine Person von $20 + n$ Jahren, wird ausgedrückt durch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right)$$

Multiplicirt man diesen Werth mit $\frac{a}{h(1+p)^n}$ so erhält man

$$\frac{1}{h}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{n+1}} + \frac{a_2}{(1+p)^{n+2}} + \frac{a_3}{(1+p)^{n+3}} + \ldots\right)$$

Nun drückt $\frac{a}{h}$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß eine 20-jährige Person noch am Leben seyn werde, und durch die Multiplication mit $\frac{1}{(1+p)^n}$ wird $\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \ldots\right)$ auf den gegenwärtigen Werth reducirt.

Der Werth einer für eine 80-jährige Person zum Zinsfuß 5, nach der Nordhamptoner Sterblichkeitstabelle berechneten Leibrente 1 ist 3,515; die Wahrscheinlichkeit, daß eine 20-jährige Person nach 60 Jahren noch am Leben seyn werde, ist nach der angeführten Tabelle $= \frac{469}{5132} = 0{,}0913$, und der gegenwärtige Werth von 1 für 60 Jahre zu 5 Procent ist $= 0{,}0536$; daher

$$\frac{a}{h(1+p)^n} = 0{,}0913 \times 0{,}0536 = 0{,}0049,$$

und $3{,}515 \times 0{,}0049 = 0{,}0173$.

Der Totalwerth der Leibrente ist demnach $= 13{,}9314 + 0{,}0173 = 13{,}9487$ was um etwas mehr als 0,06 vom Werth

14, welcher sich aus der durchgängig nach der Northamptoner Tabelle angestellten Berechnung ergiebt, abweicht.

Aus dem Obigen geht, in Mitbeziehung auf die im §. 132 hergeleitete Formel für die aufgeschobene lebenslängliche Rente zugleich hervor, daß man den Werth derselben erhält, wenn man denjenigen einer Rente für eine Person, welche so viel Jahre mehr zählt, als für welche die Rente aufgeschoben werden soll, mit der Wahrscheinlichkeit, daß der Versicherte zur entsprechenden Zeit noch am Leben seyn werde, multiplicirt, und von dem solchergestalt erhaltenen Werth der Rente den gegenwärtigen Werth berechnet.

Die Moivre'sche Hypothese läßt sich endlich, wie wir gesehen haben, wenigstens für diejenigen Perioden der Tabelle, in welchen die Decremente so wenig von einander abweichen, daß man sie als constant betrachten kann, zur Vereinfachung der Rechnung unbedenklich anwenden, also insbesondere auf die aufgeschobene Leibrente, so wie auf die Berechnung der Prämien für temporäre Lebensversicherungen.

Die nach der Hypothese berechnete Leibrente läßt sich überdem mit derjenigen einer erfahrungsmäßigen Sterblichkeitsordnung mehr in Uebereinstimmung bringen, wenn man die aus der Sterblichkeitstabelle berechnete und mit 2 multiplicirte mittlere Lebensdauer (§. 117) als Lebensergänzung ansetzt, und hiernach die Leibrente berechnet. Denn nach der Moivre'schen Hypothese ist die mittlere Lebensdauer einer Person der Hälfte ihrer Lebensergänzung gleich; was wie folgt bewiesen werden kann. Die mittlere Lebensdauer wird ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots}{a} \quad (\S.\ 117)$$

Nun ist (§. 184)

$$\begin{aligned}
a_1 &= {}^d a_1 + {}^d a_2 + {}^d a_3 + {}^d a_4 + \ldots + {}^d a_x \\
a_2 &= {}^d a_2 + {}^d a_3 + {}^d a_4 + \ldots + {}^d a_x \\
a_3 &= {}^d a_3 + {}^d a_4 + \ldots + {}^d a_x \\
a_4 &= {}^d a_4 + \ldots + {}^d a_x \\
&\text{ꝛc. ꝛc.}
\end{aligned}$$

Daher

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_x = {}^d a_1 + 2\,{}^d a_2 + 3\,{}^d a_3 + 4\,{}^d a_4 + \ldots + (x-1)\,{}^d a_{x-1}$$

in welcher Gleichung $x\,{}^{d}a_x$ weggelassen ist, weil $a_x = 0$ ist; denn z. B. für folgende Tabelle

Jahre.	Lebende.
82	4
83	3
84	2
85	1
86	0

ist $a = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0$; und überhaupt, wenn m das Alter der Person, $m + x$ das höchste Alter in der Tabelle, und also x die Lebensergänzung bezeichnet, so ist $a_x = 0$.

Weil die Decremente einander gleich sind, so ist

$${}^{d}a = {}^{d}a_1 = {}^{d}a_2 = {}^{d}a_3 \text{ u. s. w. und folglich}$$

$${}^{d}a_1 + 2\,{}^{d}a_2 + 3\,{}^{d}a_3 + \ldots (x-1)\,{}^{d}a_{x-1} = {}^{d}a(1+2+\ldots x-1) = \frac{{}^{d}a\;x\;(x-1)}{2};$$

die mittlere Lebensdauer ist folglich $= \frac{{}^{d}a\,x\,(x-1)}{2\,a} + \frac{1}{2}$; weil ferner $a = x\,{}^{d}a$, indem die zu irgend einem Alter gehörige Anzahl von Lebenden aus der Summe aller nachfolgenden Decremente besteht, so erhält man durch Substitution

$$\frac{{}^{d}a\,x\,(x-1)}{2\,x\,{}^{d}a} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

Weil x die Lebensergänzung ist, so ist demnach die Hälfte derselben der mittleren Lebensdauer gleich, und mithin läßt sich das Resultat der nach der Hypothese angestellten Leibrentenrechnung demjenigen der gewöhnlichen Berechnung näher bringen, wenn man die aus der Sterblichkeitstabelle sich ergebende mittlere Lebensdauer, mit 2 multiplicirt, als Lebensergänzung in Rechnung bringt.

Wird z. B. für das Alter von 56 Jahren zum Zinsfuß 4 der Werth der Leibrente 1 nach der Hypothese berechnet, so ist nach der Formel (§. 186)

$$R = \frac{r}{a\ (q-1)}\left(a - 1 - \int\frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

$r = 1$, $a = 86 - 56 = 30 = n$, $q = 1{,}04$ und

$$\frac{1}{30 \times 0{,}04}\left(30 - 1 - \int\frac{1}{1{,}04^{29}}\right) = 0{,}8333\ (30 - 1 - 16{,}9837) = 0{,}8333 \times 12{,}0163 = 10{,}0131$$

Nach der Sterblichkeitstabelle von Süßmilch ist die mittlere Lebensdauer für eine Person von 56 Jahren = 14,01. Setzt man dafür 14 an, und substituirt man $2 \times 14 = 18$ für a in obige Formel, so ist

$$R = \frac{1}{28 \times 0{,}04}\left(28 - 1 - \int\frac{1}{1{,}04^{27}}\right) = 0{,}8928\ (28 - 1 - 16{,}3296) = 0{,}8928 \times 10{,}6704 = 9{,}5265.$$

Berechnet man den Werth der Leibrente nach der Sterblichkeitstabelle von Süßmilch, so erhält man 9,3918. Der nach der modificirten Anwendung der Hypothese erhaltene Werth stimmt damit bis auf 0,13147 überein; während dagegen das Resultat der ersten Berechnung um 0,6213 vom richtigen Resultat abweicht.

Wenn die doppelte mittlere Lebensdauer aus einer ganzen Zahl und einem Decimalbruch besteht, was gewöhlich der Fall ist, so wird der Werth von $\int\frac{1}{q^{n-1}}$ auf folgende Art gefunden.

Ist z. B. die doppelte mittlere Lebensdauer = 51,42 und $q = 1{,}04$, so hat man, in Beziehung auf $\int\frac{1}{q^{n-1}}$, den Werth von $\int\frac{1}{1{,}04^{50{,}42}}$ zu bestimmen. Nun ist $\int\frac{1}{1{,}04^{51}} = 21{,}6174$ und $\int\frac{1}{1{,}04^{50}} = 21{,}4821$; daher $\int\frac{1}{1{,}04^{51}} - \int\frac{1}{1{,}04^{50}} = 0{,}1353$. Wenn also für 1 die Differenz = 0,1353 ist, so ist sie $0{,}42 \times 0{,}1353 = 0{,}0568$ für 0,42; daher $\int\frac{1}{1{,}04^{50{,}42}} = 21{,}4821 + 0{,}0568 = 21{,}5389$.

Die nach der Moivre'schen Hypothese hergeleitete Formel zur Berechnung der Leibrenten kann auch dazu dienen, den irgend einem Zinsfuße entsprechenden Werth einer Leibrente aus einem bekannten, nach einem andern Zinsfuß berechneten Werthe derselben Leibrente herzuleiten. Man kann nämlich annehmen, daß

sich die nach der Sterblichkeitstabelle zu zweierlei Zinsfüßen berechneten Werthe einer und derselben Leibrente zu einander verhalten, wie die zu denselben Zinsfüßen nach der Hypothese berechneten Werthe.

Der für das Alter von 56 Jahren zum Zinsfuß 4 nach der Hypothese berechnete Werth der Leibrente 1 ist, zufolge obiger Berechnung, = 10,0131. Für den Zinsfuß 5 hat man

$$\frac{1}{30\times 0{,}05}\left(30 - 1 - \int \frac{1}{1{,}05^{29}}\right) = 0{,}6666\ (30 - 1 - 15{,}1411) = 0{,}6666 \times 13{,}8589 = 9{,}2383.$$

Der nach der Tabelle von Süßmilch und zum Zinsfuß 4 berechnete Werth der Leibrente ist = 9,3918. Um nun hieraus den Werth der Leibrente für den Zinsfuß 5 herzuleiten, setzt man

$$10{,}0131 : 9{,}2383 = 9{,}3918 : x = 8{,}6650.$$

Die unmittelbare Berechnung nach der angeführten Sterblichkeitstabelle giebt 8,6874, was um 0,0224 vom obigen Resultate abweicht.

Ein anderes, aber weniger Genauigkeit gewährendes Verfahren beruht auf der Annahme, daß die nach zweierlei Zinsfüßen berechneten Leibrentenwerthe sich wie die nach denselben Zinsfüßen und für den Zeitraum der mittleren Lebensdauer berechneten Zeitrentenwerthe verhalten.

So ist z. B. nach der Sterblichkeitstabelle von Süßmilch die mittlere Lebensdauer für eine Person von 56 Jahren = 14,01. Setzt man dafür 14 Jahre an, so sind die zu den Zinsfüßen 4 und 5 berechneten Werthe einer 14-jährigen Rente

$$\int \frac{1}{1{,}04^{14}} = 10{,}5632,\quad \int \frac{1}{1{,}05^{14}} = 9{,}8987$$

Da nun der unmittelbar nach der Sterblichkeitstabelle zum Zinsfuß 4 berechnete Werth der Leibrente 1 für eine 56-jährige Person = 9,3918, so ergiebt sich der dem Zinsfuß 5 entsprechende Werth der Leibrente aus der Proportion:

$$10{,}5632 : 9{,}8987 = 9{,}3918 : x = 8{,}8009.$$

Dieses Resultat weicht von demjenigen der unmittelbaren Berechnung um 8,8009 — 8,6874 = 0,1135 ab, während nach dem erstern Verfahren der Fehler nur 0,0224 beträgt.

Von besondern Bedingungen des Leibrentenvertrags.

187. Der Leibrentenvertrag kann auch die Bedingung enthalten, daß die Leibrente beim Tode des Rentners den Erben desselben noch einmal nach Verhältniß der im letzten Jahre ver-

lebten Zeit ausgezahlt werde; und zwar entweder zu Ende des Jahres oder in der Zwischenzeit.

Nehmen wir vorerst an, daß für jeden Abgehenden zu Ende des Jahres in welchem er stirbt, die Rente 1 noch einmal ausgezahlt werde, so hat, nach der bisherigen Bezeichnung, die Leibrentenkasse zu Ende des 1ten Jahres ^da, zu Ende des zweiten Jahres $^da_1$, zu Ende des dritten Jahres $^da_2$ u. s. w., zu Ende des $x$ten Jahres $^da_{x-1}$ zu zahlen. Der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen auf die Anzahl a der anfänglichen Rentner vertheilt giebt

$$\frac{1}{a}\left(\frac{^da}{1+p}+\frac{^da_1}{(1+p)^2}+\frac{^da_2}{(1+p)^3}+\cdots\frac{^da_{x-1}}{(1+p)^x}\right)$$

für den durch m zu bezeichnenden Werth des nach dem Tode des Rentners zahlbaren Betrags.

Man kann aber auch setzen:

$$m=\frac{1}{a(1+p)}\left(\frac{^da_0}{(1+p)^0}+\frac{^da_1}{(1+p)^1}+\frac{^da_2}{(1+p)^2}+\cdots\cdots\frac{^da_x}{(1+p)^x}\right)=\frac{1}{a(1+p)}\times\int\frac{^da_0}{(1+p)^0}$$

Nun hat man aber auch für den Werth der Leibrente 1 (§. 184)

$$R=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{a}\left[\frac{^da_0}{(1+p)^0}+\frac{^da_1}{(1+p)^1}+\frac{^da_2}{(1+p)^2}+\cdots\frac{^da_x}{(1+p)^x}\right]\right)=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{a}\int\frac{^da_0}{(1+p)^0}\right);\text{ daher auch}$$

$$R=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap}\int\frac{^da_0}{(1+p)^0}=\frac{1}{p}-\frac{(1+p)m}{p}$$

$$\text{und } m=-\frac{1-pR}{1+p}$$

Soll die letzte Rentenzahlung nach Verhältniß der im Sterbjahre noch verlebten Zeit geschehen, und nimmt man an, daß die Sterbfälle sich gleichförmig auf das ganze Jahr vertheilen, nimmt man ferner an, daß die Auszahlungen zu Ende des Sterbjahres stattfinden, so lassen sich die entsprechenden Werthe für halbjährige, vierteljährige ꝛc. Auszahlungen folgenderweise bestimmen.

Sollen nur Diejenigen, welche ein halbes Jahr durchleben, noch einer halbjährigen Auszahlung theilhaftig werden, so leben

in der Mitte des ersten Jahres von den in diesem Jahre abgehenden Personen noch $\frac{1}{2}{}^{d}a$, in der Mitte des zweiten Jahres $\frac{1}{2}{}^{d}a_1$, des dritten Jahres $\frac{1}{2}{}^{d}a_2$ u. s. w. Weil ferner Jeder nur die Hälfte des Rentenbetrags 1 bezieht, so erhalten sie nach und nach zusammen $\frac{1}{4}{}^{d}a + \frac{1}{4}{}^{d}a_1 + \frac{1}{4}{}^{d}a_2 + \ldots$ Die Summe der gegenwärtigen Werthe dieser Zahlungen auf die Zahl der anfänglich vorhandenen Rentner vertheilt giebt

$$\frac{1}{4a}\left(\frac{{}^{d}a}{1+p} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^2} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \frac{m}{4}$$

Sollen Diejenigen, welche ein Vierteljahr durchleben, noch einer vierteljährigen Auszahlung theilhaftig werden, so leben zu Ende des ersten Vierteljahres $\frac{3}{4}$ des Decrements, zu Ende des zweiten Vierteljahres $\frac{2}{4}$, und zu Ende des dritten Vierteljahres $\frac{1}{4}$; weil ferner für jeden Abgehenden $\frac{1}{4}$ des Rentenbetrags ausgezahlt wird, so erhalten die Interessenten nach und nach zusammen im ersten Jahr $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right){}^{d}a$ $= \frac{3}{8}{}^{d}a$; in gleicher Weise erhält man $\frac{3}{8}{}^{d}a_1$ für die Summe der Auszahlungen des zweiten Jahres, $\frac{3}{8}{}^{d}a_2$ für diejenige des dritten Jahres u. s. w. Der gegenwärtige Werth dieser Auszahlungen auf die Zahl der anfänglich vorhandenen Rentner vertheilt giebt

$$\frac{3}{8a}\left(\frac{{}^{d}a}{1+p} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^2} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \frac{3m}{8}$$

Soll überhaupt für Diejenigen, welche $\frac{1}{n}$ Jahr durchleben $\frac{1}{n}$ des Rentenbetrags 1 zu Ende des Jahres ausgezahlt werden, so betragen die Zahlungen des ersten Jahres

$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} {}^{d}a + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} {}^{d}a + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n} {}^{d}a + \ldots . \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} {}^{d}a = \frac{n(n-1)}{2n^2} {}^{d}a = \frac{n-1}{2n} {}^{d}a$. In gleicher Weise erhält man für die Summe der Zahlungen des zweiten Jahres $\frac{n-1}{2n} {}^{d}a_1$, u. s. w.

Die Summe der gegenwärtigen Werthe aller Zahlungen auf die Zahl der anfänglich vorhandenen Rentner vertheilt giebt

$$\frac{n-1}{2na}\left(\frac{{}^{d}a}{1+p} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^2} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \frac{(n-1)m}{2n}$$

Wenn man endlich annimmt, daß die Auszahlung für jeden kleinsten Theil der Zeit geschieht, und ist also n unendlich groß, so reducirt sich der obige Ausdruck auf $\frac{m}{2}$. Mehr braucht man also nicht, so klein $\frac{1}{n}$ auch angenommen werden mag, zum Werth R der Leibrenten zuzulegen, und der vollständige Werth der Leibrente ist hiernach $R + \frac{m}{2}$. Weil endlich

$$m = \frac{1-pR}{1+p}$$

so wird der in Rede stehende Werth auch ausgedrückt durch

$$R + \frac{1-pR}{2(1+p)} = \left(1 - \frac{p}{2(1+p)}\right)R + \frac{1}{2(1+p)}$$

Vom Werth der halbjährlich, vierteljährlich ꝛc. zahlbaren Leibrente.

188. Nimmt man an, daß die Leibrente nicht von Jahr zu Jahr, sondern in kleinern Terminen ausgezahlt wird, und zwar nach Verhältniß der abgelaufenen Theile des Jahres, so daß für die Jahresrente 1 die halbjährliche Rente ½, die vierteljährliche Rente ¼ u. s. w. beträgt, so müssen die gegenwärtigen Werthe der halbjährlichen, vierteljährlichen ꝛc. Zahlungen bei der Werthsbestimmung der Renten in Anschlag gebracht werden, und dies kann auf zweierlei Art geschehen. Man kann nämlich die halbjährlichen, vierteljährlichen ꝛc. Zinsen zu einem solchen Zinsfuße in Rechnung bringen, daß dadurch ein Kapital mit den Zinseszinsen für halbjährliche, vierteljährliche Termine eben so hoch in derselben Zeit als durch den jährlichen Zinsfuß p gebracht wird (§. 75), oder aber den Zinsfuß zu $\frac{p}{2}$

für ein Halbjahr, zu $\frac{p}{4}$ für ein Vierteljahr und überhaupt zu $\frac{p}{n}$ für $\frac{1}{n}$ Jahr anſetzen. Im letztern Falle fällt der Werth der Leibrente etwas größer als im andern Falle aus.

Werden die Zinſen nach der erſten Art in Rechnung gebracht, und iſt der Jahreszinsfuß p, ſo wird für halbjährliche Zinſeszinſen mit $(1+p)^{\frac{1}{2}}$, für vierteljährliche Zinſeszinſen mit $(1+p)^{\frac{1}{4}}$, und überhaupt für $\frac{1}{n}$ jährlichen Zinſeszinſen mit $(1+p)^{\frac{1}{n}}$ gerechnet §. 75).

Für halbjährliche Rentenzahlungen iſt hiernach

$$R = \frac{1}{2a}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_1}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_2}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_2}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right) +$$

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{a_1}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_2}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_3}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right) +$$

$$\frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}}{2a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{2}R + \frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}}{2}R = \frac{1}{2}\left((1+p)^{\frac{1}{2}} + 1\right)R$$

Wenn außerdem für jeden Abgehenden, welcher die Hälfte ſeines Sterbjahres durchlebt hat, der halbe Rentenbetrag, alſo $\frac{1}{2}$, und zwar zu Ende des Halbjahres ausgezahlt werden ſoll, ſo iſt der Werth dieſer Auszahlungen nicht wie im §. 187 $\frac{m}{4}$ oder

$$\frac{1}{4a}\left(\frac{{}^{d}a}{1-p} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^2} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^3} + \ldots.\right)$$

ſondern $\frac{1}{4a}\left(\frac{{}^{d}a}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \ldots\right) =$

$$\frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}}{4a}\left(\frac{{}^{d}a}{1+p} + \frac{{}^{d}a_1}{(1+p)^2} + \frac{{}^{d}a_2}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}m}{4}$$

Der vollſtändige Werth der halbjährlich zahlbaren Leibrente wird daher ausgedrückt durch $\frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}+1}{2}$. $R + \frac{(1+p)^{\frac{1}{2}}}{4}m$,

oder, wenn man für m seinen Werth $\frac{1-pR}{1+p}$ (§. 187) setzt, durch

$$\frac{(1+p)^{\frac{1}{4}}+1}{2}R+\frac{(1+p)^{\frac{1}{4}}}{4}\left(\frac{1-pR}{1+p}\right)$$

Setzt man $p=0{,}04$, so erhält man

$$\frac{2{,}019804}{2}R+0{,}254951\left(\frac{1}{1{,}04}-\frac{R}{26}\right)$$

oder $1{,}009902\,R+0{,}245145-0{,}009805\,R$

oder $1{,}000097\,R+0{,}245145$

oder $R+\frac{0{,}245145}{1{,}000097}=R+0{,}24512$

oder sehr nahe $R+\frac{1}{4}$.

Für $p=0{,}05$ erhält man in gleicher Weise $1{,}000149\,R+0{,}243977$ oder $R+\frac{0{,}243977}{1{,}000149}=R+0{,}24394$, oder wieder sehr nahe $R+\frac{1}{4}$.

Für vierteljährliche Termine erhalten Diejenigen, welche das ganze Jahr durchleben, zu Ende jedes Jahres $\frac{1}{4}$ der Rente 1, und der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen ist

$$\frac{(1+p)^{\frac{3}{4}}+(1+p)^{\frac{1}{2}}+(1+p)^{\frac{1}{4}}+1}{4}R$$

Sodann sind für die im Laufe jedes Jahres Abgehenden drei Zahlungen zu machen, nämlich $\frac{1}{4}$ zu Ende des ersten Quartals an diejenigen drei Viertheile des Decrements, die alsdann noch leben; $\frac{1}{4}$ zu Ende des zweiten Quartals an die noch lebende Hälfte des Decrements, und $\frac{1}{4}$ zu Ende des dritten Quartals an das alsdann noch lebende letzte Viertheil. Der gegenwärtige Werth dieser Zahlungen ist

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}(1+p)^{\frac{3}{4}}m+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1+p)^{\frac{1}{2}}m+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1+p)^{\frac{1}{4}}m$$
$$=\frac{3(1+p)^{\frac{3}{4}}+2(1+p)^{\frac{1}{2}}+(1+p)^{\frac{1}{4}}}{16}m$$

Der vollständige Werth der vierteljährlich zahlbaren Rente wird demnach ausgedrückt durch

$$\frac{1+p^{\frac{3}{4}}+(1+p)^{\frac{1}{2}}+(1+p)^{\frac{1}{4}}+1}{4}R+$$
$$\frac{3(1+p)^{\frac{3}{4}}+2(1+p)^{\frac{1}{2}}+(1+p)^{\frac{1}{4}}}{16}m$$

Setzt man für m seinen Werth und $p=0{,}04$, so erhält man

$1{,}014877\,\mathbf{R} + 0{,}383688\,m = 1{,}01487\ \mathbf{R} + 0{,}383688\left(\frac{1}{1{,}04} - \frac{\mathbf{R}}{26}\right) = 1{,}000120\ \mathbf{R} + 0{,}368931$ oder $\mathbf{R} + \frac{0{,}368931}{1{,}000120} =$ 0,36888 oder beinahe $\mathbf{R} + \frac{3}{8}$. Für $p = 0{,}05$ erhält man ebenfalls beinahe $\mathbf{R} + \frac{3}{8}$.

Soll überhaupt die Rente in n Terminen des Jahres jedesmal mit $\frac{1}{n}$ ausgezahlt werden, so hat man zu berechnen, was die das ganze Jahr durchlebenden Rentner erhalten, und was für die im Laufe aller Jahre Abgehenden im Sterbjahre ausgezahlt wird. Weil die terminweise Zahlung $\frac{1}{n}$ der jährlichen Rente beträgt, so wird nach dem Vorhergehenden der gegenwärtige Werth des erstern Theils der Rente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{n}\left((1+p)^{\frac{n-1}{n}} + (1+p)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots 1\right)\mathbf{R} = \frac{1}{n} \times \frac{p}{(1+p)^{\frac{1}{n}} - 1} \times \mathbf{R}$$

Sodann ist die Anzahl der Abgehenden, für welche noch eine einmalige Zahlung geleistet wird, nach Verlauf von $\frac{1}{n}$ des Jahres $= \frac{n-1}{n}$ des dem Alter entsprechenden Decrements; nach Verlauf von $\frac{2}{n}$ des Jahres $= \frac{n-2}{n}$ des Decrements, und überhaupt nach Verlauf von $\frac{m}{n}$ des Jahres $\frac{n-m}{n}$ des Decrements. Weil ferner jede terminweise Zahlung durch Multiplication mit $(1+p)^{\frac{n-m}{n}}$ auf den Anfang des Jahres zurückgeführt werden muß, so ist der Werth dieser Zahlungen aller Jahre für jeden Rentner

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}(1+p)^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-2}{n}(1+p)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots \frac{1}{n}(1+p)^{\frac{1}{n}}\right)m$$

$$= \frac{1}{n^2}(1+p)\left\{\frac{n-1}{(1+p)^{\frac{1}{n}}} + \frac{n-2}{(1+p)^{\frac{2}{n}}} + \ldots \frac{n-(n-1)}{(1+p)^{\frac{n-1}{n}}}\right\} m$$

Die Summe der in diesem Ausdruck enthaltenen Reihe ist, nach der im §. 180 hergeleiteten Formel, wenn man in

$$\frac{1}{q-1}\left(b - q\int\frac{1}{q^n}\right)$$

n für b, q für $1+p$, $q^{\frac{1}{n}}$ für q und $\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}-1}$ für $\frac{1}{q-1}$ setzt,

$$\frac{n}{q^{\frac{1}{n}}-1} - \frac{q^{\frac{1}{n}}}{q^{\frac{1}{n}}-1}\int\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}\cdot n}$$

Daher wird der Werth der in Rede stehenden Zahlungen ausgedrückt durch

$$\frac{1}{n^2}\left\{\frac{n}{q^{\frac{1}{n}}-1} - \frac{q^{\frac{1}{n}}}{q^{\frac{1}{n}}-1}\int\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}\cdot n}\right\} q\,m =$$

$$\left\{\frac{1}{n(q^{\frac{1}{n}}-1)} - \frac{q^{\frac{1}{n}}}{n^2(q^{\frac{1}{n}}-1)}\cdot\frac{1}{q^{\frac{1}{n}}-1}\left(1-\frac{1}{q}\right)\right\} q\,m =$$

$$\left\{\frac{q}{n(q^{\frac{1}{n}}-1)} - \frac{q^{\frac{1}{n}}(q-1)}{n^2(q^{\frac{1}{n}}-1)^2}\right\} m$$

Der vollständige Werth der Rente ist daher

$$\frac{q-1}{n(q^{\frac{1}{n}}-1)}\,\mathrm{R} + \left\{\frac{q}{n(q^{\frac{1}{n}}-1)} - \frac{q^{\frac{1}{n}}(q-1)}{n^2(q^{\frac{1}{n}}-1)^2}\right\} m$$

Nimmt man an, daß n unendlich groß ist, so wird $\frac{1}{n}$ unendlich klein, $q^{\frac{1}{n}} = 1$ und $n(q^{\frac{1}{n}}-1)$ oder $n\left((1+p)^{\frac{1}{n}}-1\right) = \mathit{Nep.\ log.}\,(1+p)$; denn nach dem Binominalsatz ist

$$(1+p)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}p + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1.2}p^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1.2.3}p^3$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)}{1.2.3.4}p^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{n}p + \frac{1-n}{1.2\,n^2}p^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{1.2.3\,n^3}p^3 +$$

$$\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{1.2.3.4\,n^4}p^4 + \ldots.$$

Daher

$$n(1+p)^{\frac{1}{n}}-n=p+\frac{(1-n)}{1.2n}p^2+\frac{(1-n)(1-2n)}{1.2.3n^2}p^3+\frac{(1-n)(1-2n)(1-3n)}{1.2.3.4n^3}p^4+\ldots$$

Für die Annahme, daß n unendlich groß ist, hat man

$$\frac{1-n}{n}=\frac{1}{n}-1=-1,\frac{1-2n}{n}=\frac{1}{n}-2=-2,\frac{1-3n}{n}=\frac{1}{n}-3=-3 \text{ u. s. w.; daher ist}$$

$$n\left\{(1+p)^{\frac{1}{n}}-1\right\}=p-\frac{p^2}{2}-\frac{p^3}{3}-\frac{p^4}{4}+\ldots=Nep.\,log.(1+p)$$

Der Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren Leibrente ist folglich, wenn man $Nep.\,log.(1+p)$ für $n\left\{(1+p)^{\frac{1}{n}}-n\right\}$ oder $Nep.\,log.\,q$ für $n\,(q^{\frac{1}{n}}-1)$ substituirt

$$\frac{q-1}{Nep.\,log.\,q}\,\mathrm{R}+\left\{\frac{q}{(Nep.\,log.\,q}-\frac{q-1}{(Nep.\,log.\,q)^2}\right\}m$$

Für m kann man aber auch substituiren (§. 178) $\frac{1-p\,\mathrm{R}}{1+p}$ oder, wenn man q für $1+p$ setzt,

$$\frac{1}{q}-\frac{(q-1)\,\mathrm{R}}{q}$$

Wenn man ferner t für $\frac{1}{Nep.\,log.\,q}$ setzt, so verwandelt sich obiger Ausdruck in

$$(q-1)\,t\mathrm{R}+(q\,t-(q-1)\,t^2)\left(\frac{1}{q}-\frac{(q-1)}{q}\,\mathrm{R}\right)=\frac{(q-1)^2\,t^2\,\mathrm{R}}{q}+t-\frac{(q-1)\,t^2}{q}$$

Setzt man z. B. $q=1{,}04$ so ist

$Nep.\,log.\,1{,}04 = 2{,}3025851 \times log.\,1{,}04 = 2{,}3025851 \times 0{,}0170333 = 0{,}0392206;$

daher $t=\frac{1}{Nep.\,log.\,1{,}04}=\frac{1}{0{,}0392206}=25{,}4968$

$$t^2=650{,}09,\ \frac{(q-1)^2}{q}=\frac{0{,}0016}{1{,}04}=0{,}001538$$

$$\frac{(q-1)^2\,t^2}{q}=650{,}09\times 0{,}001538=0{,}9998384$$

$$\frac{(q-1)\,t^2}{q}=0{,}0384615\times 650{,}09=25{,}0034365$$

Der Werth der in augenblicklichen Terminen zahlbaren und um Zinsfuß 4 berechneten Leibrente ist also

$$0{,}9998384\,R + 25{,}4968 - 25{,}0034365 = 0{,}9998384\,R + 0{,}4933635 = R + \frac{0{,}4933635}{0{,}9998384}$$

und mithin ziemlich nahe $= R + \frac{1}{2}$. Für den Zinsfuß 5 erhält man beinahe dasselbe Resultat.

Aus den obigen Untersuchungen folgt, daß man den Werth der Leibrente, wenn sie halbjährlich ausgezahlt werden soll, zu $R + \frac{1}{4}$, wenn sie vierteljährlich bezahlt werden soll zu $R + \frac{3}{8}$, und wenn sie in noch kleinern und noch so kleinen Terminen ausgezahlt werden soll, zu $R + \frac{1}{2}$ ohne merklichen Fehler anschlagen kann.

189. In Betreff der Rentenzahlungen sind auch noch die Bedingungen denkbar, daß

1) die Rente zwar bis zum Todestage des Rentners, aber erst im gewöhnlichen Termine ausgezahlt wird, oder

2) daß diejenigen Rentner, welche im Anfang jedes halben Jahres leben, die Rente für das volle Semester, aber erst zu Ende desselben, als dem festgesetzten Zahlungstermin, erhalten.

Sind, in Beziehung auf die erste Bedingung, die Termine halbjährlich, so ist der Werth dessen, was die jedesmal das ganze Jahr durchlebenden Rentner erhalten, für jeden Einzelnen wie vorher $= \frac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + 1)\,R$. Die Abgehenden leben zu Anfang des Jahres noch alle, und in der Mitte des Jahres zur Hälfte; es leben also davon im Durchschnitt im ersten Semester $\frac{3}{4}$, wovon Jeder in diesem Termine die Rente $\frac{1}{2}$ erhält. Im zweiten Semester leben anfänglich $\frac{1}{2}$ des Decrements, und zu Ende desselben keiner; im Durchschnitt lebt also im zweiten Semester $\frac{1}{4}$ des Decrements, wovon gleichfalls Jeder die Rente $\frac{1}{2}$ in diesem Termine erhält. Daher ist der Werth dessen, was die im Laufe des Jahres Abgehenden erhalten, für jeden Einzelnen $= \frac{1}{2}(\frac{3}{4}\,q^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4})\,m$. Der Totalwerth der Leibrente ist daher

$$\tfrac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + 1)\,R + \tfrac{1}{2}.\frac{3}{q}(q^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4})\,m$$

oder, wenn man $\frac{1}{q} - \frac{(q-1)\,R}{q}$ für m (§ 187) substituirt,

$$\tfrac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + 1)\,R + \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4}q^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4})\left(\frac{1}{q} - \frac{(q-1)\,R}{q}\right) = \frac{(q^{\frac{1}{2}} + 3\,q + 3\,q^{\frac{1}{2}} + 1)\,R}{8q} + \frac{3\,q^{\frac{1}{2}} + 1}{8q}$$

Für vierteljährliche Termine erhält man in gleicher Weise
$\frac{1}{4}(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{4}} + 1)\,\mathbf{R} + \frac{1}{32}(7q^{\frac{1}{4}} + 5q^{\frac{1}{2}} + 3q^{\frac{3}{4}} + 1)m$

In Beziehung auf die zweite Bedingung ist, wie vorher, der Werth dessen, was die das ganze Jahr Durchlebenden erhalten für jeden Einzelnen $= \frac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + 1)\,\mathbf{R}$, und der Werth dessen, was die im Laufe jedes Jahres Abgehenden erhalten, ist für jeden Einzelnen

$$\tfrac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2})\,m = \tfrac{1}{4}(2q^{\frac{1}{2}} + 1)\,m$$

Der Totalwerth ist demnach

$$\tfrac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} + 1)\,\mathbf{R} + \tfrac{1}{4}(2q^{\frac{1}{2}} + 1)\,m = \frac{(q + 2q^{\frac{1}{2}} + 1)\,\mathbf{R}}{4q} + \frac{2q^{\frac{1}{2}} + 1}{4q}$$

Berechnung der veränderlichen Leibrenten.

190. Soll der Betrag der Leibrente im 1ten Jahre 1 seyn, und in den folgenden Jahren nach einer geometrischen Progression fortschreiten, deren Exponent $= t$ ist, so ist der gegenwärtige Werth derselben $=$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2 t}{q^2} + \frac{a_3 t^2}{q^3} + \ldots\ldots \frac{a_x t^{x-1}}{q^x}\right.$$

$$= \frac{1}{at}\left(\frac{a_1 t}{q} + \frac{a_2 t^2}{q^2} + \frac{a_3 t^3}{q^3} + \ldots\ldots \frac{a_x t^x}{q^x}\right), \text{ oder,}$$

wenn man $\frac{q}{t} = w$ setzt, $=$

$$\frac{1}{at}\left(\frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots \frac{a_x}{w^x}\right)$$

Nun ist aber $\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots\ldots \frac{a_x}{w^x}\right)$ der Werth einer für das Alter a nach dem Zinsfuß $w-1$ berechneten Leibrente. Man erhält daher den gesuchten Werth der Leibrente, wenn man den Werth der für das Alter a zum Zinsfuß $w-1$ oder $\frac{q}{t} - 1$ berechneten Leibrente mit dem Exponenten t dividirt.

Ist $t = q$ und folglich $\frac{q}{t} = 1$, so ist der Werth der Leibrente $= \frac{1}{aq}(a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_x)$, und dieser Werth entspricht der nicht corrigirten und durch q dividirten mittleren Lebensdauer (§. 117); wonach der Werth derjenigen Leibrente, welche in demselben Verhältniß steigt, in welchem ein Kapital durch Zinseszinsen zunimmt, mit der Zahl der nicht corrigirten und durch den Exponenten des Kapitalzuwachses dividirten mittleren Lebensdauer übereinstimmt.

Soll der Betrag der Leibrente im 1ten Jahre 1, im 2ten Jahre 2, im 3ten Jahre 3 u. ſ. w. ſeyn, alſo nach der Ordnung der natürlichen Zahlen wachſen, ſo wird der durch R_a zu bezeichnende Werth derſelben ausgedrückt durch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{q}+\frac{2a_2}{q^2}+\frac{3a_3}{q^3}+\ldots\frac{xa_x}{q^x}\right)$$

oder auch durch

$$\frac{1}{a}\left\{\begin{array}{l}\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q^2}+\frac{a_3}{q^3}+\ldots\frac{a_x}{q^x}\\ \quad+\frac{a_2}{q^2}+\frac{a_3}{q^3}+\ldots\frac{a_x}{q^x}\\ \quad\quad+\frac{a_3}{q^3}+\ldots\frac{a_x}{q^x}\\ \quad\quad\quad+\ldots\end{array}\right.$$

Bezeichnet man den dem Alter a, a_1, a_2, a_3 u. ſ. w. entſprechenden Werth der Leibrente 1 beziehlich durch R, R_1, R_2, R_3 u. ſ. w., ſo iſt

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q_2}+\ldots\right)=R$$

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{a_2}{q}+\frac{a_3}{q^2}+\ldots\right)=R_1 \text{ daher}$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_2}{q^2}+\frac{a_3}{q^3}+\ldots\right)=\frac{a_1R}{aq}\text{; ebenſo}$$

$$\frac{1}{a_2}\left(\frac{a_3}{q}+\frac{a_4}{q^2}+\ldots\right)=R_2 \text{ und}$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_3}{q^3}+\frac{a_4}{q_4}+\ldots\right)=\frac{a_2R_2}{aq^2}\text{ u. ſ. w.}$$

wonach $R_a=R+\frac{a_1R_1}{aq}+\frac{a_2R_2}{aq^2}+\ldots\frac{a_xR_x}{aq^x}$

und mithin R_a aus den unveränderlichen Leibrenten zuſammengeſetzt werden kann.

Soll auch für die im Laufe des Jahres Abgehenden bis zum Todestage, alſo im Durchſchnitt für ½ Jahr, die Rente zu Ende des Jahres ausgezahlt werden, ſo iſt, wenn die Rente nach der Ordnung der natürlichen Zahlen zunimmt, der gegenwärtige Werth der nach dem erſten Jahre zu leiſtenden Zahlung

$=½\frac{^da}{q}$, für das zweite Jahr $=½\frac{2\,^da_1}{q^2}$, für das dritte Jahr

$= \frac{1}{2}\frac{3\,{}^d a_2}{q^3}$ u. ſ. w. Der über alle Rentner vertheilte Werth dieſer Auszahlungen iſt daher

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{{}^d a}{q} + \frac{2\,{}^d a_1}{q^2} + \frac{3\,{}^d a_2}{q^3} + \ldots\right)$$

welcher Werth zu dem vorhin gefundenen Werth der nach der Ordnung der natürlichen Zahlen zunehmenden Rente zu addiren iſt.

Soll die Leibrente im 1ten Jahre mit 1 bezahlt werden, und in jedem folgenden Jahre um $\frac{1}{n}$ ſteigen, ſo läßt ſich der entſprechende Werth in zwei andere zerlegen. Der erſte Werth iſt derjenige, welcher der unveränderlichen Leibrente 1 entſpricht. Der andere Werth, welcher der nach $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$ u. ſ. w. ſteigenden Leibrente entſpricht, iſt gleich dem $n$ten Theil einer mit 1 anfangenden, und nach der Ordnung der natürlichen Zahlen ſteigenden Leibrente. Weil aber die Zahlung der letztern Rente ein Jahr ſpäter beginnt, ſo hat man dieſe Leibrente für ein um 1 Jahr höheres Alter zu berechnen, wobei für 1 Jahr discontirt und auf die anfängliche Zahl a, anſtatt auf a_1, repartirt werden muß.

Soll die Leibrente nach der umgekehrten Ordnung der natürlichen Zahlen, nämlich zu Ende des 1ten Jahres mit $n-1$, des 2ten Jahres mit $n-2$ u. ſ. w. bezahlt werden, ſo iſt der Werth der Leibrente für jeden Einzelnen

$$\frac{1}{a}\left(\frac{(n-1)\,a_1}{q} + \frac{(n-2)\,a_2}{q^2} + \ldots \frac{a_{x-1}}{q^{x-1}}\right) = \frac{n}{a}\left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \ldots\right) - \frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{q} + \frac{2\,a_2}{q^2} + \frac{3\,a_3}{q^3} + \ldots\right) = n\mathrm{R} - \mathrm{R}_x$$

Soll endlich die Leibrente im 1ten Jahre mit $f+n-1$ anfangen und jährlich um 1 abnehmen, ſo läuft dieß auf daſſelbe hinaus, als wenn eine veränderliche Leibrente, die mit $n-1$ anfängt, und f unveränderliche Leibrenten, jede jährlich mit 1 zahlbar, gegeben werden ſollten.

Zweiter Abschnitt.

Von den aufgeschobenen, temporären und aufgesparten Leibrenten.

Aufgeschobene Leibrenten.

191. Unter einer aufgeschobenen Leibrente versteht man, wie in der Abtheilung von den Versicherungsanstalten bereits erklärt worden, eine solche, deren Auszahlung erst nach Ablauf einer bestimmten Anzahl von Jahren, wofern alsdann der Betheiligte noch am Leben ist, beginnt. Ist der Betrag der Leibrente $= 1$, die Anzahl der Lebenden vom Alter desjenigen, welcher die Leibrente erwerben will, $= a$, und die Anzahl der Lebenden von den um $n+1$, $n+2$, u. s. w. höhern Alter beziehlich a_{n+1}, a_{n+2} u. s. w. und p der Zinsfuß, so wird der Werth R_n der aufgeschobenen Leibrente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}} + \cdots \frac{a_x}{(1+p)^x}\right)$$

Nun ist aber auch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}} + \cdots \frac{a_x}{(1+p)^x}\right) =$$
$$\frac{1}{a(1+p)^n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^2} + \cdots \frac{a_x}{(1+p)^{x-n}}\right)$$

Weil ferner

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^2} + \cdots \frac{a_x}{(1+p)^{x-n}}\right) = R$$

so ist

$$\frac{1}{a(1+p)^n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^2} + \cdots \frac{a_x}{(1+p)^{x-n}}\right) \text{ oder}$$

$$R_n = \frac{a_n R}{a(1+p)^n}.$$

Man erhält daher den Werth der um n Jahre aufgeschobenen und dem Alter b entsprechenden Leibrente, wenn man den Werth der dem Alter $b+n$ entsprechenden Leibrente auf n Jahre discontirt, und das Resultat $\frac{R}{(1+p)^n}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{a_n}{a}$, daß der Betheiligte zu Ende des $n$ten Jahres noch am Leben ist, multiplicirt. Zu diesem Verfahren gelangt man auch auf folgende Art.

Wenn die Person, welche heute eine um n Jahre aufgeschobene Leibrente kaufen will, nach n Jahren noch lebt, so ist zu dieser Zeit, d. h. nach n Jahren, der Werth der Leibrente =

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{a_{n+2}}{(1+p)^2} + \ldots\right)$$

Soll nun der Werth dieser Leibrente für heute bestimmt werden, so muß obiger Werth mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{a_n}{a}$, daß die Person nach n Jahren noch lebt, multiplicirt, und auf heute, also für n Jahre, discontirt werden.

Im §. 132 ist zugleich gezeigt worden, wie der Werth der Leibrente in eine jährliche, bis zum Ablauf der n Jahre in gleichen Beiträgen zu zahlende Prämie verwandelt werden kann.

Ist die aufgeschobene Leibrente eine solche, welche nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigen, und deren Zahlung nach $n+1$ Jahren mit 1 beginnen soll, so wird der Werth dieser Rente ausgedrückt durch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}} + \frac{2\,a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}} + \frac{3\,a_{n+3}}{(1+p)^{n+3}} + \ldots.\right) =$$

$$\frac{1}{a(1+p)^n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{2\,a_{n+2}}{(1+p)^2} + \frac{3\,a_{n+3}}{(1+p)^3} + \ldots\right)$$

Weil aber

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{2\,a_{n+2}}{(1+p)^2} + \frac{3\,a_{n+3}}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \mathrm{R}_a \text{ (§. 190)}$$

so ist $\frac{1}{a(1+p)^n}\left(\frac{a_{n+1}}{1+p} + \frac{2\,a_{n+1}}{(1+p)^2} + \ldots.\right)$ oder der gesuchte Werth $= \frac{a_n\,\mathrm{R}_a}{a(1+p)^n}$.

Wird aber für die aufgeschobene Leibrente angenommen, daß nach dem $(n+1)$ten Jahre $n+1$, nach dem $(n+2)$ten Jahre $n+2$, nach dem $(n+3)$ten Jahre $n+3$ u. s. w. gezahlt werde, so kann man eine solche aufgeschobene Leibrente als aus zwei Theilen bestehend betrachten, nämlich aus n unveränderlichen, mit 1 zu zahlenden Leibrenten, und aus einer steigenden, mit 1 anfangenden Leibrente. Nun ist der gegenwärtige Werth der n unveränderlichen Leibrenten $= n\,\mathrm{R}$, und der gegenwärtige Werth der steigenden Leibrente $= \mathrm{R}_a$; ferner der gegenwärtige Werth der aufgeschobenen n unveränderlichen Leib-

renten $= \frac{a_n\, n\mathrm{R}}{a(1+p)^n}$, und der gegenwärtige Werth der aufgeschobenen steigenden Leibrente $= \frac{a_n\, \mathrm{R}_n}{a(1+p)^n}$; der gesuchte Werth ist daher $= \frac{a_n}{a(1+p)^n}(n\mathrm{R}+\mathrm{R}_n)$.

Der Werth einer Leibrente, welche nach der umgekehrten Ordnung der natürlichen Zahlen zu Ende des 1ten Jahres mit $a-1$, des 2ten mit $a-2$ u. s. w. bezahlt wird, ist $n\mathrm{R}-\mathrm{R}_n$. Der Werth einer derartigen aufgeschobenen Leibrente besteht daher aus der Differenz der Werthe, von n unveränderlichen aufgeschobenen Leibrenten und einer aufgeschobenen steigenden Leibrente.

Temporäre Leibrenten.

192. Eine temporäre Leibrente ist eine solche, welche nur während einer bestimmten Anzahl von Jahren erhoben wird. Wird die Rente bis zum $n$ten Jahre ausgezahlt, so ist der gegenwärtige Werth derselben $=$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\ldots\frac{a_n}{(1+p)^n}\right)$$

Der Werth der lebenslänglich zu erhebenden Rente ist $=$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\ldots\frac{a_n}{(1+p)^n}+\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}}+\ldots\right)$$

Der Werth der um n Jahre aufgeschobenen Rente ist

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}}+\ldots\right)$$

Der Werth der durch R_t zu bezeichnenden temporären Rente ist daher

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\ldots\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{a_{n+1}}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{(1+p)^{n+2}}+\ldots\right)=\mathrm{R}-\mathrm{R}_n$$

Man erhält daher den Werth der temporären Leibrente, wenn man den Werth der um n Jahre aufgeschobenen Leibrente von dem Werthe der lebenslänglich zu erhebenden Rente abzieht. Dasselbe gilt von den veränderlichen Leibrenten.

Aus einer ähnlichen Betrachtung ergiebt sich der Werth einer aufgeschobenen temporären Leibrente, d. h. einer solchen, welche erst nach Ablauf einer gewissen Anzahl von Jahren zahlbar ist,

und nach Ablauf einer weitern Frist wieder erlöscht. Die aufgeschobene und temporäre Leibrente wird übrigens, als solche, nicht mehr ausgezahlt, wenn der Rentner vor Ablauf der bestimmten Frist mit Tode abgeht.

Aufgesparte Leibrente.

193. Eine Leibrente, welche der Rentner während einer gewissen Anzahl von Jahren nicht erhebt, sondern bei der Leibrentenkasse stehen läßt, ist eine aufgesparte Leibrente. Das was der Rentner durch das Aufsparen seiner Rente sammelt, kann nachher entweder auf einmal erhoben, oder zur Vergrößerung der nachherigen Leibrente verwendet werden.

Ist die Leibrente während der ersten n Jahre nicht erhoben worden, so ist der accumulirte Werth derselben nach dem $n$ten Jahre $=$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\ldots\right)(1+p)^n$$

Denn z. B. der gegenwärtige Werth einer bis zu Ende des 4ten Jahres zahlbaren Leibrente r ist $=$

$$\frac{r}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3}{(1+p)^3}+\frac{a_4}{(1+p)^4}\right)$$

Sollen aber die 4 Leibrentenbeträge aufgespart werden, so ist nach dem 4ten Jahre $r\,a_1$ angewachsen auf $r\,a_1\,(1+p)^3$, $r\,a_2$ auf $r\,a_2\,(1+p)^2$, $r\,a_3$ auf $r\,a_3\,(1+p)$ und $r\,a_4$ auf $r\,a_4\,(1+p)^0 = r\,a_4$. Der accumultirte Werth der bis zum 4ten Jahre aufgesparten Rente ist daher

$$\frac{r}{a}(a_1\,(1+p)^3+a_2\,(1+p)^2+a_3\,(1+p)+a_4)=$$

$$\frac{r}{a}\left(\frac{a_1}{1+p}+\frac{a_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3}{(1+p)^3}+\frac{a_4}{(1+p)^4}\right)(1+p)^4$$

Soll der Aufschub des Genusses der Leibrente dazu gebraucht werden, um für die Folge der Zeit einer größern Rente theilhaftig zu werden, und zu diesem Zweck die Rente während der ersten n Jahre nicht erhoben werden, so verhält sich der jährliche Betrag der durch die Aufsparung größer gewordenen Rente zum jährlichen Betrag der sogleich laufenden Leibrente wie der gegenwärtige Werth der letztern zum gegenwärtigen Werthe einer auf n Jahre aufgeschobenen Leibrente, weil sich bei derselben Art von Leibrenten die jährlichen Beträge wie die gegenwärtigen Werthe, die man dafür zahlt, verhalten.

Ist z. B. der gegenwärtige Werth der vollen, d. h. sogleich laufenden, Leibrente 1 für eine 20-jährige Person = 13,9379, und der Werth der, nach derselben Sterblichkeitstabelle und demselben Zinsfuß brechneten, auf 16 Jahre aufgeschobenen Leibrente = 6,093, so kann man in dem in Rede stehenden Falle annehmen, daß der Rentner für 13,9379 eine um 16 Jahre aufgeschobene Leibrente kauft. Wenn aber dem Kapital 6,093 die Rente 1 entspricht, so entspricht dem Kapital 13,9379 die aus folgender Proportion sich ergebende Rente:

$$6{,}093 : 1 = 13{,}9379 : x = \frac{13{,}9379}{6{,}093} = 2{,}287$$

Soll vom $(n+1)$ten Jahre an die Leibrente 1 ausgezahlt werden, und diese Rente durch jährliche, bis zum $n$ten Jahre zu entrichtenden Beiträge erkauft werden, so muß der Werth der um n Jahre aufgeschobenen Leibrente 1 gleich seyn dem Werthe der bis zum $n$ten Jahre jährlich zu entrichtenden Beiträge x; daher (§. 192)

$$(\mathrm{R} - \mathrm{R}_n)\, x = \mathrm{R}_n \text{ und } x = \frac{\mathrm{R}_n}{\mathrm{R} - \mathrm{R}_n}$$

Ist in Beziehung auf obiges Beispiel

$\mathrm{R} = 13{,}9379$, $\mathrm{R}_n = 6{,}093$, so ist

$$x = \frac{6{,}093}{13{,}9379 - 6{,}093} = \frac{6{,}093}{13{,}3286} = 0{,}4571.$$

Dritter Abschnitt.

Von den Leibrenten auf das kürzeste Leben mehrerer Personen.

194. Eine Leibrente, die so lange ausgezahlt wird, als zwei oder mehrere Personen zusammen leben, und folglich mit dem Tode der zuerst sterbenden Personen aufhört, ist eine Leibrente auf das kürzeste Leben.

Zur Werthsbestimmung einer solchen Rente sollen A, B, C u. s. w. die Personen bezeichnen, auf welche die Leibrente lautet; es sey ferner a die Anzahl der Lebenden in der Sterblichkeitstabelle vom Alter der Person A, und a_1, a_2, a_3 u. s. w. die

Zahlen der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. ſ. w. Jahre höheren Alter; eben ſo b die Anzahl der Lebenden vom Alter der Perſon B, und b_1, b_2, b_3 u. ſ. w. die Zahlen der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. ſ. w. höhern Alter; c die Anzahl der Lebenden vom Alter der Perſon C, und c_1, c_2, c_3 u. ſ. w. die Zahlen der Lebenden von den um 1, 2, 3 u. ſ. w. höheren Alter u. ſ. w.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß die Perſonen A, B, C u. ſ. w., auf welche die Leibrente lautet, ſämmtlich zu Ende des 1ten Jahres noch leben iſt $\frac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots}{a\ b\ c \ldots}$ (§. 106); der gegenwärtige Werth der 1ten Jahresrente 1 iſt folglich, wenn der Zinsfuß durch p bezeichnet wird, $= \frac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots\ldots}{a\ b\ c \ldots (1+p)}$. Die Wahrſcheinlichkeit, daß dieſe Perſonen zu Ende des 2ten Jahres noch zuſammen leben werden, iſt $= \frac{a_2\ b_2\ c_2 \ldots\ldots}{c\ b\ c \ldots\ldots}$ und der gegenwärtige Werth der 2ten Jahresrente iſt daher $\frac{a_2\ b_2\ b_2 \ldots}{a\,b\,c \ldots (1+p)^2}$, und in gleicher Weiſe erhält man $\frac{a_n\ b_n\ c_n \ldots\ldots}{a\ b\ c \ldots (1+p)^n}$ für den gegenwärtigen Werth der $n$ten Jahresrente. Die Summe aller dieſer Werthe oder

$$\frac{1}{a\,b\,c..}\left(\frac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots}{1+p} + \frac{a_2\ b_2\ c_2 \ldots}{(1+p)^2} + \ldots \frac{a_n\ b_n\ c_n \ldots}{(1+p)^n}\right)$$

iſt der Totalwerth der Leibrente.

Für eine Perſon A iſt der Totalwerth der Leibrente $=$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right);$$

für 2 Perſonen iſt derſelbe

$$\frac{1}{ab}\left(\frac{a_1\ b_1}{1+p} + \frac{a_2\ b_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3\ b_3}{(1+p)^3} + \ldots\right).$$

Bezeichnet man daher durch A, B, C u. ſ. w. den Werth einer Leibrente für jede einzelne Perſon A, B, C u. ſ. w, ferner durch AB, AC, BC u ſ. w. den Werth einer Leibrente für eine Verbindung von zwei Perſonen A, B; A, C; B, C u. ſ. w.; ferner durch A B C den Werth einer Leibrente für irgend eine Verbindung von 3 Perſonen A, B, C u. ſ. w., ſo iſt für 1 Perſon

$$\frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{1+p} + \frac{a_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3}{(1+p)^3} + \ldots\right) = \mathrm{A}$$

$$\frac{1}{b}\left(\frac{b_1}{1+p}+\frac{b_2}{(1+p)^2}+\frac{b_3}{(1+p)^3}+\ldots.\right)=B$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{c_1}{1+p}+\frac{c_2}{(1+p)^2}+\frac{c_3}{(1+p)^3}+\ldots\right)=C$$

u. s. w.

Für eine Verbindung von 2 Personen ist

$$\frac{1}{ab}\left(\frac{a_1\,b_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3\,b_3}{(1+p)^3}+\ldots.\right)=AB$$

$$\frac{1}{ac}\left(\frac{a_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,c_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3\,c_3}{(1+p)^3}+\ldots.\right)=AC$$

$$\frac{1}{bc}\left(\frac{b_1\,c_1}{1+p}+\frac{b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\frac{b_3\,c_3}{(1+p)^3}+\ldots.\right)=BC$$

u. s. w.

Für eine Verbindung von 3 Personen ist

$$\frac{1}{abc}\left(\frac{a_1\,b_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{(1+p)^3}+\ldots.\right)=ABC.$$

u. s. w.

Die Ausrechnung des Werths einer auf mehrere Personen lautenden Leibrente läßt sich abkürzen, wenn man von dem Werthe der Leibrente für Personen von einem gewissen Alter zu dem Werthe einer ähnlichen Leibrente für Personen, von welchen jedes um 1 Jahr jünger ist, zurückgeht.

Denn bezeichnet A B C den Werth einer Leibrente für eine Verbindung von 3 Personen A, B und C, und A, B, C, den Werth einer Leibrente für eine Verbindung von 3 Personen A, B, und C, von welchen jede um 1 Jahr älter ist als A, B und C, so ist

$$\frac{1}{abc}\left(\frac{a_1\,b_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\ldots\right)=A\,B\,C$$

$$\frac{1}{a_1\,b_1\,c_1}\left(\frac{a_2\,b_2\,c_2}{1+p}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{(1+p)^2}+\ldots\right)=A_1\,B_1\,C_1$$

Die erste Gleichung mit $a\,b\,c\,(1+p)$, und die zweite mit $a,\ b,\ c,$ multiplicirt, giebt

$$a_1\,b_1\,c_1+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{1+p}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{(1+p)^2}+\ldots=ABC\times abc(1+p)$$

oder $$\frac{a_2\,b_2\,c_2}{1+p}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{(1+p)^2}+\ldots=ABC\times abc\,(1+p)-a_1b_1c_1$$

und $$\frac{a_2\,b_2\,c_2}{1+p}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{(1+p)^2}+\ldots=A_1\,B_1\,C_1\times a_1\,b_1\,c_1$$

Daher

$$A\,B\,C \times a\,b\,c\,(1+p) - a_1\,b_1\,c_1 = A_1\,B_1\,C_1 \times a_1\,b_1\,c_1$$

und folglich

$$A\,B\,C = (1 + A_1\,B_1\,C_1)\,\frac{a_1\,b_1\,c_1}{a\,b\,c\,(1+p)}$$

wonach man vermittelst dieser Formel auf eine leichte Art den Werth von A B C erhält, wenn derjenige von $A_1\,B_1\,C_1$ bekannt ist.

Ein ähnliches Verfahren zur Abkürzung der Berechnung der auf eine einzige Person lautenden Leibrenten ist im §. 120 vorgekommen.

Soll z. B. der Werth einer Leibrente für eine Verbindung von zwei Personen, von welchen die eine 90, und die andere 87 Jahre alt ist, nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux zum Zinsfuß 4 berechnet werden, so ist die Berechnung nach obiger Formel wie folgt.

Macht man den Anfang mit dem höchsten in der Tabelle vorkommenden Alter, 94, und sucht man den Werth einer Leibrente für zwei Personen, von welchen die eine 94 Jahre alt, und die andere um 90 — 87 = 3 Jahre jünger ist, also für eine Person von 94 und eine von 91 Jahren, so findet man, daß solcher = 0 ist.

Für zwei Personen von

93 und 90 J. ist vers. $= (1+0)\quad \frac{1\times 7}{1\times 11\times 1{,}04} = 0{,}3060$

92 „ 89 „ „ „ $= (1+0{,}3060)\,\frac{2\times 11}{4\times 16\times 1{,}04} = 0{,}4316$

91 „ 88 „ „ „ $= (1+0{,}4316)\,\frac{4\times 16}{7\times 22\times 1{,}04} = 0{,}5720$

90 „ 87 „ „ „ $= (1+0{,}5720)\,\frac{7\times 22}{11\times 29\times 1{,}04} = 0{,}7297$

Vermittelst des Gebrauchs der Logarithmen wird die Berechnung auf bloße Addition zurückgeführt. Für obiges Beispiel ist

	log. 7	= 0,8450980
dec. Erg	log. 2	= 9,6989700
„ „	log. 11	= 8,9586073
„ „	log. 1,04	= 9,9829667
		29,4856420
		30
		0,4856420 − 1 =
		log. 0,306

	log 1,306	= 0,1159432
	log. 2	= 0,3010300
	log. 11	= 1,0413927
dec. Erg.	log. 4	= 9,3979400
„ „	log. 16	= 8,7958800
„ „	log 1,04	= 9,9829667
		29,6361526
		30
		0,6361526 − 1 =
		log. 0,4316

	log. 1,4316	= 0,1558217		log. 1,572	= 0,1964525
	log. 4	= 0,6020600		log. 7	= 0,845 980
	log. 16	= 1,2041200		log. 22	= 1,3424227
dec Erg.	log. 7	= 9,1549020	dec Erg.	log. 11	= 8,9586073
„ „	log. 22	= 8,6575773	„ „	log. 29	= 8,5376020
„ „	log. 1,04	= 9,9829667	„ „	log. 1,04	= 9,9829667
		29,7574477			29,8631492
		30			30
		0,7574477 − 1 =			0,8631492 − 1 =
		log. 0,5720			log. 0,7297

Beide Berechnungen geben 0,7297 für den gesuchten Werth der Leibrente.

195. Der Werth der aufgeschobenen, auf mehrere Personen lautenden Leibrente wird eben so wie derjenige der auf eine einzige Person lautenden Leibrente berechnet.

Bezeichnet man den Werth der auf mehrere Personen lautenden und um n Jahre aufgeschobenen Leibrente durch $A_n\ B_n\ C_n \ldots$, so ist

$$\frac{1}{a\,b\,c\ldots}\left(\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}\,c_{n+1}\ldots}{(1+p)^{n+1}}+\frac{a_{n+2}\,b_{n+2}\,c_{n+2}\ldots}{(1+p)^{n+2}}+\ldots\frac{a_x\,b_x\,c_x\ldots}{(1+p)^x}\right)$$

$$=\frac{1}{a\,b\,c\ldots(1+p)^n}\left(\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}\,c_{n+1}\ldots}{(1+p)}+\frac{a_{n+2}\,b_{n+2}\,c_{n+2}\ldots}{(1+p)^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\frac{a_x\,b_x\,c_x\ldots.}{(1+p)^{x-n}}\right)=A_n\,B_n\,C_n\ldots.$$

Weil ferner

$$\frac{1}{a_n b_n c_n\ldots}\left(\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}\,c_{n+1}\ldots}{1+p}+\frac{a_{n+2}\,b_{n+2}\,c_{n+2}\ldots.}{(1+p)^2}+\ldots..\right.$$

$$\left.\frac{a_x\,b_x\,c_x.\ldots}{(1+p)^{x-n}}\right)=A\,B\,C\ldots$$

so ist

$$A_n\,B_n\,C_n\ldots.=\frac{a_n\,b_n\,c_n\ldots A\,B\,C\ldots.}{a\,b\,c\ldots.\,(1+p)^n}$$

196. Der Werth der temporären und auf mehrere Personen lautenden Leibrente wird, wie bei der auf eine einzige Person lautenden Leibrente, ausgedrückt durch

$$A\,B\,C\ldots. - A_n\,B_n\,C_n\ldots$$

Vierter Abschnitt.

Von den Leibrenten auf das längste Leben mehrerer Personen.

197. Eine Leibrente, welche bis zum gänzlichen Aussterben irgend einer Anzahl von Personen ausgezahlt wird, ist eine Leibrente auf das längste Leben.

Bezeichnen A, B, C.... die Personen, auf welche die Leibrente lautet, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A zu Ende des 1ten Jahres noch lebt, $= \frac{a_1}{a}$; mithin ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie zu Ende des ersten Jahres nicht mehr lebt $= 1 - \frac{a_1}{a}$; ebenso ist $1 - \frac{b_1}{b}$ die Wahrscheinlichkeit, daß B, $1 - \frac{c_1}{c}$ die Wahrscheinlichkeit, daß C u. s. w. zu Ende des 1ten Jahres nicht mehr lebt; daher drückt $\left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)\left(1 - \frac{c_1}{c}\right)\ldots$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß alle Personen A, B, C... im 1tēn Jahre sterben, und mithin ist $1 - \left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{c_1}{c}\right)\ldots$. die Wahrscheinlichkeit, daß die eine oder andere dieser Personen zu Ende des 1ten Jahres noch lebt. Ebenso wird die Wahrscheinlichkeit, daß die eine oder andere dieser Personen zu Ende des 2ten, 3ten u. s. w. Jahres noch lebt, ausgedrückt durch

$$1 - \left(1 - \frac{a_2}{a}\right)\left(1 - \frac{b_2}{b}\right)\left(1 - \frac{c_2}{c}\right)\ldots.$$

$$1 - \left(1 - \frac{a_3}{a}\right)\left(1 - \frac{b_3}{b}\right)\left(1 - \frac{c_3}{c}\right)\ldots.$$

$$1 - \left(1 - \frac{a_4}{a}\right)\left(1 - \frac{b_4}{b}\right)\left(1 - \frac{c_3}{c}\right)\ldots.$$

u. s. w.

Nun ist aber

$$1 - \left(1 - \frac{a_1}{a}\right)\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)\left(1 - \frac{c_1}{c}\right)\ldots = \frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} + \frac{c_1}{c} + \ldots - \frac{a_1 b_1}{ab} - \frac{a_1 c_1}{ac} - \frac{c_1 b_1}{cb} - \ldots + \frac{a_1 b_1 c_1}{abc}$$

$$1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)\ldots=\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c}+\ldots-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}-\frac{a_2\,c_2}{a\,c}-\frac{c_2\,b_2}{c\,b}-\ldots.\frac{a_2\,b_2\,c_2}{a\,b\,c}$$

$$1-\left(1-\frac{a_3}{a}\right)\left(1-\frac{b_3}{b}\right)\left(1-\frac{c_3}{c}\right)\ldots.=\frac{a_3}{a}+\frac{b_3}{b}+\frac{c_3}{c}+\ldots-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}-\frac{a_3\,c_3}{a\,c}-\frac{c_3\,b_3}{c\,b}-\ldots.\frac{a_3\,b_3\,c_3}{a\,b\,c}$$

u. ſ. w.

Der Totalwerth der auf die Perſonen A, B, C... lautenden Leibrente 1 wird daher ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}+\ldots-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}-\frac{a_1\,c_1}{a\,c}-\frac{b_1\,c_1}{b\,c}-\ldots+\frac{a_1\,b_1\,c_1}{a\,b\,c}+\ldots.\right)$$

$$+\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}+\frac{c_2}{c}+\ldots-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}-\frac{a_2\,c_2}{a\,c}-\frac{b_2\,c_2}{b\,c}-\ldots+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{a\,b\,c}+\ldots\right)$$

$$+\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a}+\frac{b_3}{b}+\frac{c_3}{c}+\ldots-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}-\frac{a_3\,c_3}{a\,c}-\frac{b_3\,c_3}{b\,c}-\ldots+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{a\,b\,c}+\ldots\right)+\text{u. ſ. w.}$$

Weil die 1te Vertikalcolumne obigen Ausdrucks dem Werthe einer Leibrente für die Perſon A, die 2te dem Werthe einer Leibrente für B, die dritte dem Werthe einer Leibrente für C u. ſ. w. entſpricht; weil ferner die 4te, 5te, 6te, u. ſ. w. Columne die Werthe einer Leibrente für die Verbindungen AB, AC und BC u. ſ. w. ausdrücken, ſo kann auch nach der im Obigen eingeführten Bezeichnung der Totalwerth der Leibrente ausgedrückt werden durch

$$A+B+C+\ldots-AB-AC-BC-\ldots+ABC+\ldots$$

Ein numeriſches Beiſpiel für eine Leibrente auf zwei Köpfe iſt bereits im §. 121 vorgekommen.

Wenn ferner der Werth einer um n Jahre aufgeſchobenen und bis zum Ausſterben irgend einer Anzahl von Perſonen zahlbaren Leibrente beſtimmt werden ſoll, ſo beginnt die Ausrechnung der Verticalreihen des obigen Ausdrucks erſt mit dem

$(n+1)$ten Gliede. Der Werth der aufgeschobenen Leibrente ist nach der im Obigen eingeführten Bezeichnung =
$A_n+B_n+C_n+\ldots-A_nB_n-A_nC_n-B_nC_n-\ldots+A_nB_nC_n+\ldots$
oder,

$$\frac{a_n A}{a(1+p)^n}+\frac{b_n B}{b(1+p)^n}+\frac{c_n C}{c(1+p)^n}+\ldots-\frac{a_n b_n AB}{ab(1+p)^n}$$
$$-\frac{a_n c_n AC}{ac(1+p)^n}-\frac{b_n c_n BC}{bc(1+p)^n}-\ldots+\frac{a_n b_n c_n ABC}{abc(1+p)^n}+\ldots$$

198. Stellt man sich vor, daß die Personen A, B, C... von heute an nach n Jahren noch leben, und alsdann einen Leibrentenvertrag auf das längste Leben schließen, und bezeichnet man den Werth, welchen diese Leibrente alsdann, also nach dem $n$ten Jahre von heute an hat, durch R, so ist der heutige Werth derselben $=\frac{R}{(1+p)^n}$; wenn aber heute der Vertrag geschlossen wird, und der Genuß der aufgeschobenen Leibrente von der Bedingung abhängt, daß alle Personen A, B, C... nach Ablauf des $n$ten Jahres noch leben müssen, so ist der Werth einer derartigen aufgeschobenen Leibrente =

$$\frac{a_n b_n c_n \ldots R}{abc\ldots(1+p)^n}$$

199. Bei dem Vertrage der auf das längste Leben mehrerer Personen lautenden Leibrente kann die weitere Bedinguug gemacht werden, daß die Rente nur so lange ausgezahlt werden soll, als eine bestimmte Anzahl der Betheiligten noch am Leben sind.

Nehmen wir, damit die Herleitung nicht zu weitläufig werde an, daß nur 3 Personen A, B, C, den Vertrag schließen, und daß die Rente so lange ausgezahlt werden soll, als noch 2 Personen am Leben sind. Die Wahrscheinlichkeit, die Rente nach Ablauf des 1ten Jahres zu erhalten, hängt von einem der vier folgenden Ereignisse ab:

1) Entweder sind die drei Personen zu Ende des Jahres noch am Leben, und dafür ist die Wahrscheinlichkeit $=\frac{a_1 b_1 c_1}{abc}$; oder

2) A und B leben noch, und C ist todt, wofür die Wahrscheinlichkeit $=\frac{a_1 b_1}{ab}\left(1-\frac{c_1}{c}\right)$ ist; oder

3) A und C leben noch, und B ist todt, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{a_1\, c_1}{a\, c}\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$ ist; oder

4) B und C leben noch, und A ist todt, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{b_1\, c_1}{b\, c}\left(1 - \frac{a_1}{a}\right)$ ist.

Die Summe dieser vier Wahrscheinlichkeiten multiplicirt mit $\frac{1}{1+p}$ giebt daher den gegenwärtigen Werth der nach dem 1ten Jahre zahlbaren Leibrente 1; dieser Werth wird daher ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1\, b_1}{a\, b} - \frac{a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c} + \frac{a_1\, c_1}{a\, c} - \frac{a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c} + \frac{b_1\, c_1}{b\, c} - \frac{a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c} + \frac{a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c}\right)$$

$$= \frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1\, b_1}{a\, b} + \frac{a_1\, c_1}{a\, c} + \frac{b_1\, c_1}{b\, c} - \frac{2\, a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c}\right)$$

Verfährt man in gleicher Weise für die nachfolgenden Jahrgänge, so erhält man

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1\, b_1}{a\, b} + \frac{a_1\, c_1}{a\, c} + \frac{b_1\, c_1}{b\, c} - \frac{2\, a_1\, b_1\, c_1}{a\, b\, c}\right)$$

$$+ \frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2\, b_2}{a\, b} + \frac{a_2\, c_2}{a\, c} + \frac{b_2\, c_2}{b\, c} - \frac{2\, a_2\, b_2\, c_2}{a\, b\, c}\right)$$

$$+ \frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3\, b_3}{a\, b} + \frac{a_3\, c_3}{a\, c} + \frac{b_3\, c_3}{b\, c} - \frac{2\, a_3\, b_3\, c_3}{a\, b\, c}\right) + \ldots$$

für den Totalwerth der Rente.

Nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung wird dieser Werth auch ausgedrückt durch

$$\mathbf{AB + AC + BC - 2ABC}$$

Die jeder andern Anzahl von Betheiligten entsprechenden Formeln werden auf ähnliche Weise hergeleitet.

Fünfter Abschnitt.

Von der Werthsbestimmung der getheilten Leibrente in Beziehung auf die gemeinschaftlichen Besitzer derselben.

200. Wenn mehrere Personen auf gemeinschaftliche Rechnung eine Leibrente kaufen, so können die Bedingnisse in Be-

treff der Theilung derselben beim Absterben der Theilhaber unterschiedlich angenommen werden, wonach der Beitrag eines jeden Theilhabers zum Ankauf der Leibrente nach diesen Bedingnissen zu bemessen ist. Der Gang der Berechnung für derartige Fälle ist aus nachfolgenden Beispielen zu ersehen.

Erster Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen eine Leibrente auf gemeinschaftliche Rechnung unter folgender Bedingung: A bezieht die Rente während seines ganzen Lebens; nach dessen Tode gelangt B zum Besitz derselben, und nach dem Tode des letztern gelangt sie in den Besitz des C. Man soll den Beitrag eines jeden Theilhabers zum Ankauf der Leibrente bestimmen.

Hier hat der A begreiflicherweise so viel zu entrichten, als der Werth einer auf seiner Person ruhenden Leibrente ausmacht, welcher Werth nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung $= A$ ist. Der Beitrag des B ist gleich dem Werthe einer ihm nach dem Tode des A zufallenden Leibrente, daher $= B - AB$. Und der Beitrag des C ist gleich dem Werthe einer ihm nach dem Tode des A und B zufallenden Leibrente, daher $= C - AC - BC + ABC$.

Zweiter Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente unter folgender Bedingung: A bezieht die ganze Rente bis zu seinem Tode; hierauf theilen sich B und C in dieselbe, und dem Ueberlebenden fällt sie ganz zu.

Der Beitrag des A ist gleich dem Werthe einer auf denselben ruhenden Leibrente, und folglich $= A$.

Der B gelangt in irgend einem Jahre zum Besitz der halben Leibrente, wenn B und C leben, und A todt ist. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist für das Ende des 1ten Jahres $= \frac{b_1 c_1}{bc}\left(\frac{a - a_1}{a}\right)$. Der genannte Theilhaber gelangt dagegen in irgend einem Jahre zum Besitz der ganzen Leibrente, wenn A und C gestorben sind und B noch lebt. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist $= \frac{b_1}{b}\left(\frac{a - a_1}{a}\right)\left(\frac{c - c_1}{c}\right)$. Der Werth der Erwartung des B in Betreff der ersten Jahresrente ist folglich $=$

$$\frac{1}{2(1+p)}\times\frac{b_1\,c_1}{b\,c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)+\frac{1}{1+p}\times\frac{b_1}{b}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)=$$
$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{b_1}{b}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}-\frac{b_1\,c_1}{2\,b\,c}+\frac{a_1\,b_1\,c_1}{2\,a\,b\,c}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{b_2}{b}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}-\frac{b_2\,c_2}{2\,b\,c}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{2\,a\,b\,c}\right)$$
$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{b_3}{b}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}-\frac{b_3\,c_3}{2\,b\,c}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{2\,a\,b\,c}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, also der Beitrag des B, wird nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung ausgedrückt durch:

$$B - AB - \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}ABC.$$

Weil für den C der Werth der Erwartung von denselben Umständen abhängt, so wird in gleicher Weise der Beitrag desselben ausgedrückt durch

$$C - AC - \tfrac{1}{2}BC + \tfrac{1}{2}ABC.$$

Dritter Fall.

Drei Personen, A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente unter folgender Bedingung: die Rente wird zu gleichen Theilen getheilt so lange sie zusammen leben; nach dem Tode eines Theilhabers theilen sich die beiden andern Theilhaber in die Rente, und dem Längstlebenden fällt sie ganz zu.

Der A erhält zu Ende irgend eines Jahres den dritten Theil der Rente, wenn sämmtliche Theilhaber zu Ende des Jahres noch leben; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $=\frac{a_1\,b_1\,c_1}{a\,b\,c}$, und der Werth der Erwartung ist $=\frac{1}{3(1+p)}\times\frac{a_1\,b_1\,c_1}{a\,b\,c}$. Der A erhält ferner die halbe Rente zu Ende irgend eines Jahres wenn A und B noch leben und C gestorben ist, oder wenn A und C noch leben und B gestorben ist. Für den einen Fall ist die Wahrscheinlichkeit $=\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$ und für den andern $=\frac{a_1\,c_1}{a\,c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$; der Werth dieser Erwartungen ist $=\frac{1}{2(1+p)}\left\{\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\left(\frac{c-c_1}{c}\right)+\frac{a_1\,c_1}{a\,c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\right\}$

Der A gelangt ferner zu Ende irgend eines Jahres zum Besitz der ganzen Leibrente, wenn B und C gestorben sind; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1}{a} \times \left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$; der Werth der Erwartung ist demnach $= \frac{1}{1+p} \times \frac{a_1}{a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$

Der Werth der Erwartung des A in Betreff der ersten Jahresrente wird demnach ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1\,b_1\,c_1}{3\,a\,b\,c} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_1\,b_1}{a\,b}\left(\frac{c-c_1}{c}\right) + \frac{a_1\,c_1}{a\,c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\right) + \frac{a_1}{a}\,\frac{(b-b_1)}{b}\left(\frac{c-c_1}{c}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1}{a} - \frac{a_1\,b_1}{2\,a\,b} - \frac{a_1\,c_1}{2\,a\,c} + \frac{a_1\,b_1\,c_1}{3\,a\,b\,c}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a} - \frac{a_2\,b_2}{2\,a\,b} - \frac{a_2\,c_2}{2\,a\,c} + \frac{a_2\,b_2\,c_2}{3\,a\,b\,c}\right)$$

$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a} - \frac{a_3\,b_3}{2\,a\,b} - \frac{a_3\,c_3}{2\,a\,c} + \frac{a_3\,b_3\,c_3}{3\,a\,b\,c}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder

$$\mathrm{A} - \tfrac{1}{2}\mathrm{AB} - \tfrac{1}{2}\mathrm{AC} + \tfrac{1}{3}\mathrm{ABC}$$

drückt daher den Beitrag des A aus.

Die Erwartungen des B und C hängen von denselben Umständen wie beim A ab, daher sind die Beiträge dieser Theilhaber beziehlich:

$$\mathrm{B} - \tfrac{1}{2}\mathrm{BA} - \tfrac{1}{2}\mathrm{BC} + \tfrac{1}{3}\mathrm{ABC}$$

$$\mathrm{C} - \tfrac{1}{2}\mathrm{CA} - \tfrac{1}{2}\mathrm{CB} + \tfrac{1}{3}\mathrm{ABC}.$$

Vierter Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente unter folgender Bedingung: A und B beziehen jeder, so lange sie zusammen leben, die halbe Rente; nach dem Tode des Einen oder Andern wird die Rente unter C und dem Ueberlebenden getheilt, und dem Längstlebenden fällt sie ganz zu.

Der A erhält zu Ende irgend eines Jahres die halbe Rente,

wenn A und B noch leben; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1\ b_1}{a\ b}$; ferner wenn A und C noch leben und B gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1\ c_1}{a\ c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Er erhält ferner die ganze Rente, wenn B und C gestorben sind; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1}{a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$.

Der Werth der Erwartung des A in Betreff der ersten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1\ b_1}{2\ a\ b}+\frac{a_1\ c_1}{2\ a\ c}+\frac{a_1}{a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)\right\}=$$

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1}{a}-\frac{a_1\ b_1}{2\ a\ b}-\frac{a_1\ c_1}{2\ a\ c}+\frac{a_1\ b_1\ c_1}{2\ a\ b\ c}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a}-\frac{a_2\ b_2}{2\ a\ b}-\frac{a_2\ c_2}{2\ a\ c}+\frac{a_2\ b_2\ c_2}{2\ a\ b\ c}\right)$$

$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a}-\frac{a_3\ b_3}{2\ a\ b}-\frac{a_3\ c_3}{2\ a\ c}+\frac{a_3\ b_3\ c_3}{2\ a\ b\ c}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe oder

$$\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,B}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,C}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,B\,C}$$

drückt daher den Beitrag des A aus.

Die Erwartungen des B hängen, dem Vertrag zufolge, von denselben Umständen, wie beim A ab; der Beitrag des B wird daher ausgedrückt durch:

$$\mathrm{B}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B\,A}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{B\,C}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\,B\,C}.$$

Der C hingegen erhält zu Ende irgend eines Jahres die halbe Jahresrente, wenn A und C am Leben sind, und B gestorben ist, oder aber, wenn B und C am Leben sind, und A gestorben ist. Die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Fälle sind für das 1te Jahr beziehlich: $\frac{a_1\ c_1}{a\ c}\left(\frac{b_1-b_1}{b}\right)$ und $\frac{b_1\ c_1}{b\ c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)$

Sind A und B gestorben, so bezieht C die ganze Rente; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{c_1}{c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Der Werth der Erwartung des C in Betreff der ersten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1 b_1}{2ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)+\frac{b_1 c_1}{2bc}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)+\frac{c_1}{c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-c_1}{b}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{1+p}\left(\frac{c_1}{c}-\frac{a_1 c_1}{2ac}-\frac{b_1 c_1}{2bc}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr, u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{c_2}{c}-\frac{a_2 c_2}{2ac}-\frac{b_2 c_2}{2bc}\right)$$
$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{c_3}{c}-\frac{a_3 c_3}{2ac}-\frac{b_3 c_3}{2bc}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder
$C - \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}BC$ drückt daher den Beitrag des C aus.

Fünfter Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente unter folgender Bedingung: A und B erhalten jeder, so lange sie leben, die halbe Rente. Stirbt A zuerst, so theilen sich B und C zu gleichen Theilen in die Rente, und der zuletzt Lebende bezieht die ganze Rente; wenn aber B zuerst stirbt, so bezieht A die ganze Rente bis zu ihrem Tode und hierauf gelangt C in den Besitz der Leibrente.

Der A erhält die halbe Rente zu Ende irgend eines Jahres wenn A und B am Leben sind; die Wahrscheinlichkeit dieser Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1 b_1}{ab}$; er bezieht dagegen die ganze Rente, wenn B gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1}{a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Der Werth der Erwartung des A in Betreff der ersten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1 b_1}{2ab}+\frac{a_1}{a}\frac{(b-b_1)}{b}\right)=\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1}{a}-\frac{a_1 b_1}{2ab}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w., sind die Werthe des Erwartungen beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2}{a}-\frac{a_2 b_2}{2ab}\right), \frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3}{a}-\frac{a_3 b_3}{2ab}\right) \text{ u. s. w.}$$

Die Summe dieser Werthe, oder $A - \frac{1}{2}AB$ drückt daher den Beitrag des A aus.

Der B erhält zu Ende irgend eines Jahres die halbe Rente, wenn A und B noch leben; oder aber, wenn B und C leben, und A gestorben ist; die Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle sind für das 1te Jahr beziehlich $\frac{a_1 b_1}{ab}$ und $\frac{b_1 c_1}{bc}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)$. Der B

bezieht dagegen die ganze Rente, wenn A und C gestorben sind; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{b_1}{b}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$. Der Werth der Erwartung des B in Betreff der ersten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1\,b}{2ab}+\frac{b_1\,c_1}{2\,b\,c}\,\frac{(a-a_1)}{a}+\frac{b}{b}\,\frac{(a-a_1)}{a}\,\frac{(c-c_1)}{c}\right\}$$
$$=\frac{1}{1+p}\left(\frac{b_1}{b}-\frac{a_1\,b_1}{2ab}-\frac{b_1\,c_1}{2bc}+\frac{a_1\,b_1\,c_1}{2abc}\right)$$

Für das 2te Jahre, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{b_2}{b}-\frac{a_2\,b_2}{2ab}-\frac{b_2\,c_2}{2\,b\,c}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{2abc}\right)$$
$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{b_3}{b}-\frac{a_3\,b_3}{2ab}-\frac{b_3\,c_3}{2bc}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{2abc}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder $B-\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}ABC$ drückt daher den Beitrag des B aus.

Der C erhält zu Ende irgend eines Jahres die halbe Rente, wenn B und C am Leben sind, und A gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $=\frac{b_1c_1}{bc}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)$. Er bezieht dagegen die ganze Rente, wenn A und B gestorben sind, und die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1. Jahr $=\frac{c_1}{c}\left(\frac{a\,a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Der Werth der Erwartung des C in Betreff der ersten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{b_1\,c_1}{2\,b\,c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)+\frac{c_1}{c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\right\}=$$
$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{c_1}{c}-\frac{a_1\,c_1}{ac}-\frac{b_1\,c_1}{2bc}+\frac{a_1\,b_1\,c_1}{2a\,c}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{c_2}{c}-\frac{a_2\,c_2}{ac}-\frac{b_2\,c_2}{2bc}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{2a\,c}\right)$$
$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{c_3}{c}-\frac{a_3\,c_3}{ac}-\frac{b_3\,c_3}{2bc}+\frac{a_3\,b_3\,c_3}{2abc}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder $C - AC - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}ABC$ drückt daher den Beitrag des C aus.

Sechster Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente, welche so lange ausgezahlt wird, als noch irgend zwei dieser Personen zusammen am Leben sind, und zwar unter folgender Bedingung: die Rente wird zu gleichen Theilen getheilt, und wenn ein Theilhaber gestorben ist, so theilen sich die Ueberlebenden in die Rente.

Der A erhält zu Ende irgend eines Jahres den dritten Theil der Rente, wenn A, B, C noch leben; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1 b_1 c_1}{a b c}$. Er erhält dagegen die halbe Rente, wenn A und B leben, und C gestorben; für welchen Fall die Wahrscheinlichkeit für das 1te Jahr $= \frac{a_1 b_1}{a b}\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$, oder aber, wenn A und C leben und B gestorben ist; für welchen Fall die Wahrscheinlichkeit für das 1te Jahr $= \frac{a_1 c_1}{a c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Der Werth der Erwartung des A in Betreff der 1ten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1 b_1 c_1}{3abc} + \frac{a_1 b_1}{2ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right) + \frac{a_1 c_1}{2ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\right\} =$$

$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1 b_1}{2ab} + \frac{a_1 c_1}{2ac} - \frac{2a_1 b_1 c}{3abc}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2 b_2}{2ab} + \frac{a_2 c_2}{2ac} - \frac{2a_2 b_2 c_2}{3abc}\right)$$

$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3 b_3}{2ab} + \frac{a_3 c_3}{2ac} - \frac{2a_3 b_3 c_3}{3abc}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC - \frac{2}{3}\times ABC$ drückt daher den Beitrag des B aus. Weil die Erwartungen des B und C von denselben Umständen wie beim A abhängen, so ist der Beitrag des Erstern $= \frac{1}{2}BA + \frac{1}{2}BC - \frac{2}{3}ABC$, und der des Andern $= \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB - \frac{2}{3}ABC$.

Siebenter Fall.

Drei Personen A, B, C kaufen gemeinschaftlich eine Leibrente, welche so lange ausgezahlt wird, als noch irgend zwei dieser Personen zusammen am Leben sind, und zwar unter folgender Bedingung: A und B beziehen die Rente während ihrer gleichzeitigen Existenz zu gleichen Theilen, und nach dem Tode des Einen oder Andern theilen sich die beiden Ueberleben zu gleichen Theilen in dieselbe.

Der A bezieht zu Ende irgend eines Jahres die halbe Rente, wenn A und B leben; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1 b_1}{a b}$; ferner wenn A und C leben und B gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1 c_1}{a c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$. Der Werth der Erwartung des A in Betreff der 1ten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1 b_1}{2ab} + \frac{a_1 c_1}{2ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\right\} = \frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1 b_1}{2ab} + \frac{a_1 c_1}{2ac} - \frac{a_1 c_1 b_1}{2abc}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2 b_2}{2ab} + \frac{a_2 c_2}{2ac} - \frac{a_2 c_2 b_2}{2abc}\right)$$

$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3 b_3}{2ab} + \frac{a_3 c_3}{2ac} - \frac{a_3 c_3 b_3}{2abc}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder ½ A B + ½ A C − ½ A B C drückt daher den Beitrag des A aus. Weil die Erwartung des B von denselben Umständen wie beim A abhängt, so ist der Beitrag des B = ½ B A + ½ B C − ½ A B C.

Der C dagegen erhält zu Ende irgend eines Jahres die halbe Rente, wenn A und C leben und B gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1te Jahr $= \frac{a_1 c_1}{a c}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)$; ferner, wenn B und C noch leben und A gestorben ist; die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist für das 1. Jahr $= \frac{b_1 c_1}{b c}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)$.

Der Werth der Erwartung des C in Betreff der 1ten Jahresrente wird daher ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{1+p}\left\{\frac{a_1\ c_1}{2\,ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)+\frac{b_1\ c_1}{2\,ac}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\right\}=$$
$$\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1\ c_1}{2\,ac}+\frac{b_1\ c_1}{2\,bc}-\frac{a_1\ b_1\ c_1}{a\,b\,c}\right)$$

Für das 2te Jahr, 3te Jahr u. s. w. sind die Werthe der Erwartung beziehlich:

$$\frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2\ c_2}{2\,ac}+\frac{b_2\ c_2}{2\,bc}-\frac{a_2\ b_2\ c_2}{a\,b\,c}\right)$$
$$\frac{1}{(1+p)^3}\left(\frac{a_3\ c_3}{2\,ac}+\frac{b_3\ c_3}{2\,bc}-\frac{a_3\ b_3\ c_3}{a\,b\,c}\right)$$

u. s. w.

Die Summe dieser Werthe, oder ½ A C + ½ B C — A B C drückt daher den Beitrag des C aus.

Achter Fall.

Die Person D oder ihre Erben beziehen, sobald irgend zwei der drei Personen A, B, C gestorben sind, eine Rente so lange als der Ueberlebende dieser drei Personen am Leben ist.

Sieht man von der ersten der beiden obigen Bedingungen vorerst ab, so ist der Werth der bis zum Tode der längstlebenden der drei Personen zahlbaren Rente (§. 197) =

A + B + C — A B — A C — B C + A B C.

Weil aber D oder ihre Erben so lange nichts erhalten, als noch zwei der gegebenen Personen am Leben sind, so muß obiger Werth um den Werth einer auf diese beiden gleichzeitig lebenden Personen ruhenden Rente, also (§. 199) um

A B + A C + B C — 2 A B C

vermindert werden; der gesuchte Werth der Rente ist daher =

A + B + C — 2 A B — 2 A C — 2 B C + 3 A B C.

Letzter Fall.

Die Person D oder ihre Erben beziehen eine Rente, sobald irgend eine der drei Personen A, B, C stirbt, und zwar bis zum Tode des längstlebenden der beiden Ueberlebenden.

Sieht man von der ersten der beiden obigen Bedingungen vorerst ab, so ist der Werth der bis zum Tode der längstlebenden der drei Personen zahlbaren Rente (§. 197) =

A + B + C — A B — A C — B C + A B C.

Weil aber D oder ihre Erben so lange nichts erhalten, als A, B, C noch gleichzeitig leben, so muß obiger Werth um den Werth einer Leibrente vermindert werden; der gesuchte Werth ist daher =

$$A + B + C - AB - AC - BC + ABC - ABC =$$
$$A + B + C - AB - AC - BC.$$

Dritte Abtheilung.

Anwartschaften.

201. Unter Anwartschaft versteht man die bedingungsweise Berechtigung zur Erhebung einer durch Vertrag bestimmten Summe Geldes oder zur Erlangung einer Leibrente. Die Anwartschaft lautet entweder auf bestimmte Personen und beruht auf dem Ableben anderer bestimmter Personen zur Erlangung einer Leibrente, oder sie beruht auf dem Ableben bestimmter Personen zu Gunsten anderer Personen oder ihrer Erben zur Erlangung einer vertraggemäß bestimmten Summe Geldes oder einer Leibrente. Eine Anwartschaft der ersten Art ist eine Überlebungsrente, und diejenige der andern Art ist eine Lebensversicherung.

Erster Abschnitt.

Von den Überlebungsrenten.

202. In Betreff der Ueberlebung und des Eintritts in den Besitz der Leibrente sind die mannigfaltigsten Bedingnisse denkbar. Wenn man indessen nur diejenigen Fälle in Erwägung zieht, welche in der Praxis möglicherweise vorkommen, so lassen sie sich auf folgende Hauptpunkte zurückführen.

1) Die Leibrente lautet auf das kürzeste Leben (§. 194) irgend einer Anzahl von Personen A, B, C ..., und die Auszahlung derselben beginnt nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen P, Q, R ..., d. h. nachdem irgend eine dieser Personen gestorben ist.

2) Die Leibrente lautet auf das kürzeste Leben irgend einer Anzahl von Personen A, B, C . . . und die Auszahlung derselben hängt von dem Aussterbenden der Personen P, Q, R . . . ab.

3) Die Leibrente lautet auf das längste Leben (§. 197) irgend einer Anzahl von Personen und die Auszahlung derselben beginnt nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen P, Q, R . . . , d. h. nachdem irgend eine dieser Personen gestorben ist.

4) Die Leibrente lautet auf das längste Leben irgend einer Anzahl von Personen A, B, C . . . , und die Auszahlung derselben hängt von dem Aussterben der Personen P, Q, R . . . ab.

5) Die Auszahlung der Leibrente an eine Person hängt von einer bestimmten Ordnung des Ueberlebens in Beziehung auf andere Personen P, Q, R . . . ab.

Erster Fall.

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben mehrerer Personen lautet, und deren Auszahlung nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen beginnt.

Zur Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben irgend einer Anzahl von Personen A, B, C . . . lautet, und deren Auszahlung nach der Auflösung der Verbindung anderer Personen P, Q, R . . . , d. h. nach dem Tode irgend einer dieser Personen beginnt, muß die Wahrscheinlichkeit des Fortbestehens der Verbindung A, B, C . . . und der Auflösung der Verbindung P, Q, R . . . berechnet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Verbindung der Personen A, B, C . . . nach dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. noch besteht, sind beziehlich $\frac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots}{a\ b\ c \ldots}$, $\frac{a_2\ b_2\ c_2 \ldots}{a\ b\ c \ldots}$, $\frac{a_3\ b_3\ c_3 \ldots}{a\ b\ c \ldots}$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeiten, daß irgend eine der Personen P, Q, R . . . nach dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. nicht mehr lebt, sind beziehlich $1 - \frac{p_1\ q_1\ r_1 \ldots}{p\ q\ r \ldots}$, $1 - \frac{p_2\ q_2\ r_2 \ldots}{p\ q\ r \ldots}$, $1 - \frac{p_3\ q_3\ r_3 \ldots}{p\ q\ r \ldots}$ u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Zusammentreffen beider Fälle sind daher für das 1te, 2te, 3te Jahr u. s. w. beziehlich $\frac{a_1\ b_1\ c_1 \ldots}{a\ b\ c \ldots}\left(1 - \frac{p_1\ q_1\ r_1 \ldots}{p\ q\ r \ldots}\right)$, $\frac{a_2\ b_2\ c_2 \ldots}{a\ b\ c \ldots}\left(1 - \frac{p_2\ q_2\ r_2 \ldots}{p\ q\ r \ldots}\right)$, $\frac{a_3\ b_3\ c_3 \ldots}{a\ b\ c \ldots}\left(1 - \frac{p_3\ q_3\ r_3 \ldots}{p\ q\ r \ldots}\right)$ u. s. w.

Die gegenwärtigen Werthe der successiven Renten sind daher $\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1 b_1 c_1 \ldots}{a b c \ldots} - \frac{a_1 b_1 c_1 p_1 q_1 r_1 \ldots}{a b c p q r \ldots}\right), \frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2 b_2 c_2}{a b c} - \frac{a_2 b_2 c_2 p_2 q_2 r_2 \ldots}{a b c p q r \ldots}\right)$ u. s. w.

Der Totalwerth der Leibrente wird daher ausgedrückt durch $\frac{1}{1+p}\left(\frac{a_1 b_1 c_1}{a b c} - \frac{a_1 b_1 c_1 p_1 q_1 r_1 \ldots}{a b c p q r \ldots}\right) + \frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_2 b_2 c_2}{a b c} - \frac{a_2 b_2 c_2 p_2 q_2 r_2 \ldots}{a b c p q r}\right) + \frac{1}{(1+p)^2}\left(\frac{a_3 b_3 c_3}{a b c} - \frac{a_3 b_3 c_3 p_3 q_3 r_3 \ldots}{a b c p q r \ldots}\right) + \ldots$ oder auch, nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung durch A B C... — A B C... P Q R...

Für 2 Personen A P ist der entsprechende Werth = A — A P.

Ein unmerisches Beispiel in Betreff einer Überlebungsrente für 2 Personen ist bereits im §. 129 vorgekommen.

Zweiter Fall.

Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben mehrerer Personen lautet, und deren Auszahlung von dem Aussterben bestimmter anderer Personen abhängt.

Zur Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das kürzeste Leben irgend einer Anzahl von Personen A, B, C... lautet, und deren Auszahlung von dem Aussterben der Personen P, Q, R... abhängt, muß die Wahrscheinlichkeit des Fortbestehens der Verbindung A, B, C... und des Aussterbens der Verbindung P, Q, R... berechnet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Verbindung der Personen A, B, C... nach dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. noch besteht, sind beziehlich $\frac{a_1 b_1 c_1 \ldots}{a b c \ldots}, \frac{a_2 b_2 c_2 \ldots}{a b c \ldots}, \frac{a_3 b_3 c_3 \ldots}{a b c \ldots}$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Verbindung P, Q, R... nach dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. ausgestorben ist sind beziehlich $\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right), \left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right), \left(1-\frac{p_3}{p}\right)\left(1-\frac{q_3}{q}\right)\left(1-\frac{r_3}{r}\right)$ u. s. w. Die Wahrscheinlichkeiten für das Zutreffen beider Fälle sind daher für das 1te, 2te, 3te Jahr u. s. w. beziehlich $\frac{a_1 b_1 c_1 \ldots}{a b c}\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right), \frac{a_2 b_2 c_2 \ldots}{a b c \ldots} \times \left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right)$ u. s. w.

Die gegenwärtigen Werthe der succesiven Renten sind daher

$$\frac{1}{1+p} \times \frac{a_1 b_1 c_1 \cdots}{a b c \cdots}\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right),$$

$$\frac{1}{(1+p)^2} \times \frac{a_2 b_2 c_2 \cdots}{a b c \cdots}\left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right)$$

u. s. w.

Werden diese Ausdrücke entwickelt, so wird der Totalwerth der Leibrente ausgedrückt durch

$$\frac{a_1 b_1 c_1 \cdots}{abc\ldots(1+p)}\left(1-\frac{p_1}{p}-\frac{q_1}{q}-\frac{r_1}{q}+\frac{p_1 q_1}{pq}+\frac{p_1 r_1}{qr}+\frac{q_1 r_1}{qr}-\frac{p_1 q_1 r_1}{pqr}\right)$$

$$+\frac{a_2 b_2 c_2 \cdots}{abc\ldots(1+p)^2}\left(1-\frac{p_2}{p}-\frac{q_2}{q}-\frac{r_2}{r}+\frac{p_2 q_2}{pq}+\frac{p_2 r_2}{qr}+\frac{q_2 r_2}{qr}-\frac{p_2 q_2 r_2}{pqr}\right)$$

$$+\frac{a_3 b_3 c_3 \cdots}{abc\ldots(1+p)^3}\left(1-\frac{p_3}{p}-\frac{q_3}{q}-\frac{r_3}{r}+\frac{p_3 q_3}{pq}+\frac{p_3 r_3}{pr}+\frac{q_3 r_3}{qr}-\frac{p_3 q_3 r_3}{pqr}\right)+\text{u. s. w.}$$

Nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung wird dieser Werth auch ausgedrückt durch

A B C . . . — A B C . . . P — A B C . . . Q — A B C . . . R + A B C . . . P Q + A B C . . . P R + A B C . . . Q R — A B C . . . P Q R . . .

Soll z. B. die Leibrente der Person A nach dem Tode der Personen P, Q zufallen, so wird der entsprechende Werth ausgedrückt durch A — A P — A Q + A P Q.

Dritter Fall.

Werthsbestimmung der Leibrente welche auf das längste Leben mehrerer Personen lautet, u. deren Auszahlung nach der Auflösung einer Verbindung anderer Personen beginnt.

Zur Werthsbestimmung der Leibrente, welche auf das längste Leben irgend einer Anzahl von Personen A, B, C . . . lautet, und deren Auszahlung nach der Auflösung irgend einer Verbindung anderer Personen P, Q, R . . . , d. h. nachdem irgend eine dieser Personen gestorben ist, beginnt, muß die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eine der Personen A B C . . . zu Ende irgend eines Jahres noch lebt, und daß irgend eine der Personen P Q R . . . zu Ende desselben Jahres gestorben ist, berechnet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten, daß irgend eine der Personen A, B, C . . . zu Ende des 1ten, 2ten, 3ten Jahres u. s. w. noch lebt, sind beziehlich

$$1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\left(1-\frac{c_1}{c}\right),\ 1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\times$$

$\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)$ u. ſ. w. Die Wahrſcheinlichkeiten, daß irgend eine der Perſonen P, Q, R . . . zu Ende des 1ten, 2ten, 3ten Jahres u. ſ. w. geſtorben iſt, ſind beziehlich

$$1-\frac{p_1 q_1 r_1 \ldots}{pqr\ldots},\ 1-\frac{p_2 q_2 r_2 \ldots}{pqr},\ \text{u. ſ. w.}$$

Die Wahrſcheinlichkeiten für das Zutreffen dieſer Fälle ſind daher für das 1te, 2te, 3te Jahr u. ſ. w. beziehlich

$$\left\{1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\left(1-\frac{c_1}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_1 q_1 r_1}{pqr}\right)$$
$$\left\{1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_2 q_2 r_2}{pqr}\right)$$

u. ſ. w.

Die Summe der gegenwärtigen Werthe der ſucceſiven Leibrenten iſt daher

$$\frac{1}{1+p}\left\{1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\left(1-\frac{c_1}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_1 q_1 r_1}{pqr}\right)$$
$$+\frac{1}{(1+p)^2}\left\{1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_2 q_2 r_2}{pqr}\right)$$
$$+ \text{ u. ſ. w.}$$

Nach gehöriger Entwicklung und nach der im §. 194 angenommenen Bezeichnung wird der Totalwerth der Leibrente ausgedrückt durch

$$A+B+C-AB-AC-BC+ABC-PQ\times$$
$$RA-PQRB-PQRC+PQRAB+PQRAC+$$
$$PQRBC-PQRABC.$$

Soll z. B. der Werth einer Leibrente, welche bis zum Ausſterben der Verbindung A, B, aber erſt nach dem Tode einer Perſon P zahlbar iſt, beſtimmt werden, ſo erhält man dafür

$$A+B-AB-AP-BP+ABP.$$

Vierter Fall.

Werthsbeſtimmung der Leibrente, welche auf das längſte Leben mehrerer Perſonen lautet und nach dem Ausſterben einer Verbindung anderer Perſonen zahlbar iſt

Zur Werthsbeſtimmung der Leibrente, welche auf das längſte Leben irgend einer Anzahl von Perſonen A B C . . . lautet, und deren Auszahlung nach dem Ausſterben einer Verbindung anderer Perſonen P, Q, R . . . beginnt, muß die Wahrſcheinlichkeit, daß irgend eine der Perſonen A, B, C . . . zu Ende irgend eines Jahres noch lebt, und daß alsdann die Verbindung P, Q, R . . . ausgeſtorben iſt, berechnet werden. Die

Wahrscheinlichkeiten, daß irgend eine der Personen A, B, C ... zu Ende des 1ten, 2ten, 3ten Jahres u. s. w. noch lebt, sind beziehlich

$$1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\left(1-\frac{e_1}{c}\right), 1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)$$

u. s. w. Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Verbindung P, Q, R ... im 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. ausgestorben ist, sind beziehlich

$$\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right), \left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right)$$

u. s. w. Die Wahrscheinlichkeiten für das Zusammentreffen beider Fälle sind daher für das 1te, 2te, 3te Jahr u. s. w. beziehlich

$$\left\{1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\right\}\left\{1-\frac{c_1}{c}\right\}\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)$$

$$\left\{1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right)$$

u. s. w.

Der Totalwerth der Leibrente wird daher ausgedrückt durch

$$\frac{1}{1+p}\left\{1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\left(1-\frac{c_1}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\times\left(1-\frac{q_1}{q}\right)\left(1-\frac{r_1}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{(1+p)^2}\left\{1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\left(1-\frac{c_2}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_2}{p}\right)\times\left(1-\frac{q_2}{q}\right)\left(1-\frac{r_2}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{(1+p)^3}\left\{1-\left(1-\frac{a_3}{a}\right)\left(1-\frac{b_3}{b}\right)\left(1-\frac{c_3}{c}\right)\right\}\left(1-\frac{p_3}{p}\right)\times\left(1-\frac{q_3}{q}\right)\left(1-\frac{r_3}{r}\right)+\text{u. s. w.}$$

Lautet z. B. die Leibrente auf zwei Personen A, B, und soll die Auszahlung derselben nach dem Aussterben der Personen P, Q, beginnen, so sind die hierbei in Rechnung zu bringenden Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

$$\left\{1-\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)\right\}\left(1-\frac{p_1}{p}\right)\left(1-\frac{q_1}{q}\right)=\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}$$
$$-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}-\frac{a_1\,p_1}{a\,p}-\frac{b_1\,p_1}{b\,p}-\frac{a_1\,q_1}{a\,q}-\frac{b_1\,q_1}{b\,q}+\frac{a_1\,p_1\,q_1}{a\,p\,q}+$$
$$\frac{b_1\,p_1\,q_1}{b\,p\,q}+\frac{a_1\,b_1\,p_1}{a\,b\,p}+\frac{a_1\,b_1\,q_1}{a\,b\,q}-\frac{a_1\,b_1\,p_1\,q_1}{a\,b\,p\,q}$$
$$\left\{1-\left(1-\frac{a_2}{a}\right)\left(1-\frac{b_2}{b}\right)\right\}\left(1-\frac{p_2}{p}\right)\left(1-\frac{q_2}{q}\right)=\frac{a_2}{a}+\frac{b_2}{b}$$
$$-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}-\frac{a_2\,p_2}{a\,p}-\frac{b_2\,p_2}{b\,p}-\frac{a_2\,q_2}{a\,q}-\frac{b_2\,q_2}{b\,q}+\frac{a_2\,p_2\,q_2}{a\,p\,q}+$$
$$\frac{b_2\,p_2\,q_2}{b\,p\,q}+\frac{a_2\,b_2\,p_2}{a\,b\,p}+\frac{a_2\,b_2\,q_2}{a\,b\,q}-\frac{a_2\,b_2\,p_2\,q_2}{a\,b\,p\,q}$$

u. s. w.

Der Totalwerth der Rente wird hiernach ausgedrückt durch

$$A+B+AB-AP-AQ-BP-BQ+APQ$$
$$+BPQ+ABP+ABQ-ABPQ.$$

Wenn, überhaupt, die Leibrente auf eine Verbindung von irgend einer Anzahl von Personen A, B, C . . . lautet, und solche bis zum Aussterben dieser Personen nach dem Aussterben der Verbindung von P, Q, R . . . ausgezahlt werden soll, so stelle man sich vorerst vor, daß die Leibrente bis zum Aussterben aller Personen A, B, C . . . P, Q, R . . . ausgezahlt werden soll. Weil aber die Personen A, B, C . . . so lange nichts erhalten, als noch irgend eine der Personen P, Q, R... am Leben ist, so ist es einleuchtend, daß man den Werth der in Rede stehenden Leibrente erhält, wenn man den Werth einer bis zum Ableben der Personen P, Q, R . . . zahlbaren Rente von dem Werthe einer Leibrente, welche bis zum Aussterben aller Personen A, B, C . . . P, Q, R . . . zahlbar ist, abzieht.

So wird z. B. der Werth einer bis zum Aussterben der vier Personen A, B, P, Q zahlbaren Rente nach §. 194 ausgedrückt durch

$$A+B+P+Q-AB-AP-AQ-BP-BQ$$
$$-PQ+APQ+BPQ+ABP+ABQ-ABPQ.$$

Der Werth einer bis zum Aussterben von zwei Personen P, Q zahlbaren Rente wird ausgedrückt durch $P+Q-PQ$.

Zieht man diesen Werth vom vorhergehenden ab, so bleibt

$$A + B - AB - AP - AQ - BP - BQ + APQ + BPQ + ABP + ABQ - ABPQ.$$

in Uebereinstimmung mit der ersten Berechnung.

Fünfter Fall.

Werthsbestimmung der Leibrente, deren Auszahlung von einer bestimmten Ordnung des Ueberlebens in Beziehung auf andere Personen abhängt.

Die Werthsbestimmung der Leibrente, deren Auszahlung von einer bestimmten Ordnung des Ueberlebens in Beziehung auf eine Verbindung anderer Personen P, Q, R... abhängt, gründet sich auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß von zwei gegebenen Personen A, B, z. B. A früher stirbt als die andere, oder daß von zwei gegebenen Personen A, B z. B. A später stirbt als die andere.

Was die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit betrifft, daß von den beiden Personen A und B der A früher stirbt als B, so kann begreiflicherweise in einem beliebigen Jahre dieser Fall eintreten: wenn A in diesem Jahre stirbt, und B am Leben bleibt, oder wenn beide Personen in diesem Jahre sterben, aber A zuerst. Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall ist $\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\frac{b_1}{b}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß A und B in diesem Jahre sterben, ist $\left(1-\frac{a_1}{a}\right)\left(1-\frac{b_1}{b}\right)$, und die Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt als B, ist

$$\frac{1-\frac{a_1}{a}}{1-\frac{a_1}{a}+1-\frac{b_1}{b}} \quad (\S.\ 127)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß A und B in diesem Jahre sterben, aber A zuerst, wird daher ausgedrückt durch

$$\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b-b_1)}{b(a-a_1)}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß binnen Jahresfrist A früher stirbt als B besteht demnach aus der Summe der den beiden Fällen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, und wird ausgedrückt durch

$$\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\frac{b_1}{b}+\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\times\frac{1}{1+\frac{a(b-b_1)}{b(a-a_1)}}$$

oder durch

$$\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab}$$

wenn man, zur Vereinfachung der Berechnung, ½ für

$$\frac{1}{1 + \frac{a(b_1 - b)}{b(a_1 - a)}}$$

ſetzt (§. 127). In gleicher Weiſe erhält man für die Wahrſcheinlichkeit deſſelben Falles in Beziehung auf das 2te Jahr $\frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab}$. Wenn man daher dieſen Werth zu dem vorher gefundenen addirt, ſo drückt die Summe, oder

$$\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab} + \frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab}$$

die Wahrſcheinlichkeit aus, daß von den beiden Perſonen A und B die Perſon A innerhalb des Zeitraums von 2 Jahren zuerſt ſtirbt. Ebenſo drückt $\frac{(a_2 - a_3)\, b_2 + b_3)}{2ab}$ für das 3te Jahr die Wahrſcheinlichkeit aus, daß A früher ſtirbt als B. Die Wahrſcheinlichkeit, daß von den beiden Perſonen A und B die Perſon A innerhalb des Zeitraums von 3 Jahren zuerſt ſtirbt, wird daher ausgedrückt durch $\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab} +$

$$\frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab} + \frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{2ab}$$

Fährt man in gleicher Weiſe bis zur Grenze des menſchlichen Alters fort, ſo drückt

$$\frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab} + \frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab} + \ldots$$
$$\frac{(a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} + b_n)}{2ab}$$

oder $\frac{1}{2ab}\Big\{(a - a_1)(b + b_1) + (a_1 - a_2)(b_1 + b_2) + \ldots$
$(a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} + b_n)\Big\}$

die Wahrſcheinlichkeit aus, daß A früher ſtirbt als B.

Zur Ausrechnung dieſer Reihe für Perſonen verſchiedenen Alters, aber von gleicher Altersdifferenz, wird mit dem letzten Gliede $(a_{n-1} - a_n)(b_{n-1} + b_n)$ der Anfang gemacht, und ſodann fortgefahren bis man zum Alter der gegebenen Perſonen gelangt.

Soll z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß die Person A früher als die um 8 Jahre ältere Person B stirbt, so ist, wenn man sich der Tabelle von Deparcieux bedient, die Berechnung wie folgt.

Alter des A.	Alter des B.	Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt als B.
86	94	$\frac{1}{2\times 38\times 1}\,(38-29)(1+0)=0{,}1184$
85	93	$\frac{1}{2\times 48\times 2}\{(48-38)(2+1)+(38-29)(1+0)\}=0{,}2031$
84	92	$\frac{1}{2\times 59\times 4}\{(59-48)(4+2)+(48-38)(2+1)+(38-29)(1+0)\}=0{,}2224$
83	91	$\frac{1}{2\times 71\times 7}\{(71-59)(7+4)+(59-48)(4+2)+(48-38)(2+1)+(38-29)(1+0)\}=0{,}2384$
82	90	$\frac{1}{2\times 85\times 11}\{(58-71)(11+7)+(71-59)(7+4)+(59-48)(4+2)+(48-38)(2+1)+(38-29)(1+0)\}=0{,}2614$

u. s. w.

Sind die beiden Personen von gleichem Alter, so ist die Summe der Glieder der obigen Reihe $= \frac{1}{2}$.

Zieht man von der Wahrscheinlichkeit, daß die eine oder andere der beiden Personen A und B in einem gewißen Zeitraume stirbt, die Summe einer diesem Zeitraume entsprechenden Anzahl von Gliedern der obigen Reihe ab, so drückt der Rest für diesen Zeitraum die Wahrscheinlichkeit aus, daß B früher stirbt, als A. Weil es aber gewiß ist, daß eine der beiden Personen A und B vor dem Ende des *n*ten Jahres stirbt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß die Person B früher als A stirbt,

wenn man die Summe aller Glieder der obigen Reihe von 1 abzieht. Bezeichnet daher f die Wahrscheinlichkeit, daß A früher stirbt als B, so drückt $1 - f$ die Wahrscheinlichkeit aus, daß B früher stirbt als A.

Was die Wahrscheinlichkeit betrifft, daß von den beiden Personen A und B der A später stirbt als B, so kann dieß begreiflicherweise im ersten Jahre nur dann geschehen, wenn beide Personen sterben und A zuletzt. Die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist $\frac{a - a_1}{a} \times \frac{b - b_1}{b} \times \frac{1}{2}$ (§. 127) wofür man auch $\frac{a - a_1}{a} - \frac{(a - a_1)(b + b_1)}{2ab}$ setzen kann. Im zweiten und jedem folgenden Jahre hingegen kann der in Rede stehende Fall auf zweierlei Arten zutreffen, nämlich dann, wenn beide Personen im Laufe des Jahres sterben, und zwar A zuletzt, und wenn A in diesem Jahre stirbt, und B schon in einem der frühern Jahre gestorben ist. Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall ist für das zweite Jahr $= \frac{(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)}{2ab}$, und diejenige für den zweiten Fall ist $\frac{a_1 - a_2}{a}\left(1 - \frac{b_1}{b}\right)$ (§. 125). Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten oder

$$\frac{a_1 - a_2}{a} - \frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab}$$

drückt folglich die Wahrscheinlichkeit aus, daß A in dem zweiten Jahre nach B stirbt. Wird dieser Ausdruck zu dem für das erste Jahr gefundenen addirt, so drückt die Summe

$$\frac{a - a_1}{a} - \frac{(a_1 - a_2(b + b_1)}{2ab} + \frac{a_1 - a_2}{a} - \frac{(a_1 - a_2)(b_1 + b_2)}{2ab}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, daß A innerhalb des Zeitraums von zwei Jahren nach B stirbt.

In Beziehung auf das dritte Jahr ist die Wahrscheinlichkeit des ersten Falles $= \frac{(a_2 - a_3)(b_2 - b_3}{2ab}$, und diejenige des zweiten Falles ist $= \frac{(a_2 - a_3}{a}\left(1 - \frac{b_2}{b}\right)$; die Summe dieser beiden Ausdrücke oder

$$\frac{a_2 - a_3}{a} - \frac{(a_2 - a_3)(b_2 + b_3)}{2ab}$$

drückt folglich die Wahrscheinlichkeit aus, daß A im dritten Jahre später stirbt als B, und wenn man diesen Ausdruck zu dem obigen für zwei Jahre gefundenen addirt, so drückt die Summe

$$\frac{a-a_1}{a}-\frac{(a-a_1)(b+b_1)}{2ab}+\frac{a_1-a_2}{a}-\frac{(a_1-a_2)(b_1+b_2)}{2ab}$$
$$+\frac{a_2-a_3}{a}-\frac{(a_2-a_3)(b_2+b_3)}{2ab}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, daß A in dem Zeitraume von drei Jahren später als A stirbt. Fährt man auf diese Weise für alle folgende Jahre fort und bezeichnet n die Differenz zwischen dem Alter der ältesten der gegebenen Personen und der Lebensgrenze, so drückt die Reihe

$$\frac{a-a_1}{a}+\frac{a_1-a_2}{a}+\frac{a_2-a_3}{a}+\ldots\frac{a_{n-1}-a_n}{a}-$$
$$\frac{1}{2ab}\Big\{(a-a_1)(b+b_1)+(a_1-a_2)(b_1+b_2)+(a_2-a_3)\times$$
$$(b_2+b_3)+\ldots(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}+b_n)\Big\}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, daß die Person A in dem entsprechenden Zeitraume später stirbt als B.

Es ist aber

$$\frac{a-a_1}{a}+\frac{a_1-a_2}{a}+\frac{a_2-a_3}{a}+\ldots\frac{a_{n-1}-a_n}{a}=$$
$$\frac{a-a_n}{a}=1-\frac{a_n}{a},$$

welch' letzterer Ausdruck die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß A innerhalb des erwähnten Zeitraums stirbt; der zweite Theil obiger Reihe ist nach der früher angenommenen Bezeichnung $=f$, und mithin wird die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit für n Jahre durch $1-\frac{a_n}{a}-f$ ausgedrückt.

Zieht man von der Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Personen in einem gewissen Zeitraume sterben, die Summe einer diesem Zeitraume entsprechenden Anzahl von Gliedern obiger Reihe ab, so drückt der Rest die Wahrscheinlichkeit aus, daß B innerhalb dieses Zeitraums später stirbt als A.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Personen in n Jahren sterben ist =

$$\left(1 - \frac{a_n}{a}\right)\left(1 - \frac{b_n}{b}\right) = 1 - \frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{b} + \frac{a_n b_n}{ab};$$

weil es aber gewiß ist, daß eine der beiden Personen nach n Jahren gestorben ist, so reducirt sich dieser Ausdruck auf $1 - \frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{b}$. Zieht man hiervon die Summe der ganzen Reihe ab, so drückt der Rest

$$1 - \frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{b} - \left(1 - \frac{a_n}{a} - f\right) = f - \frac{b_n}{b}$$

die Wahrscheinlichkeit aus, daß B in diesem Zeitraume nach A stirbt.

Sind die beiden Personen A und B von gleichem Alter, so ist $f = \frac{1}{2}$, und es ist alsdann auch die Summe der obigen Reihe $= \frac{1}{2}$.

Im Obigen sind die Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens nur bis zum $n$ten Jahre, als der Grenze des Zusammenlebens der beiden Personen, geführt worden, ohne daß ein höheres Alter dabei berücksichtigt worden ist. Ist aber A die ältere der beiden Personen, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruck $1 - \frac{a_n}{a} - f$ in $1 - f$, weil $a_n = 0$ ist, in Uebereinstimmung mit der früher gefundenen Formel. Ist dagegen A jünger als B, so bezeichnet $1 - f$ nicht mehr die ganze Wahrscheinlichkeit, daß A nach B stirbt, weil A nach der Lebensgrenze von B sterben kann. Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit für die folgenden Jahre muß die obige Reihe bis zur Lebensgrenze von A fortgesetzt werden. Demzufolge wird die Wahrscheinlichkeit, daß A im $(n+1)$ten, $(n+2)$ten, $(n+3)$ten Jahre u. s. w. nach B stirbt beziehlich durch $1 - f - \frac{a_{n+1}}{a}$, $1 - f - \frac{a_{n+2}}{a}$, $1 - f - \frac{a_{n+3}}{a}$ u. s. w. bis zur Lebensgrenze von A, für welche die Wahrscheinlichkeit $= 1 - f$ wird, ausgedrückt.

Ist B älter als A, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß B nach A stirbt $= f$; ist aber B jünger als A, so bezeichnet $f - \frac{b_n}{b}$ die Wahrscheinlichkeit dieses Falles für n Jahre oder bis zum Ende des Zusammenlebens der beiden Personen. Die Wahrscheinlichkeit desselben Falles für $n+1$, $n+2$, $n+3$ u. s. w.

Jahre wird dagegen beziehlich durch $f - \frac{b_{n+1}}{b}$, $f - \frac{b_{n+2}}{b}$ und so fort bis zur Lebensgrenze von B, für welche die Wahrscheinlichkeit $= f$ wird, ausgedrückt.

Vermittelst der im Obigen berechneten Wahrscheinlichkeiten, daß die Person B in 1, 2, 3, u. s. w. Jahren nach der Person C stirbt, läßt sich nun der Werth einer Leibrente finden, welche die Person A nach dem Tode der beiden Personen B und C in dem Falle erlangt, wenn B nach C stirbt. Denn wenn die in Rede stehenden Wahrscheinlichkeiten durch w_1 w_2, w_3 u. s. w. bezeichnet werden, so werden die Erwartungen der Person A zum Besitz der Leibrente zu gelangen, in Beziehung auf das 1te, 2te, 3te u. s. w. Jahr durch $\frac{a_1 w_1}{a(1+p)}$, $\frac{a_2 w_2}{a(1+p)^2}$, $\frac{a_3 w_3}{a(+p)^3}$ u. s. w. ausgedrückt, und die Summe dieser Ausdrücke ist der gesuchte Werth der Leibrente. Ist die Altersdifferenz der Person B und C klein, so kann die Wahrscheinlichkeit des Falles, daß B nach C stirbt, $= \frac{1}{2}$ gesetzt werden; ist aber die Altersdifferenz bedeutend, so muß die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit wie im Obigen für jedes Jahr bestimmt werden. In beiden Fällen ist aber die Berechnung des Werths der Leibrente sehr weitläufig. Praktischere Formeln, deren Herleitung hier zu weit führen würde, finden sich unter Andern in Tetens's Einleitung zur Berechnung der Leibrenten ꝛc. in Meyers allgemeiner Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Baily's Theorie der Lebensrenten ꝛc.

Zweiter Abschnitt.

Von der Lebensversicherung.

203. Die Lebensversicherung (§. 201) kann entweder ohne weitere Bedingung auf dem Ableben mehrerer Personen beruhen oder aber unter Berücksichtigung einer gewissen Ordnung des Ueberlebens dieser Personen geschlossen werden.

In beiden Fällen können aber noch besondere Bedingungen in Betreff der Zeit des Eintritts in den Besitz des Kapitals oder der Leibrente oder in Betreff der Dauer des Besitzes der Rente festgesetzt werden.

Erster Unterabschnitt.

Von derjenigen Lebensversicherung, welche, abgesehen von Zeitbestimmungen, ohne weitere Bedingung auf dem Ableben mehrerer Personen beruht.

204. In Betreff der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die hier in Betrachtung zu ziehenden Fälle ist es nicht einerlei, ob die Anwartschaft auf ein Kapital oder auf eine Rente lautet. Im ersten Falle muß für die Erwartung, das Kapital zu Ende irgend eines Jahres zu erlangen, vorausgesetzt werden, daß man dasselbe zu Ende eines frühern Jahres nicht erhalten hat, wonach die Wahrscheinlichkeit, das Kapital zu Ende irgend eines Jahres zu erhalten aus der Wahrscheinlichkeit, daß die gegebenen Personen im Laufe dieses Jahres sterben, und aus der Wahrscheinlichkeit, daß sie alle vorhergehenden Jahre durchlebt haben, zusammengesetzt ist. Lautet aber die Anwartschaft auf eine Rente, so ist die Erwartung, irgend einer der jährlichen Zahlungen theilhaftig zu werden von jeder der übrigen Zahlungen unabhängig.

Berechnung des Werths eines versicherten Kapitals.

205. Es sey vorerst der Werth eines Kapitals zu bestimmen, welches zu Ende desjenigen Jahres gezahlt wird, in welchem die erste von irgend einer Anzahl von Personen stirbt.

Nehmen wir drei Personen A, B, C an, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine derselben im 1ten Jahre stirbt $= 1 - \frac{a_1\ b_1\ c_1}{a\ b\ c} = \frac{a\ b\ c - a_1\ b_1\ c_1}{a\ b\ c}$. Wäre es gewiß, daß man nach einem Jahre die Summe v erhielte, so wäre der gegenwärtige Werth derselben $= \frac{v}{1+p}$; wegen der in Rede stehenden Bedingung reducirt sich dagegen dieser Werth auf $\frac{a\ b\ c - a_1\ b_1\ c_1}{a\ b\ c} \times \frac{v}{1+p}$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine der drei Personen A, B, C im Laufe des 2ten Jahres stirbt ist $= \left(1 - \frac{a_2\ b_2\ c_2}{a_1\ b_1\ c_1}\right) \frac{a_2\ b_2\ c_2}{a\ b\ c}$

$= \frac{a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2}{a b c}$, und mithin ist der Werth der Erwartung, die Summe v im 2ten Jahre zu erhalten $= \frac{a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2}{a b c} \times \frac{v}{(1+p)^2}$. Ebenso ist $\frac{a_2 b_2 c_2 - a_3 b_3 c_3}{a b c} \times \frac{v}{(1+p)^3}$ der Werth der Erwartung, die Summe v im 3ten Jahre zu erhalten u. s. w. Der gegenwärtige Totalwerth der Summe v besteht daher aus der Summe dieser Werthe. Nun ist aber

$$\frac{v}{1+p}\left(\frac{a b c - a_1 b_1 c_1}{a b c}\right) + \frac{v}{(1+p)^2}\left(\frac{a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2}{a b c}\right) + \ldots$$

$$= \frac{v}{a b c (1+p)}\left\{a b c + \frac{a_1 b_1 c_1}{1+p} + \frac{a_2 b_2 c_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3 b_3 c_3}{(1+p)^3} + \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{v}{a b c}\left\{\frac{a_1 b_1 c_1}{1+p} + \frac{a_2 b_2 c_2}{(1+p)^2} + \frac{a_3 b_3 c_3}{(1+p)^3} + \ldots\right\}\right.$$

Die erste Reihe ist $= \frac{v}{1+p}(1 + A B C)$, und die zweite ist $= v \times A B C$; der Totalwerth ist demnach $= v\left(\frac{1 + A B C}{1+p} - A B C\right) = v\left(\frac{1 - p \times A B C}{1+p}\right)$ Für jede andere Anzahl von Personen wird auf dieselbe Weise verfahren, und für n Personen wird der Zinsfuß mit dem Werthe einer Leibrente für n Personen multiplicirt, das Produkt von 1 abgezogen, der Rest durch $1+p$ dividirt und der Quotient mit v multiplicirt.

Ist die Zahlung der Summe v durch das Ableben einer einzigen Person bedingt, so ist der Totalwerth $= v\left(\frac{1-p \times A}{1+p}\right)$ Im §. 127, in welchem dieser specielle Fall vorkommt, ist zugleich gezeigt worden, wie sich der Totalwerth in jährliche gleiche Beiträge oder Prämien verwandeln läßt.

Von den halbjährlich vierteljährlich u. s. w. zahlbaren Lebensversicherungen.

206. Bezeichnet a die Anzahl der Lebenden in der Sterblichkeitstabelle beim Alter der Person A, und a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Anzahl der Lebenden von dem um 1, 2, 3 u. s. w. Jahren höheren Alter, so werden die Zahlen der Lebenden von dem um ½, 1½, 2½ u. s. w. Jahren höheren Alter beziehlich durch

$$a - \frac{a - a_1}{2} = \frac{a + a_1}{2}$$

$$a_1 - \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_2 - \frac{a_2 - a_3}{2} = \frac{a_2 + a_3}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_n - \frac{a_n - a_{n+1}}{2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

so genau, als es der Zweck der Berechnung erfordert, ausgedrückt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Person A im Laufe des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Halbjahrs stirbt, wird daher beziehlich ausgedrückt durch

$$1 - \frac{\frac{a + a_1}{2}}{a} = \frac{a - a_1}{2a}$$

$$\left(1 - \frac{a_1}{\frac{a + a_1}{2}}\right) \times \frac{\frac{a + a_1}{2}}{a} = \frac{a - a_1}{2a}$$

$$\left(1 - \frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{a_1}\right) \times \frac{a_1}{a} = \frac{a_1 - a_2}{2a}$$

$$\left(1 - \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2}{2}}\right) \times \frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{a} = \frac{a_1 - a_2}{2a}$$

u. s. w.

Der baare Werth einer auf die Person A versicherten Summe v wird daher, wenn die Rechnung für Halbjahre geführt wird, ausgedrückt durch

$$\frac{v}{2a}\left(\frac{a - a_1}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a - a_1}{1+p} + \frac{a_1 - a_2}{(1+p)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_1 - a_2}{(1+p)^2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{v}{2}\left(1 + (1+p)^{\frac{1}{2}}\right) \times \frac{1 - pA}{1+p}$$

Die Zahlen der Lebenden von dem um ¼, ¾, 1¼, 1¾ u. s. w. höhern Alter werden ausgedrückt durch

$$\frac{3a + a_1}{4}, \frac{a + 3a_1}{4}, \frac{3a_1 + a_2}{4}, \frac{a_1 + 3a_2}{4}, \frac{3a_2 + a_3}{4},$$

$$\frac{a_2 + 3a_3}{4} \text{ u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, daß die Person A im 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Vierteljahre stirbt, werden beziehlich ausgedrückt durch

$$\frac{a-a_1}{4a}, \frac{a-a_1}{4a}, \frac{a-a_1}{4a}, \frac{a-a_1}{4a}, \frac{a_1-a_2}{4a}, \frac{a_1-a_2}{4a}$$

u. s. w. Der baare Werth der auf die Person A versicherten Summe v wird daher, wenn die Rechnung für Vierteljahre geführt wird, ausgedrückt durch

$$\frac{v}{4a}\left(\frac{a-a_1}{(1+p)^{\frac{1}{4}}}+\frac{a-a_1}{(1+p)^{\frac{2}{4}}}+\frac{a-a_1}{(1+p)^{\frac{3}{4}}}+\frac{a-a_1}{1+p}+\frac{a_1-a_2}{(1+p)^{\frac{1}{4}}}+\ldots\right)$$

$$=\frac{v}{4}\left(1+(1+p)^{\frac{1}{4}}+(1+p)^{\frac{2}{4}}+(1+p)^{\frac{3}{4}}\right)\times\frac{1-p\,A}{1+p}$$

$$=\frac{v}{4}\times\frac{p}{(1+p)^{\frac{1}{4}}-1}\times\frac{1-p\,A}{1+p}$$

Wird die Berechnung auf gleiche Weise für $n$tel Jahre geführt, so wird der entsprechende Totalwerth ausgedrückt durch

$$\frac{v}{n}\left(1+(1+p)^{\frac{1}{n}}+(1+p)^{\frac{2}{n}}+\ldots.(1+p)^{\frac{n-1}{n}}\right)\times$$

$$\frac{1-p\,A}{1+p}=\frac{v}{n}\times\frac{p}{(1+p)^{\frac{1}{n}}-1}\times\frac{1-p\,A}{1+p}$$

Ist n unendlich groß, so ist $n\,[(1+p)^{\frac{1}{n}}-1]=Nep.\ log.(1+p)$ und in diesem Falle ist der Totalwerth $=$

$$\frac{vp}{Nep.\ log.(1+p)}\times\frac{1-p\,A}{1+p}$$

Weil der Neperische Logarithme von $1+p$ unbeschadet der hier erforderlichen Genauigkeit $=\frac{2p}{2+p}$ gesetzt werden kann, so kann obiger Werth auch ausgedrückt werden durch

$$\frac{v\,p\,(2+p)}{2p}\times\frac{1-p\,A}{1+p}=v\left(1+\frac{p}{2}\right)\times\frac{1-p\,A}{1+p}$$

Dieß ist demnach der Werth der Summe v, welche gleich nach erfolgtem Ableben der Person A ausgezahlt wird. Bei der für ganze Jahre angestellten Berechnung ist (§. 205) der Totalwerth $=v\times\frac{1-p\,A}{1+p}$. Die Differenz dieses und des obigen, für augenblickliche Termine berechneten Werths ist $=\frac{vp}{2}\times\frac{1-p\,A}{1+p}$, was nur wenig von dem für jährliche Termine berechneten Werthe abweicht.

207. Ist die Versicherung eine aufgeschobene, und soll, in Beziehung auf die Aufgabe im §. 205 das Kapital nur in dem Falle gezahlt werden, wenn die Auflösung der Verbindung der Personen erst nach Ablauf von n Jahren erfolgt, so wird der entsprechende Werth ausgedrückt durch Aufgeschobene Lebensversicherung.

$$v\left\{\frac{a_n\,b_n\,c_n - a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}}{a\,b\,c\,(1+p)^{n+1}} + \frac{a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1} - a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}}{a\,b\,c\,(1+p)^{n+2}} + \ldots\right\}$$

Diese Reihe läßt sich in die beiden folgenden zerlegen:

$$\frac{v}{a\,b\,c(1+p)^n}\left\{\frac{a_n\,b_n\,c_n}{1+p} + \frac{a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}}{(1+p)^2} + \frac{a_{n+2}\,b_{n+2}\,c_{n+2}}{(1+p)^3} + \ldots\right\} -$$

$$\frac{v}{a\,b\,c(1+p)^n}\left\{\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}\,c_{n+1}}{1+p} + \frac{a_{n+2}b_{n+2}c_{n+2}}{(1+p)^2} + \frac{a_{n+3}\,b_{n+3}\,c_{n+3}}{(1+p)^3} + \ldots\right\}$$

Die zweite Reihe ist $= v\,R_n$ (§. 191), und die erste ist $=$

$$\frac{v}{a\,b\,c(1+p)^n} \times \frac{a_n\,b_n\,c_n}{1+p} + \frac{v}{a\,b\,c(1+p)^n}\left\{\frac{a_{n+1}\,b_{n+1}\,c_{n+1}}{(1+p)^2} + \frac{a_{n+2}\,b_{n+2}\,c_{n+2}}{(1+p)^3} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{v}{a\,b\,c(1+p)^n} \times \frac{a_n\,b_n\,c_n}{1+p} + \frac{v\,R_n}{1+p}$$

Der gegenwärtige Werth des versicherten Kapitals ist daher $=$

$$v \times \frac{\frac{a_n\,b_n\,c_n}{a\,b\,c}\,(1+p)^{-n} - p\,R_n}{1+p}$$

oder, wenn man $(A\,B\,C)_n$ für R_n setzt, durch

$$v \times \frac{\frac{a_n\,b_n\,c_n}{a\,b\,c}\,(1+p)^{-n} - p\,(A\,B\,C)_n}{1+p}$$

208. Ist die Lebensversicherung eine temporäre, und soll der Werth eines Kapitals bestimmt werden, welches bei der Auflösung einer Verbindung von Personen in dem Falle zahlbar ist, wenn sie innerhalb n Jahren erfolgt, so hat man die n ersten Glieder der im §. 205 hergeleiteten Reihe zu addiren. Temporäre Lebensversicherung.

Dieser Werth wird mithin ausgedrückt durch

$$v\left\{\frac{a\,b\,c - a_1\,b_1\,c_1}{a\,b\,c\,(1+p)} + \frac{a_1b_1c_1 - a_2b_2c_2}{a\,b\,c\,(1+p)^2} + \frac{a_2\,b_2\,c_2 - a_3\,b_3\,c_3}{a\,b\,c\,(1+p)^3} + \ldots\ldots \frac{a_{n-1}\,b_{n-1}\,c_{n-1} - a_n\,b_n\,c_n}{a\,b\,c\,(1+p)^n}\right\}$$

Diese Reihe läßt sich in die beiden folgenden zerlegen:

$$\frac{v}{abc(1+p)}\left\{abc+\frac{a_1\,b_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\ldots\frac{a_{n-1}b_{n-1}c_{n-1}}{(1+p)^{n-1}}\right\}$$
$$-\frac{v}{abc}\left\{\frac{a_1\,b_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\ldots\frac{a_n\,b_n\,c_n}{(1+p)^n}\right\}$$

Die erste dieser Reihen ist =

$$\frac{v}{abc(1+p)}\times abc+\frac{v}{abc(1+p)}\left\{\frac{a_1\,b_1\,c_1}{1+p}+\frac{a_2\,b_2\,c_2}{(1+p)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\frac{a_{n-1}\,b_{n-1}\,c_{n-1}}{(1+p)^{n-1}}\right\}=$$

$v\times\frac{1+R_{t-1}}{1+p}$ (§. 192) oder, wenn man $(ABC)_{t-1}$ für R_{t-1} setzt, $=v\times\frac{1+(ABC)_{t-1}}{1+p}$

Die zweite Reihe ist $=v\,(ABC)_t$, und der Werth des versicherten Kapitals ist demnach $=v\left\{\frac{1+(ABC)_{t-1}}{1+p}-(ABC)_t\right\}$

Was in Betreff der Anzahl der Personen im §. 205 bemerkt worden ist, gilt auch für die aufgeschobene und temporäre Lebensversicherung.

Berechnung des Werths einer versicherten Leibrente.

209. Zur Berechnung des Werths einer Leibrente, deren Auszahlung zu Ende desjenigen Jahres beginnt, in welchem eine Verbindung von Personen erlöscht, wollen wir nur 3 Personen annehmen, weil im vorliegenden Falle die Berechnung für jede andere Anzahl von Personen in gleicher Weise geführt wird.

Die Wahrscheinlichkeit, die Rente 1 zu Ende irgend eines Jahres zu beziehen, hängt von der Auflösung der Verbindung der Personen im Laufe dieses Jahres ab. Diese Wahrscheinlichkeit ist $=1-\frac{a_1\,b_1\,c_1}{abc}$ und der Werth der Erwartung zum Bezuge der 1ten Rente ist daher $=\left(1-\frac{a_1\,b_1\,c_1}{abc}\right)\times\frac{1}{1+p}$. Die Wahrscheinlichkeit, daß vor Ende des 2ten Jahres die Auflösung der Verbindung stattfindet ist $=1-\frac{a_2\,b_2\,c_2}{abc}$, und der Werth der Erwartung zum Bezuge der 2ten Jahresrente ist demnach $=\left(1-\frac{a_2\,b_2\,c_2}{abc}\right)\frac{1}{(1+p)^2}$ u. s. w. Der Totalwerth der Rente ist demnach =

$$\left(1 - \frac{a_1 b_1 c_1}{a b c}\right) \frac{1}{1+p} + \left(1 - \frac{a_2 b_2 c_2}{a b c}\right) \frac{1}{(1+p)^2} + \left(1 - \frac{a_3 b_3 c_3}{a b c}\right) \frac{1}{(1+p)^3} + \text{u. s. w.}$$

210. Hängt die Auszahlung des versicherten Kapitals vom Aussterben einer Verbindung von Personen ab, so hat man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die gegebenen Personen zu Ende des 1ten, 2ten, 3ten u. s. w. Jahres ausgestorben sind. Und hängt von dieser Bedingung des Absterbens eine Leibrente ab, so hat man die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß die gegebenen Personen in 1, 2, 3 u. s. w. Jahren ausgestorben sind.

Zweiter Unterabschnitt.

Von denjenigen Lebensversicherungen, welche auf einer besondern Ordnung des Ueberlebens beruhen.

211. Wenn die Auszahlung des versicherten Kapitals von einer besondern Ordnung des Ueberlebens abhängt, so sind in Beziehung auf solche die mannigfaltigsten Combinationen denkbar, und die Fälle werden um so verwickelter, je größer die Anzahl der dabei angenommenen Personen ist. In der Praxis sind übrigens nur wenige Combinationen des Ueberlebens anwendbar, und die Lebensversicherungsanstalten beschränken sich in der Regel auf Verbindungen von zwei Personen. Die hierher gehörige Versicherung, so wie auch die Versicherung auf verbundenes Leben sind im §. 127 bereits abgehandelt worden. Hier folgen nun einige weitere Fälle zur Bestätigung obiger Behauptungen.

Nach der im angeführten Paragraphen aufgestellten Bedingung wird die versicherte Summe nach dem Tode des A ausgezahlt, wenn derselbe früher stirbt als B. Der dort hergeleitete gegenwärtige Werth der versicherten Summe läßt sich auch ausdrücken durch

$$\frac{v}{2(1+p)}\left(\frac{a\,b}{a\,b} - \frac{a_1\,b}{a\,b} - \frac{a_1\,b_1}{a\,b} + \frac{a\,b_1}{a\,b}\right) + \frac{v}{2(1+p)^2}\left(\frac{a_1\,b_1}{a\,b} - \frac{a_2\,b_1}{a\,b} - \frac{a_2\,b_2}{a\,b} + \frac{a_1\,b_2}{a\,b}\right)$$

$$+\frac{v}{2(1+p)^3}\left(\frac{a_2\,b_2}{a\,b}-\frac{a_3\,b_2}{a\,b}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}+\frac{a_2\,b_3}{a\,b}\right)$$

$+$ u. ſ. w.

Iſt die Verſicherung eine aufgeſchobene, und zwar für n Jahre, wobei es ſich von ſelbſt verſteht, daß die Zeit n kleiner als die mögliche Dauer des Zuſammenlebens der Perſon **A** und **B** ſeyn muß, ſo werden die Verticalreihen des obigen Ausdrucks vom $n$ten Gliede an genommen, und bis zur Grenze des menſchlichen Lebens fortgeſetzt.

Iſt dagegen die Verſicherung temporär, ſo dürfen die Verticalreihen nur bis auf n Glieder fortgeſetzt werden.

Nehmen wir jetzt an, daß die Auszahlung der verſicherten Summe nach dem Tode des **A** erfolgt, wenn derſelbe eine andere Perſon **B** überlebt.

Die Auszahlung des verſicherten Kapitals erfolgt zu Ende des erſten Jahres wenn **A** und **B** innerhalb dieſes Zeitraums geſtorben ſind, und zwar **A** zuletzt. Die Wahrſcheinlichkeit dieſes Ereigniſſes iſt $=\frac{(a-a_1)\,(b-b_1)}{2\,a\,b}$ (§. 127). Im zweiten und jedem der folgenden Jahre hängt die Wahrſcheinlichkeit, das verſicherte Kapital zu erhalten, von einem der beiden folgenden Ereigniſſe ab: 1) Entweder ſind die beiden Perſonen in dieſem Jahre geſtorben, und zwar **A** zuletzt, oder **A** iſt in dieſem Jahre geſtorben und **B** in einem der vorhergehenden Jahre. Die Wahrſcheinlichkeit des erſten Ereigniſſes iſt für das 2te Jahr $=\frac{(a_1-a_2)\,(b_1-b_2)}{2\,a\,b}$, und die des zweiten für dieſe Zeit iſt $=\frac{(a_1-a_2)\,(b-b_2)}{a\,b}$, und die Summe dieſer Wahrſcheinlichkeiten iſt $=$

$$\frac{a_1}{a}-\frac{a_2}{a}-\frac{a_1\,b_1}{2\,a\,b}+\frac{a_2\,b_2}{2\,a\,b}+\frac{a_2\,b_1}{2\,a\,b}+\frac{a_1\,b_2}{2\,a\,b}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\,a_1}{a}-\frac{2\,a_2}{a}-\frac{a_1\,b_1}{a\,b}+\frac{a_2\,b_2}{a\,b}+\frac{a_2\,b_1}{a\,b}-\frac{a_1\,b_2}{a\,b}\right)$$

Eben ſo findet man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,a_2}{a}-\frac{2\,a_3}{a}-\frac{a_2\,b_2}{a\,b}+\frac{a_3\,b_3}{a\,b}+\frac{a_3\,b_2}{a\,b}-\frac{a_2\,b_3}{a\,b}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,a_3}{a}-\frac{2\,a_4}{a}-\frac{a_3\,b_3}{a\,b}+\frac{a_4\,b_4}{a\,b}+\frac{a_4\,b_3}{a\,b}-\frac{a_3\,b_4}{a\,b}\right)$$

u. ſ. w.

für die Summe der Wahrscheinlichkeiten des ersten und zweiten Ereignisses im 2ten, 3ten u. s. w. Jahre.

Die Wahrscheinlichkeit für das 1te Jahr, daß A und B gestorben sind, und zwar A zuletzt, nämlich $\frac{(a-a_1)(b-b_1)}{2ab}$ oder $\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{ab}+\frac{a_1b_1}{ab}-\frac{a_1b}{ab}-\frac{ab_1}{ab}\right)$ kann auch durch $\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{ab}-\frac{2a_1b}{ab}-\frac{ab}{ab}+\frac{a_1b_1}{ab}+\frac{a_1b}{ab}-\frac{ab_1}{ab}\right)$ oder $\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a}-\frac{2a_1}{a}-\frac{ab}{ab}+\frac{a_1b_1}{ab}+\frac{a_1b}{ab}-\frac{ab_1}{ab}\right)$ ausgedrückt werden.

Der gegenwärtige Werth des versicherten Kapitals v ist daher =

$$\frac{v}{2(1+p)}\left(\frac{2a}{a}-\frac{2a_1}{a}-\frac{ab}{ab}+\frac{a_1b_1}{ab}+\frac{a_1b}{ab}-\frac{ab_1}{ab}\right)$$
$$+\frac{v}{2(1+p)^2}\left(\frac{2a_1}{a}-\frac{2a_2}{a}-\frac{a_1b_1}{ab}+\frac{a_2b_2}{ab}+\frac{a_2b_1}{ab}-\frac{a_1b_2}{ab}\right)$$
$$+\frac{v}{2(1+p)^3}\left(\frac{2a_2}{a}-\frac{2a_3}{a}-\frac{a_2b_2}{ab}+\frac{a_3b_3}{a}+\frac{a_3b_2}{ab}-\frac{a_2b_3}{ab}\right)$$
$$+\frac{v}{2(1+p)^4}\left(\frac{2a_3}{a}-\frac{2a_4}{a}-\frac{a_3b_3}{ab}+\frac{a_4b_4}{ab}+\frac{a_4b_3}{ab}-\frac{a_3b_4}{ab}\right)$$
$$+\text{ u. s. w.}$$

Anderer Fall. Die Auszahlung der versicherten Summe erfolgt entweder nach dem Tode des A, oder nach dem Tode des B, wenn eine dieser Personen die zweite oder dritte ist, welche von drei Personen A, B, C stirbt.

Die Auszahlung der versicherten Summe zu Ende des ersten Jahres ist durch eines der vier folgenden Ereignisse bedingt:

1) A, B, C sterben in diesem Jahre;

2) A und B sterben in diesem Jahre, und C lebt noch zu Ende desselben; oder

3) A stirbt in diesem Jahre später als C, und B lebt noch zu Ende desselben; oder

4) B stirbt in diesem Jahre später als C, und A lebt noch zu Ende desselben.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind beziehlich folgende:

$$\frac{(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)}{abc},\ \frac{(a-a_1)(b-b_1)c_1}{abc},$$
$$\frac{(a-a_1)(c-c_1)b_1}{2abc}\ \text{und}\ \frac{(b-b_1)(c-c_1)a_1}{2abc}$$

Die Auszahlung der versicherten Summe zu Ende des zweiten und jeden folgenden Jahres ist durch eines der folgenden dreizehn Ereignisse bedingt:

1) A, B, C sterben in diesem Jahre; oder

2) A und B sterben in diesem Jahre, und C lebt noch zu Ende desselben; oder

3) A und C sterben in diesem Jahre und zwar A zuletzt, und B lebt noch zu Ende desselben; oder

4) B und C sterben in diesem Jahre und zwar B zuletzt, und A lebt noch zu Ende desselben; oder

5) A und B sterben in diesem Jahre, und C ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

6) A und C sterben in diesem Jahre, und B ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

7) B und C sterben in diesem Jahre und A ist in einem frühern Jahre gestorben, oder

8) A stirbt in diesem Jahre, B lebt noch zu Ende desselben, und C ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

9) A stirbt in diesem Jahre, C lebt noch zu Ende desselben, und B ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

10) B stirbt in diesem Jahre, A lebt noch zu Ende desselben und C ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

11) B stirbt in diesem Jahre, C lebt noch zu Ende desselben, und A ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

12) A stirbt in diesem Jahre, B, C sind in einem frühern Jahre gestorben, und zwar B zuerst; oder

13) B stirbt in diesem Jahre, A, C sind in einem frühern Jahre gestorben, und zwar A zuerst.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse für das zweite Jahr sind beziehlich folgende:

$$\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)(c_1-c_2)}{abc},\ \frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)c_2}{abc},$$

$$\frac{(a_1-a_2)(c_1-c_2)b_2}{2abc},\ \frac{(b_1-b_2)(c_1-c_2)a_2}{2abc},$$

$$\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right),\ \frac{(a_1-a_2)(c_1-c_2)}{ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right),$$

$$\frac{(b_1-b_2)(c_1-c_2)}{bc}\left(\frac{a-a_1}{a}\right),\ \frac{(a_1-a_2)b_2}{ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right),$$

$$\frac{(a_1-a_2)c_2}{ac}\left(\frac{b-b_1}{b}\right),\ \frac{(b_1-b_2)a_2}{ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right),$$
$$\frac{(b_1-b_2)c_2}{bc}\left(\frac{a-a_1}{a}\right),\ \frac{(a_1-a_2)}{2a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right),$$
und $\frac{(b_1-b_2)}{2b}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{c-c_2}{c}\right)$

Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für das dritte, vierte Jahr u. s. w und wenn man die dem ersten, zweiten, dritten Jahre u. s. w. entsprechenden Summen der Wahrscheinlichkeiten beziehlich mit $\frac{v}{1+p}$, $\frac{v}{(1+p)^2}$ u. s. w. multiplicirt, so drückt die Summe der Produkte den gegenwärtigen Werth des versicherten Kapitals aus.

Nun soll die Auszahlung der versicherten Summe nach dem Tode des A oder B, erfolgen, wenn eine dieser Personen die erste oder letzte ist, welche von drei Personen A, B, C stirbt.

Die Auszahlung der versicherten Summe zu Ende des 1ten Jahres ist durch eines der sechs folgenden Ereignisse bedingt:

1) A, B, C sterben in diesem Jahre; oder

2) A und B sterben in diesem Jahre, und C lebt zu Ende desselben noch; oder

3) A und C sterben in diesem Jahre, und zwar A zuerst, und B lebt noch zu Ende desselben; oder

4) B und C sterben in diesem Jahre, und zwar B zuerst, und A lebt noch zu Ende desselben; oder

5) A stirbt in diesem Jahr, und B, C leben noch zu Ende desselben; oder

6) B stirbt in diesem Jahr, und A, C leben noch zu Ende desselben.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind beziehlich folgende
$$\frac{(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)}{abc},\ \frac{(a-a_1)(b-b_1)c_1}{abc},\ \frac{(a-a_1)(c-c_1)b_1}{2abc},$$
$$\frac{(b-b_1)(c-c_1)a_1}{2abc},\ \frac{(a-a_1)b_1c_1}{abc} \text{ und } \frac{(b-b_1)a_1c_1}{abc}.$$

Die Auszahlung der versicherten Summen zu Ende des 2ten und jeden folgenden Jahres ist dagegen durch eines der neun folgenden Ereignisse bedingt, von welchen die sechs ersten dieselben sind, welche in Beziehung auf das 1te Jahr aufgeführt worden sind. Die weiter anzunehmenden Ereignisse sind:

7) A und B sterben in diesem Jahre, und C ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

8) stirbt in diesem Jahre, B, C sind in einem frühern Jahre gestorben, und zwar C zuerst.

9) B stirbt in diesem Jahre, A, C sind in einem frühern Jahre gestorben, und zwar C zuerst

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse für das 2te Jahr sind beziehlich folgende:

$$\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)(c_1-c_2)}{abc}, \frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)c_2}{abc}, \frac{(a_1-_2)(c_1-c_2)b_2}{2abc}$$

$$\frac{(b_1-b_2)(c_1-c_2)a_2}{2abc}, \frac{(a_1-a_2)b_2c_2}{abc}, \frac{(b_1-b_2)a_2c_2}{abc},$$

$$\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right), \frac{(a_1-a_2)}{2a}\left(\frac{b-b_1}{b}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right) \text{ und}$$

$$\frac{b_1-b_2}{2a}\left(\frac{a-a_1}{a}\right)\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$$

Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für das 3te, 4te Jahr u. s. w., und wenn man die dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. entsprechenden Summen der Wahrscheinlichkeiten beziehlich mit $\frac{v}{1+p'}$, $\frac{v}{(1+p)^2}$ u. s. w. multiplicirt, so ist die Summe der Produkte der gegenwärtige Werth des versicherten Kapitals.

Die beiden letzten Fälle enthalten die Bedingung, daß die versicherte Summe nach dem Tode des A oder B ausgezahlt werden soll, wenn eine dieser Personen der Zweite oder Dritte, oder aber der Erste oder Letzte ist, welcher von A, B, C stirbt. Soll aber A oder B der Erste oder Zweite seyn, welcher von A, B, C mit Tode abgeht, so ist begreiflicherweise die Auszahlung der versicherten Summe durch die Auflösung der Verbindung der Personen A, B, ohne Rücksicht auf C, bedingt. Dieser Fall ist im Obigen vorgekommen.

Für Verbindungen von drei Personen lassen sich die Bedingungen des Ueberlebens noch weiter steigern. Man kann z. B. annehmen, daß die versicherte Summe nach dem Tode des A ausgezahlt werden soll, wenn derselbe der Erste oder Zweite ist, welcher von A, B, C stirbt, und wenn im letztern Falle C früher als B mit Tode abgeht.

Die Auszahlungen der versicherten Summe zu Ende des 1ten Jahres ist durch eines der vier folgenden Ereignisse bedingt:

1) A, B, C sterben in diesem Jahre, und zwar A zuerst, oder erst C, dann A und zuletzt B; oder

2) A und B sterben in diesem Jahre, und zwar A zuerst, und C lebt noch zu Ende desselben; oder

3) A und C sterben in diesem Jahre, und B lebt noch zu Ende desselben; oder

4) A stirbt in diesem Jahre, und B, C leben noch zu Ende desselben.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind beziehlich folgende:

$$\frac{(a-a_1)(b-b_1)(c-c_1)}{2abc}, \frac{(a-a_1)(b-b_1)c_1}{2abc}, \frac{(a-a_1(c-c_1)b_1}{abc} \text{ und } \frac{(a-a_1)\,b_1\,c_1}{abc}$$

Die Auszahlung der versicherten Summe zu Ende des 2ten und jeden folgenden Jahres ist dagegen durch eines der sechs folgenden Ereignisse bedingt:

1) Durch eines der bereits angeführten vier Ereignisse;

5) A und B sterben in diesem Jahre, und zwar A zuletzt, und C ist in einem frühern Jahre gestorben; oder

6) A stirbt in diesem Jahre, B lebt noch zu Ende desselben und C ist in einem frühern Jahre gestorben.

Die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse sind für das 2te Jahr beziehlich folgende:

$$\frac{(a_1-a_2)\,(b_1-b_2)\,(c_1-c_2)}{2abc}, \frac{(a_1-a_2)\,(b_1-b_2)\,c_2}{2abc},$$

$$\frac{(a_1-a_2)\,(c_1-c_2)\,b_2}{abc}, \frac{(a_1-a_2)\,b_2\,c_2}{abc}, \frac{(a_1-a_2)\,(b_1-b_2)}{2ab} \times \left(\frac{c-c_1}{c}\right) \text{ und } \frac{(a_1-a_2)\,b_2}{ab}\left(\frac{c-c_1}{c}\right)$$

Hieraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für das 2te, 3te Jahr u. s. w, und wenn man die dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. entsprechenden Summen der Wahrscheinlichkeiten beziehlich mit $\frac{v}{1+p}$, $\frac{v}{(1+p)^2}$ u. s. w. multiplicirt, so ist die Summe der Produkte der gegenwärtige Werth des versicherten Kapitals.

VII.

Assecuranzwesen.

Gegenseitige Assecuranz.

212. Personen, welche durch gleiche Ursachen einem Verlust an sachlichen Gütern von einer gewissen Gattung ausgesetzt sind, können sich dazu vereinigen, einen solchen Verlust gemeinschaftlich zu tragen, und zu diesem Zweck entweder

1) beim eintretenden Verlust zur Entschädigung der Betheiligten nach übereingekommener Weise eine dem Verlust entsprechende Summe Geldes zusammenlegen, oder aber

2) im Voraus eine gemeinschaftliche Kasse bilden, aus welcher Derjenige, welcher einen Verlust erleidet, entschädigt werden soll.

Hierdurch geschieht es nun, daß der Verlust nicht auf Einen allein fällt, sondern sich über eine größere Anzahl von Personen vertheilt, wobei begreiflicherweise, unter übrigens gleichen Umständen, Jeder um so weniger verlieren wird, je größer die Anzahl der Personen ist, die sich zu diesem Zwecke vereinigen und also gegenseitig versichern.

213. Nehmen wir vorerst den (nicht wahrscheinlichen) Fall an, daß alle Mitglieder eines Versicherungsvereins einem in Gelde ausgedrückten Verlust von gleicher Größe ausgesetzt sind. Tritt nun bei einem Mitgliede ein totaler Verlust ein, d. h. wird der versicherte Gegenstand gänzlich vernichtet, so ist der Verlust über sämmtliche Mitglieder zu gleichen Theilen zu vertheilen.

Sind aber die versicherten Summen von verschiedener Größe,

so hat Jeder nach Verhältniß des Werths seines versicherten Gegenstandes zur Entschädigung des Betheiligten beizutragen. Z. B. wenn sich ein Verlust, welchen ein Mitglied des Vereins betroffen hat, in Uebereinstimmung mit der versicherten Summe, auf 5000 fl. beläuft, und wenn von der Gesammtzahl 800 der Mitglieder

300 Mitglieder A für 2000 fl.
400 „ B „ 3000 „
100 „ C „ 5000 „

versichert sind, so ist die Summe der versicherten Werthe $=$ $300 \times 2000 + 400 \times 3000 + 100 \times 5000 = 2300000$ fl. und der von jedem Mitgliede zu tragende Verlust ist von jedem Hundert der versicherten Summe $=$

$$\frac{100 \times 5000}{2300000} = \frac{5}{23} \text{ fl.}$$

Mithin hat jedes der

300 Mitgl. A beizutragen $\frac{2000 \times \frac{5}{23}}{100} = \frac{100}{23}$ fl.

400 „ B „ $\frac{3000 \times \frac{5}{23}}{100} = \frac{150}{23}$ fl.

100 „ C „ $\frac{5000 \times \frac{5}{23}}{100} = \frac{250}{23}$ fl.

Weil Derjenige, welchen der Verlust getroffen hat, zur Klasse C gehört, so hat er ebenfalls $\frac{250}{23}$ fl. an dem zu vertheilenden Verlust zu tragen.

Ist der Verlust kein totaler, sondern ein partieller, d. h. ist der versicherte Gegenstand nicht ganz, sondern nur theilweise vernichtet oder aber beschädigt worden, und wird, in Beziehung auf obiges Beilpiel, der Schaden zu 1000 fl. taxirt, so beträgt der Verlust $\frac{1}{23}$ Procent, und es hat

jedes der 300 Mitglieder A beizutragen $\frac{2000 \times \frac{1}{23}}{100} = \frac{20}{23}$ fl.

jedes der 400 Mitglieder **B** beizutragen $\frac{3000 \times \frac{1}{23}}{100} = \frac{30}{23}$ fl.

„ „ 100 „ **C** „ $\frac{5000 \times \frac{1}{23}}{100} = \frac{50}{23}$ fl.

Derjenige, welchen der Schaden getroffen hat, muß ebenfalls entweder $\frac{20}{23}$ fl., oder $\frac{30}{23}$ fl. oder $\frac{50}{23}$ fl. daran tragen, je nachdem er zur Klasse **A**, oder zur Klasse **B** oder zur Klasse **C** gehört.

214. Sollen die zur Entschädigung der Betheiligten erforderlichen Summen nicht, wie auf obige Weise, erst beim eintretenden Verlust von den Mitgliedern des Vereins zusammengelegt werden, sondern soll im Voraus eine Kasse gebildet werden, aus welcher die Entschädigungen zu bestreiten sind, so muß man mit der Größe der Gefahr, welcher der versicherte Gegenstand ausgesetzt ist, bekannt seyn.

Weiß man z. B., in Beziehung auf die Versicherung gegen Seegefahr, daß während einer langen Reihe von Jahren, bei jeder unter denselben Umständen stattgefundenen Fahrt die Zahl der abgegangenen Schiffe sich zur Zahl der verunglückten Schiffe im Durchschnitt wie 100 zu 1 verhalten hat, so ist es wahrscheinlich, daß auch fernerhin unter denselben Umständen (z. B. eine und dieselbe Reise, eine und dieselbe Jahreszeit u. s. w.) dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der abgegangenen und verunglückten Schiffe stattfinden werde. Wenn wir nun annehmen, daß 100 Personen Gegenstände von gleichem Werthe, z. B. im Werthe von 1000 fl., auf 100 Schiffen gleichmäßig vertheilt, abzusenden im Begriff seyen, und daß sie sich vereinigen, den Verlust, welchen nach obigem Verhältniß eine derselben erleiden kann, gemeinschaftlich zu tragen, so hätten sie 1000 fl. zusammenzulegen, weil von den abgehenden 100 Schiffen wahrscheinlicherweise 1 Schiff verunglücken, oder von 100000 fl. 1000 fl., oder von 100 fl. 1 fl. verloren gehen wird. Die Einlage zu dieser gegenseitigen Versicherung beträgt also 1 Procent, und wenn, überhaupt, die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schiff verunglücken werde, durch $\frac{1}{n}$ und der versichert Werth

durch w bezeichnet wird, so besteht, dem Grundsatz der mathematischen Hoffnung gemäß (§. 108) der Beitrag des Versicherten aus dem Produkt dieser beiden Größen, und ist also $= \frac{w}{n}$. Außerdem müssen aber auch die Beiträge, es sey nun, daß sie auf die eine oder andere Art (§. 212, 1 und 2) herbeigeschafft werden, die Summe der Entschädigungsbeträge um den Belauf der Verwaltungskosten übersteigen.

Der von einer angenommenen Einheit des Versicherungswerths (gewöhnlich 100 oder 1000) zum Voraus zu zahlende Beitrag ist der Versicherungspreis oder die Prämie.

§. 215. Im Vorhergehenden wurde angenommen, daß der Grad der Gefahr für alle versicherten Gegenstände einer und derselbe sey; wenn dies aber nicht der Fall ist, so richtet sich die Entschädigung nicht allein nach der Größe des versicherten Werths, sondern auch nach der Größe der Gefahr. Hiernach sind nun wieder die beiden im §. 212 angenommenen Fälle zu unterscheiden. Wird der Beitrag im Voraus festgesetzt und ausbedungen (Nr. 2) und werden die Wahrscheinlichkeiten des Untergangs oder der Beschädigung der versicherten Gegenstände durch $\frac{g}{n}$, $\frac{g'}{n}$, $\frac{g''}{n}$ ꝛc. bezeichnet, so ist der Beitrag vom Werth w des versicherten Gegenstandes entweder $\frac{gw}{n}$, oder $\frac{g'w}{n}$, oder $\frac{g''w}{n}$ ꝛc. Wenn aber erst nach eingetretenem Verlust die zur Entschädigung der Betheiligten erforderlichen Summe zusammengelegt wird (Nr. 1), so kann bei der Vertheilung die Größe der Gefahr auf folgende Arten berücksichtigt werden.

Man kann

1) die Versicherten nach der Größe der Gefahr der versicherten Gegenstände in Klassen eintheilen, so daß jede Klasse eine für sich bestehende, und nur unter einer und derselben Verwaltung stehende Versicherungsgesellschaft bildet. Man kann aber auch

2) den Verlust im zusammengesetzten Verhältniß der versicherten Summe und der Größe der Gefahr zur Vertheilung bringen.

Wenn z. B. von der Gesammtzahl 800 der Mitglieder

300 Mitglieder A für 2000 fl.
400 „ B „ 3000 „
100 „ C „ 5000 „

versichert, und wenn die Größen der Gefahr der den Mitgliedern

A zugehörigen Gegenstände zu $\frac{1}{1000}$
B „ „ „ $\frac{2}{1000}$
C „ „ „ $\frac{3}{1000}$

angesetzt sind, so sind bei der Vertheilung des Verlusts die versicherten Werthe

2000 fl. auf $1 \times 2000 = 2000$ fl.
3000 „ „ $2 \times 3000 = 6000$ „
5000 „ „ $3 \times 5000 = 15000$ „

anzuschlagen, und die Summe der beim eintretenden Verlust in Anschlag zu bringenden Werthe ist

$300 \times 2000 + 400 \times 6000 + 100 \times 15000 = 4500000.$

Wird der eingetretene Verlust auf 4500 fl. taxirt, so beträgt derselbe $\frac{100 \times 4500}{4500000} = \frac{1}{10}$ Procent; mithin hat jedes der

300 Mitgl. A beizutragen $\frac{2000 \times \frac{1}{10}}{100} = 2$ fl.

400 „ B „ $\frac{6000 \times \frac{1}{10}}{100} = 6$ „

100 „ C „ $\frac{15000 \times \frac{1}{10}}{100} = 15$

Werden, wie in Nr. 2 (§. 212) die Beiträge im Voraus entrichtet, und werden die Prämien in Uebereinstimmung mit den im obigen Beispiel angenommenen Wahrscheinlichkeitsverhältnissen angesetzt, so hat jedes der Mitglieder

A zu zahlen $\frac{1 \times 2000}{1000} = 2$ fl.
B „ „ $\frac{2 \times 3000}{1000} = 6$ „
C „ „ $\frac{3 \times 5000}{1000} = 15$ „

Nehmen wir ferner an, daß der taxirte Verlust gerade so viel betrage, als derselbe nach den angenommenen Wahrscheinlichkeitsverhältnissen betragen kann, nämlich

1 pro Mille	von	600000,	oder	600 fl.
2 „ „	„	1200000	„	2400 „
3 „ „	„	500000	„	1500 „
		zusammen		4500 fl.

In diesem Falle gehen die Prämien gegen den Verlust auf; beträgt aber der Verlust weniger, so wird der an Prämiengeldern erübrigte Betrag aufgespart und zur Deckung solcher Verluste reservirt, welche mehr betragen als sie nach dem angenommenen Wahrscheinlichkeitsverhältnisse betragen sollten.

Assecuranz durch Unternehmer.

216. Das Versicherungsgeschäft kann auch von einer Actiengesellschaft als Erwerbsmittel betrieben werden. In diesem Falle müssen die Beiträge zur Versicherung, die Prämien, im Voraus festgesetzt und entrichtet werden, und es werden letztere mit Berücksichtigung der Größe der Gefahr so bestimmt, daß nach Bestreitung des Schadenersatzes ein angemessener Gewinn übrig bleibt. Daher kommt die Versicherung durch Unternehmer höher als bei der gegenseitigen Versicherung zu stehen. Es giebt indessen Gegenstände, für welche die gegenseitige Versicherung, besondere Fälle abgerechnet, nicht wohl stattfinden kann; dahin gehören z. B. Mobilien in Beziehung auf die Versicherung gegen Brandschaden, weil sie nach ihrer Menge und Güte häufigen Veränderungen unterworfen sind, weil gerettete Sachen dieser Art und andere bewegliche Gegenstände in betrügerischer Absicht auf die Seite geschafft werden können, und endlich, weil die Ausmittlung des Schadens hier weit schwieriger ist. Daher werden auch die in Rede stehenden Gegenstände mehrentheils durch Unternehmer versichert, während die Versicherung von Gebäuden gegen Brandschaden in der Regel eine gegenseitige ist. So kann ferner auch die Versicherung gegen die Gefahren der See nicht wohl gegenseitig seyn, weil sie immer nur für einzelne Seereisen begehrt wird. Es bestehen indessen in England seit langer Zeit unter dem Namen „Klubs" auch gegenseitige Seeversicherungsvereine, die aber in Abnahme kommen. Als solche errichtet wurden, geschah es, weil die damaligen Versicherer Prämien verlangten, die mit der übernommenen Gefahr außer Verhältniß standen, und weil man

sich nicht mit Sicherheit auf den Schadenersatz von Seiten der einzelnen Versicherer (Unternehmer) verlassen konnte. Dergleichen Klubs sind aber denselben Ausstellungen unterworfen, die gegen einzelne Versicherer gemacht werden können, denn die Mitglieder sind nicht alle zusammen, sondern Jeder blos einzeln gegen Diejenigen unter ihnen verbindlich, welche einen Verlust erleiden, und es vergeht wenigstens ein Jahr, bevor die Zahlungen von allen Mitgliedern, die einen Verlust zu ersetzen haben, erhalten werden können.*) — Uebrigens giebt es auch heut zu Tage noch einzelne Personen, welche Versicherungen gegen Seegefahr auf eigene Rechnung übernehmen; in England werden selbst die meisten Seeversicherungen durch Privatversicherer geschlossen.

Wahrscheinlichkeit aus Beobachtungen.

217. Wenn die Wahrscheinlichkeit aus einer gegebenen Anzahl Gründen für und wider das fragliche Ergebniß gezogen wird (wie bei der Lotterie-Versicherung §. 103 und bei der Berechnung der Spielwerthe im §. 107, Nr. 1 und 2), so ist sie eine Wahrscheinlichkeit aus Gründen (a priori); wird sie aber (wie bei der Berechnung der Leibrente und Lebensversicherung) auf Erfahrungen gebaut, die auf unbekannten Gründen beruhen, so ist sie eine Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung (a posteriori). Mit letzterer Art von Wahrscheinlichkeit haben wir es beim Assecuranzwesen zu thun, als worunter man, im engern Sinne, die Versicherungen gegen die Gefahren der Elemente und die landwirthschaftlichen Versicherungen begreift. Hier muß die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Ereignisse, die den Verlust oder die Beschädigung des versicherten Gegenstandes verursachen können, durch Beobachtung ausgemittelt werden. Soll aber das auf solche Weise bestimmte Wahrscheinlichkeitsverhältniß der Berechnung der Prämien mit Sicherheit zu Grunde gelegt werden können, so muß dasselbe aus einer sehr großen Anzahl von Beobachtungen hervorgegangen seyn; denn in diesem Falle entspricht dasselbe dem Gesetz der sogenannten großen Zahlen. So bestimmt man z. B. die Wahrscheinlichkeit des Verlusts eines Seeschiffes durch die Vergleichung der Anzahl der beobachteten Schiffbrüche mit der der Anzahl der Seereisen. Wenn aber die Anzahl der beobach-

*) Mac Culloch, Handbuch für Kaufleute. (Aus dem Englischen, Stuttgart und Tübingen, 1834).

teten Seereisen sehr groß ist, so ist das Verhältniß der Anzahl der Schiffbrüche zu der der Seereisen fast unveränderlich, wenigstens für jedes Meer, für jede Nation, für jede Jahreszeit insbesondere, und das gefundene Verhältniß kann folglich für die Größe der Wahrscheinlichkeit künftiger Schiffbrüche angenommen werden. Es versteht sich indessen von selbst, daß sich der Versicherer mit der Versicherung einer geringen Anzahl von Schiffen nicht befassen darf, denn eine kleine Anzahl von Verträgen dieser Art wären lediglich Wetten, die ihm großen Verlust bringen könnten; bei einer hinlänglich großen Anzahl von Versicherungen hingegen, wird sich das auf Erfahrung beruhende Verhältniß der verunglückten und versicherten Schiffe wieder herausstellen; der Schadenersatz ist durch die Summen der natürlichen Prämien gedeckt, und die Differenz der natürlichen und wirklichen Prämien bleibt als Gewinn übrig. In Uebereinstimmung hiemit haben die Versicherer von Seeschiffen den Grundsatz angenommen, *für nicht zu große Summen auf viele Schiffe gleichzeitig* Versicherungen zu schließen.

Das Gesetz der großen Zahlen findet überhaupt in den Erscheinungen statt, die wir, weil wir ihre Ursachen nicht kennen, dem bloßen Zufalle zuschreiben. Als weiteres Beispiel des Gesetzes der großen Zahlen kann die mittlere Dauer des menschlichen Lebens (§. 117) angeführt werden, denn ungeachtet der großen Verschiedenheit des Alters, in welchem die einzelnen Menschen sterben, so ist doch die mittlere Lebensdauer für eine hinreichend große Anzahl von Menschen in den einzelnen Ländern beinahe constant.

Selbst auf Erscheinungen der moralischen Welt, also auf Erscheinungen, welche von dem Willen des Menschen, seinen Interessen, seinen Einsichten, und seinen Leidenschaften abhängen, ist das Gesetz der großen Zahlen anwendbar. So hat sich z. B., nach Poisson*), das Verhältniß der Anzahl der jährlich Verurtheilten zu derjenigen der Angeklagten unter derselben Gesetzgebung und für ganz Frankreich von einem Jahre zum andern wenig geändert, so daß man ungefär nur 7000 Fälle

*) Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, Vorrede.

als die Anzahl der jährlich von den Geschworenengerichten ausgesprochenen Urtheile zu betrachten braucht, wenn dieses Verhältniß als ein constantes zum Vorschein kommen soll; während bei andern Untersuchungen, z. B. bei der über die oben angeführte mittlere Lebensdauer, eine solche Anzahl von Fällen bei weitem noch nicht hinreichend wäre, um ein constantes Verhältniß zu erhalten.

Wenn man nun aus einer hinlänglichen Anzahl von Beobachtungen weiß, daß in $m+n$ Fällen irgend ein Ereigniß m mal stattgefunden hat, und n mal nicht stattgefunden hat, so wird gewöhnlich die Wahrscheinlichkeit, daß unter gleichen Umständen dasselbe Ereigniß auch fernerhin stattfinden werde $= \frac{m}{m+n}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{n}{m+n}$ gesetzt.

Für manche unserer Leser dürfe die Untersuchung, in wieweit sich die Annahme obiger Wahrscheinlichkeitsverhältnisse rechtfertigen lasse, von Interesse seyn.

Nehmen wir vorerst an, daß in einer Urne 4 Kugeln befindlich seyen, daß man 3 mal nach einander eine weiße und hierauf eine schwarze Kugel gezogen habe, die jedesmal wieder zu den übrigen gethan wurde. Es können also entweder

1) 3 weiße Kugeln mit 1 schwarzen, oder

2) 2 weiße und 2 schwarze, oder

3) 3 schwarze mit 1 weißen in der Urne liegen. Es fragt sich, welche Wahrscheinlichkeit jede dieser Hypothesen (d. h. Voraussetzungen gewisser Beweggründe, womit man das Entstehen einer Erscheinung zu erklären sucht) für sich hat.

Wäre das erstere das wahre Verhältniß der weißen zu den schwarzen Kugeln, so wäre $^3/_4$ die Wahrscheinlichkeit für den Auszug einer weißen Kugel, und (§. 106)

$$^3/_4 \times {}^3/_4 \times {}^3/_4 \times {}^3/_4 = {}^{27}/_{256}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß man dreimal nach einander eine weiße und zum vierten male eine schwarze Kugel erhielte.

Wäre hingegen das zweite das wirkliche Verhältniß, so wäre

$$^2/_4 \times {}^2/_4 \times {}^2/_4 \times {}^2/_4 = {}^{16}/_{256}$$

die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall, und wäre das dritte Verhältniß das richtige, so wäre

$$^3/_4 \times {}^3/_4 \times {}^3/_4 \times {}^3/_4 = {}^{3}/_{256}$$

die Wahrscheinlichkeit für denselben Fall.

Die letzte Hypothese giebt die kleinste Wahrscheinlichkeit für das in Rede stehende Ereigniß, und ist auch an und für sich betrachtet weniger wahrscheinlich als die beiden andern; denn wenn die Urne nur eine einzige weiße Kugel enthielte, so müßte dieselbe 3 mal nach einander zum Vor-

schein gekommen seyn; dieser Zufall wäre aber kleiner, wenn 2 weiße und 2 schwarze Kugeln, und noch kleiner, wenn 3 weiße Kugeln und 1 schwarze in der Urne befindlich wären.

Ist die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses nach der

$$\text{1ten Hypothese} = \frac{27}{256}$$

$$\text{2ten} \quad " \quad = \frac{16}{256}$$

$$\text{3ten} \quad " \quad = \frac{3}{256}$$

so ist die Wahrscheinlichkeit (§. 106) der

$$\text{1ten Hypothese} = \frac{\frac{27}{256}}{\frac{27}{256}+\frac{16}{256}+\frac{3}{256}} = \frac{27}{27+16+3} = \frac{27}{46}$$

$$\text{2ten} \quad " \quad = \frac{\frac{16}{256}}{\frac{27}{256}+\frac{16}{256}+\frac{3}{256}} = \frac{16}{27+16+3} = \frac{16}{46}$$

$$\text{3ten} \quad " \quad = \frac{\frac{3}{256}}{\frac{27}{256}+\frac{16}{256}+\frac{3}{256}} = \frac{3}{27+16+3} = \frac{3}{46}$$

Man erhält demnach überhaupt die Wahrscheinlichkeit für jede Hypothese, wenn man die für jede Hypothese berechnete Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses durch die Summe sämmtlicher, für jede Hypothese berechneten Wahrscheinlichkeiten desselben Ereignisses dividirt.

Obige Wahrscheinlichkeiten werden die mittleren genannt, zur Unterscheidung von denjenigen Wahrscheinlichkeiten, die man a priori erhält.

Hat man die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Hypothese bestimmt, so läßt sich vermittelst derselben die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für jeden nachfolgenden Auszug bestimmen, so z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß beim 5ten Auszuge wieder eine weiße Kugel herauskommen werde. Die drei aufgestellten Hypothesen können als drei verschiedene Urnen betrachtet werden, aus deren einer das erwartete Ereigniß nothwendigerweise hervorgehen muß. Nach §. 106 erhält man diese Wahrscheinlichkeit, wenn man die Wahrscheinlichkeit, die das Ereigniß in jeder Hypothese hat, mit der Wahrscheinlichkeit der Hypothese multiplicirt und die entsprechenden Produkte addirt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher =

$$^{27}/_{46} \times {}^{3}/_{2} + {}^{16}/_{46} \times {}^{2}/_{4} + {}^{3}/_{46} \times {}^{1}/_{4} = {}^{116}/_{184}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß beim 5ten Auszuge eine schwarze Kugel herauskommen werde ist =

$$^{27}/_{46} \times {}^{1}/_{4} + {}^{16}/_{46} \times {}^{2}/_{4} + {}^{3}/_{46} \times {}^{3}/_{4} = {}^{68}/_{184}.$$

Es sey ferner die Anzahl der Kugeln = 8, 5 mal nach einander habe man eine weiße Kugel und 3 mal nach einander eine schwarze Kugel gezogen, die jedesmal wieder zu den übrigen gethan wurde. Es können also entweder

7 weiße Kugeln und 1 schwarze Kugel
oder 6 „ „ „ 2 „ Kugeln
„ 5 „ „ „ 3 „ „
„ 4 „ „ „ 4 „ „
„ 3 „ „ „ 5 „ „
„ 2 „ „ „ 6 „ „
„ 1 Kugel „ „ 7 „ „

in der Urne liegen.

Ist also überhaupt die Anzahl der Kugeln = a, und ist m mal nach einander eine weiße Kugel und n mal nach einander eine schwarze Kugel gezogen worden, so können entweder

$a-1$ weiße Kugeln und 1 schwarze Kugel
oder $a-2$ „ „ „ 2 „ „
„ $a-3$ „ „ „ 3 „ „
„ $a-4$ „ „ „ 4 „ „
⋮ ⋮
„ 1 „ Kugel „ $a-1$ „ „

in der Urne liegen.

Wäre ersteres das wahre Verhältniß der weißen zu den schwarzen Kugeln, so hätte man die Wahrscheinlichkeit $\frac{a-1}{a}$ für den Auszug einer weißen Kugel, und die Wahrscheinlichkeit, daß man m mal nach einander eine weiße, und n mal nach einander eine schwarze Kugel erhielte wäre (§. 106)

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Wäre das zweite das wirkliche Verhältniß, so wäre für dasselbe Ereigniß die Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{a-2}{a}\right)^m \left(\frac{2}{a}\right)^n$$

u. s. w. für alle übrigen Verhältnisse.

In Beziehung auf sämmtliche Hypothesen erhält man also für das in Rede stehende Ereigniß die Wahrscheinlichkeiten:

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n, \left(\frac{a-2}{a}\right)^m \left(\frac{2}{a}\right)^n, \left(\frac{a-3}{a}\right)^n \left(\frac{3}{a}\right)^n \ldots \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{a-1}{a}\right)^n$$

Die Wahrscheinlichkeit der ersten Hypothese ist

$$\frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n}{\left(\frac{a-1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{a-2}{a}\right)^m \left(\frac{2}{a}\right)^n + \ldots \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{a-1}{a}\right)^n};$$

die der zweiten ist

$$\frac{\left(\frac{a-2}{a}\right)^m \left(\frac{2}{a}\right)^n}{\left(\frac{a-1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{a-2}{a}\right)^m \left(\frac{2}{a}\right)^n + \ldots \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{a-1}{a}\right)^n}$$

u. s. w. für die übrigen Hypothesen. Setzt man s für den Nenner der obigen Brüche, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem weitern Auszuge eine weiße Kugel zum Vorschein kommt, =

$$\frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)^m\left(\frac{1}{a}\right)^n}{s}\times\frac{a-1}{a}+\frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)^m\left(\frac{2}{a}\right)^n}{s}\times\frac{a-2}{a}+\ldots\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^m\left(\frac{a-1}{a}\right)^n}{s}\times\frac{1}{a}$$

Um aber für obige Grundsätze ganz allgemeine Formeln aufzustellen, muß man bedenken, daß für alle Erscheinungen, die wir dem bloßen Zufalle zuschreiben, weil wir ihre Ursachen nicht kennen, die Gesammtzahl der Fälle als unendlich groß betrachtet werden muß und daß folglich alle einfachen Wahrscheinlichkeiten oder alle Verhältnisse von 0 bis 1 als möglich erachtet werden müssen. Es muß demnach für eine unendlich große Anzahl von Hypothesen die Wahrscheinlichkeit des in Frage stehenden Ereignisses bestimmt werden.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, daß sich von zwei entgegengesetzten Ereignissen das eine m mal und das andere n mal zugetragen habe. Denkt man sich die Einheit in sehr kleine Theile getheilt, die wir durch α bezeichnen wollen, so können die einfachen Wahrscheinlichkeiten des ersten Ereignisses durch irgend ein Glied der Reihe

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \&\alpha\ \text{ꝛc.}$$

bezeichnet werden. Die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten des zusammengesetzten Ereignisses bilden daher die Reihe

$$\alpha^m(1-\alpha)^n,\ (2\alpha)^m(1-2\alpha)^n,\ (3\alpha)^m(1-3\alpha)^n\ldots.(1-\alpha)^m\alpha^n$$

von welchen jedes beliebige Glied durch $x^m(1-x)^n$ dargestellt werden kann.

Die Summe

$$\alpha^m(1-\alpha)^n+(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n+(3\alpha)^m(1-3\alpha)^n+\ldots(1-\alpha)^m\alpha^n=s$$

ist daher der Nenner der besondern Wahrscheinlichkeiten einer jeden Hypothese.

Zur Bestimmung des Grenzwerths dieser Reihe multiplicire man s mit α; das allgemeine Glied derselben ist sonach $\alpha\,x^m(1-x)^n$, und die Summe aller Glieder, die diesem allgemeinen Gliede vorhergehen, werde durch

$$A\,x^{m+1}(1-x)^n+B\,x^{m+2}(1-x)^{n-1}+G\,x^{m+3}(1-x)^{n-2}+\ldots$$

worin A, B, C ꝛc. unbestimmte Coefficienten sind, bezeichnet. Wenn man in letzterer Summe x um die Größe α zunehmen läßt, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$A(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n+B(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1}+C(x+\alpha)^{n+3}(1-x-\alpha)^{n-2}+\text{ u. s. w.}$$

und wenn man hiervon die vorige Summe abzieht, so bleibt der Zuwachs übrig, welchen sie erhalten hat. Dieser Zuwachs ist aber $=\alpha\,x^m(1-x)^n$; denn in der Reihe für welche

$$A\,x^{m+1}(1-x)^n+B\,x^{m+2}(1-x)^{n-1}+\text{ꝛc.}$$

das summatorische Glied seyn soll, wird aus jedem Gliede das zunächstfolgende erhalten, wenn man $x+\alpha$ für x setzt; mithin wird durch diese Substitution das summatorische Glied für a Glieder in das für $a+1$ Glieder verwandelt; ist daher die Summe der a Glieder $=s$, und diejenige der $a+1$ Glieder $=s^1$, so ist s^1-s dem $(a+1)$ten Gliede gleich, also $=\alpha\,x^m(1-x)^n$.

Man hat daher die Gleichung

$$A\left\{(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n-x^{m+1}(1-x)^n\right\}$$
$$+B\left\{(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1}-x^{m+2}(1-x)^{n-1}\right\}$$

$$+ C \left\{(x+\alpha)^{m+3}(1-x-\alpha)^{n-2} - x^{m+3}(1-x)^{n-2}\right\}$$
$$+ \text{ꝛc.} = \alpha\, x^m (1-x)^n. \quad - - - - - - - \quad \text{(I.)}$$

Um diese Gleichung bequem entwickeln zu können, setze man $1-x=z$; weil ferner die in zweiter Zeile stehende Reihe sich aus der in erster Zeile stehenden ergiebt, wenn man A in B, $m+1$ in $m+2$, n in $n-1$ verwandelt, was in gleicher Weise von den übrigen Reihen gilt, so braucht man vorläufig nur die in erster Zeile stehende Reihe zu entwickeln. Hiernach ist $A(x+\alpha)^{m+1}(z-\alpha)^n$

$$= A\left\{x^{m+1} + (m+1)\alpha x^m + \text{ꝛc.}\right\}(z^n - n\alpha z^{n-1} + \text{ꝛc.})$$
$$= A x^{m+1} z^n + (m+1) A \alpha x^m z^n - n A \alpha x^{m+1} z^{n-1}$$
$$+ A' \alpha^2 + A'' \alpha^3 + \text{ꝛc.}$$

in welcher Gleichung die Glieder, welche höhere Potenzen als die erste von α enthalten, bloß angedeutet sind. Zieht man hiervon das Glied $A x^{m+1}(1-x)^n = A x^{m+1} z^n$ ab, so ist für die erste Zeile der Gleichung (I) der Rest =

$$(m+1) A \alpha x^m z^n - n A \alpha x^{m+1} z^{n-1} + A' \alpha^2 + \text{ꝛc.}$$

Hieraus geht hervor, daß alle Glieder der Gleichung (I) durch α theilbar sind; die ganze Gleichung reducirt sich daher auf die folgende:

$$A\left\{(m+1) x^m z^n - n x^{m+1} z^{n-1}\right\} + A'\alpha + \text{ꝛc.}$$
$$+ B\left\{(m+2) x^{m+1} z^{n-1} - (n-1) x^{m+2} z^{n-2}\right\} + B'\alpha + \text{ꝛc.}$$
$$+ C\left\{(m+3) x^{m+2} z^{n-2} - (n-2) x^{m+3} z^{n-3}\right\} + C'\alpha + \text{ꝛc.}$$
$$+ \text{ꝛc.} = x^m z^n$$

Weil diese Gleichung für so kleine Werthe als man nur immer will, besteht, so ist die Anzahl der Glieder $\frac{1}{\alpha} - 1$ unendlich groß, wenn man $\alpha = 0$ setzt, und weil die Gleichung für jeden Werth von x bestehen muß, so kann man sie in Beziehung auf x und z ordnen, wonach sie folgende Form erhält:

$$\left\{A(m+1) - 1\right\} x^m z^n - \left\{n A - (m+2) B\right\} x^{m+1} z^{n-1}$$
$$- \left\{(n-1) B - (m+3) C\right\} x^{m+2} z^{n-2} - \text{ꝛc.} = 0$$

Setzt man nun die Coefficienten jedes einzelnen Gliedes = 0 so erhält man

$$A(m+1) - 1 = 0; \quad \text{daher } A = \frac{1}{m+1}$$
$$n A - (m+2) B = 0; \quad \text{„ } B = \frac{n}{(m+1)(m+2)}$$
$$(n-1) B - (m+3) C = 0; \quad \text{„ } C = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$
$$\text{ꝛc. ꝛc.}$$

Der Grenzwerth der Reihe

$$\alpha\left\{\alpha^m (1-\alpha)^n + (2\alpha)^m (1-2\alpha)^n \ldots (x-\alpha)^m (1-x+\alpha)^n\right\}$$

ist daher

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}+\frac{n\,x^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)}+\frac{n(n-1)x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1\,.\,x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\,.\,.\,(m+n+1)};$$

Denn der Werth dieses Ausdrucks entsteht mit der Reihe, indem derselbe ebenso wie das allgemeine Glied $x^m(1-x)^n$ verschwindet, wenn man $x=0$ setzt. Das letzte Glied der Reihe ist $(1-\alpha)^m\alpha^n$, für welches Glied $x=1-\alpha$ ist; je kleiner aber α ist, desto mehr nähert sich der Werth von x der Einheit; man kann also letztere für den letzten Werth von x annehmen. Der Grenzwerth der Reihe αs ist in diesem Falle $=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots m+n-1}$$

und es werde dafür, der Kürze wegen, $\int^{(m,n)}$ gesetzt.

Bezeichnet man durch dx die Theile, in welche man annimmt, daß die Einheit getheilt sey, so ergiebt sich kürzer vermittelst theilweiser Integration,

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots m+n-1}$$

Obige Herleitung, wie sie Condorcet, und, nach ihm, Lacroix in seinem Traité élémentaire du calcul des probabilités (3e éd. Paris 1833) gegeben hat, dürfte indessen für die Mehrzahl unserer Leser geeigneter als letzteres Verfahren seyn.

Gehen wir nun zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse über. Nach dem Vorhergehenden wird die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese oder irgend eines Verhältnisses x ausgedrückt durch

$$\frac{x^m(1-x)^n}{s}=\frac{\alpha\,x^m(1-x)^n}{\alpha s}$$

Multiplicirt man letztern Ausdruck durch x, so ist die Wahrscheinlichkeit für ein weiteres Ereigniß $=$

$$\frac{\alpha\,x^{m+1}(1-x)^n}{\alpha s}$$

woraus sich der jeder einzelnen Hypothese entsprechende Werth ergiebt, wenn man nach einander α, 2α, 3α, 4α ꝛc. für x substituirt; der Grenzwerth der Summe dieser Reihe ist folglich

$$\frac{\int^{(m+1,n)}}{\int^{(m,n)}}$$

und der Werth des Zählers ergiebt sich aus dem Werthe von $\int^{(m,n)}$, wenn man darin $m+1$ für m setzt.

Durch die Substitution dieser Werthe erhält man für das fragliche Wahrscheinlichkeitsverhältniß

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots1}{(m+2)(m+3)\ldots m+n+2}\times\frac{(m+1)(m+2)\ldots m+n+1}{n(n-1(n-2)\ldots1}=\frac{m+1}{m+n+2}$$

Für das entgegengesetzte Ereigniß ist die besondere, der Hypothese x entsprechende Wahrscheinlichkeit $=1-x$; daher

$$\frac{\alpha\,x^m(1-x)^n}{\alpha s}(1-x)=\frac{\alpha\,x^m(1-x)^{n+1}}{\alpha s}\text{ und}$$

$$\frac{\int(m,n+1)}{\int(m,n)} = \frac{n+1}{m+n+2}$$

Wenn also in $m+n$ Fällen irgend ein Ereigniß m mal stattgefunden, und also n mal nicht stattgefunden hat, so sind die Wahrscheinlichkeiten des einen und andern Ereignisses beziehlich

$$\frac{m+1}{m+n+2} \text{ und } \frac{n+1}{m+n+2}$$

und nicht wie gewöhnlich angenommen wird,

$$\frac{m}{m+n} \text{ und } \frac{n}{m+n}$$

Diese Werthe stimmen nur dann überein, wenn $m=n$, denn in diesem Falle ist jeder derselben $= \frac{1}{2}$. Die genaue Werthsbestimmung nähert sich indessen der andern immer mehr; denn wenn man die Zähler und Nenner durch $m+n$ theilt, so erhält man

$$\frac{\frac{m}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}} \text{ und } \frac{\frac{n}{m+n} + \frac{1}{m+n}}{1 + \frac{2}{m+n}}$$

welche Ausdrücke sich auf $\frac{m}{m+n}$ und $\frac{n}{m+n}$ reduciren, wenn $m+n$ unendlich groß ist.

Seeassecuranz.

218. Die Wahrscheinlichkeitsbestimmung derjenigen Zufälle, welche die Seeschifffahrt betreffen, unterliegt großen Schwierigkeiten; denn es sind hierzu nicht nur Erfahrungen über eine große Anzahl von Schiffen in Betreff der dabei vorgekommenen Unglücksfälle erforderlich, sondern es müssen auch die nähern Umstände bekannt seyn, unter welchen solche stattgefunden haben, indem hierbei der Wechsel des Jahreszeiten, die Beschaffenheit des Bau's der Schiffe, ihre Bemannung ꝛc. in Betracht kommt.

Die größern und ältern Seeassecuranzanstalten mögen allerdings im Besitze solcher Erfahrungen seyn, die ihnen bei der Bestimmung der Prämien zur Richtschnur dienen.*) Wahrscheinlich hat aber der große Gewinn, welchen in älterer Zeit der Seehandel abgeworfen hat, die vorsichtigern Handelshäuser bewogen, große Versicherungsprämien anzubieten, wodurch sie Versicherer fanden, deren Gewinn nach und nach eine größere

*) Zur Erleichterung des Versicherungsgeschäfts in England giebt es zwei, auf Subscription durch die bedeutendsten Kaufleute, Schiffseigenthümer und Versicherer unterhaltene Bücher, welche Auskunft über den Tonnengehalt, die Bauart, das Alter, die Ausbesserungen, so wie über den Zustand der meisten Schiffe geben, welche die englischen Häfen

Concurrenz verursachte, wodurch ein billigeres Verhältniß zwischen dem Versicherer und Versicherten herbeigeführt wurde.

Hauptgegenstände der Versicherung gegen Seegefahr.

219. Hauptgegenstände der Versicherung gegen Seegefahr sind das Schiff, die Fracht, die Ladung, der sogenannte imaginäre Gewinn und Bodmereigelder.

Zu dem Schiffe gehört auch, in Beziehung auf Versicherung, aller Zubehör desselben, als Segel, Taue, Anker ꝛc. Das Alter des Schiffes wird nach den meisten Gesetzen in der Weise berücksichtigt, daß der Versicherer im Falle eines Schadenersatzes berechtigt ist, einen Abzug zu machen für den Unterschied zwischen alt und neu, oder auch daß sie ihn zum Schadenersatze erst verpflichten, wenn der Verlust eine bestimmte Größe erreicht.

Verunglückt ein befrachtetes Schiff, so geht dem Schiffer oder Rheder die Fracht verloren; letztere ist daher ebenfalls ein Gegenstand der Versicherung. Die Fracht kann auch für ihren vollen Belauf, oder brutto versichert werden; d. h. die Kosten der Ausrüstung mitbegriffen; denn im Falle eines Untergangs des Schiffes verliert der Schiffer oder Rheder nicht blos die Fracht, sondern auch die Ausrüstungskosten, mithin das Bruttokapital der Fracht. Die Kosten hingegen, welche der Schiffer in dem Falle einer glücklichen Reise aus der Fracht hätte bezahlen müssen, gehören nicht hierher, weil sich das Interesse des Versicherten um den Betrag dieser Unkosten (Volkshauer, Hafengelder ꝛc) vermindert. Denn würde der Betrag dieser Unkosten mit versichert, so würde der Versicherte so viel dadurch gewinnen, wenn der Versicherer einen totalen Schaden zu vergüten hätte.

---

besuchen; und obgleich deren Inhalt in vieler Hinsicht große Lücken darbietet, so gereichen sie den Versicherern dennoch zum großen Nutzen, indem sie selten Gelegenheit haben, den hundertsten Theil der Schiffe, die sie versichern, nach ihrer einzelnen Beschaffenheit zu kennen. — In London, woselbst die meisten Seeassecuranzen durch Privatversicherer geschlossen werden, ist der Mittelpunkt dieser Geschäfte in Lloyd's Kaffeehaus. Bevollmächtigte, gewöhnlich Lloyd's Agents genannt, befinden sich in allen wichtigen Häfen der ganzen Erde und geben regelmäßige Berichte über Abgang und Ankunft von Schiffen, über Verluste und alle andern Ereignisse, welche Denjenigen, die bei Versicherung betheiligt sind oder sich betheiligen wollen, zur Richtschnur dienen können. (Mac Culloch, Art. Vers.)

Was die Versicherung der Ladung betrifft, so ist der Versicherte entweder Käufer oder Committent, d. h. er bezieht entweder Waaren, welche auf seine Gefahr laufen, oder er sendet Waaren in Verkaufscommission nach einem überseeischen Platze.

Hier kann nun, abgesehen von Gesetzen, die Frage aufgeworfen werden, zu welchem Werthe die Waare versichert werden dürfe.

Angenommen, ein Amsterdamer beziehe von New-York Waaren, für die er, in seiner Valuta, 20000 fl. zu zahlen hat. So viel beträgt das versicherte Interesse, wenn der Verkäufer der Waare dieselbe franko Schiff liefert, d. h. alle Unkosten bis an Bord des Schiffes trägt; ist aber letzteres nicht der Fall, so besteht das versicherbare Interesse aus der Summa des Einkaufswerths und vorbesagter Unkosten. Die s. Z, d. h. wenn die Waare ankommt, zu zahlende Fracht hingegen kann, in Beziehung auf Versicherung, nicht in Betracht kommen, denn wenn die Waare nicht ankommt, so fällt die Bezahlung der Fracht weg. Aus diesem Grunde ist z. B. nach den Gesetzen in Dänemark, Nordamerika, Preußen, Schweden und Spanien für den Bezieher der Waare die Fracht von der Versicherung ausgeschlossen. Der Fall ist aber auch denkbar, daß die Fracht theilweise oder zu ihrem vollen Belaufe vorausbezahlt wird. In Berücksichtigung dieses möglichen Falles darf z. B. nach dem niederländischen Assecuranzrecht die Fracht mit versichert werden; die Fracht ist aber, wenn die Waare den Bestimmungsort nicht erreicht, vom Versicherer zu vergüten, wenn sie vorausgezahlt worden ist; sie geht dagegen den Versicherer nichts an, wenn dieß nicht geschehen ist.

Werden Waaren in Verkaufscommission versandt, so besteht das versicherbare Interesse ebenfalls im Einkaufswerthe derselben, in den Verschiffungskosten und in der Fracht, wenn letztere vorausbezahlt worden ist.

Sind in einem Lande, wo der Handel nur durch Tausch betrieben wird, Waaren eingetauscht worden, so ist bei der Versicherung derselben (der sogenannten Retouren), der Werth der dafür gegebenen Waaren unter Aufschlag der Transportkosten als versicherbares Interesse anzunehmen.

Der Versicherer kann auch ein Commissionär seyn, der auf

Waaren vorgeschossen oder darauf Wechsel acceptirt hat; das Interesse des Versicherten besteht alsdann in dem Betrage der vorgeschossenen Gelder oder der darauf acceptirten Tratten.

Bei der Versicherung auf verhofften oder imaginären Gewinn wird der muthmaßliche Gewinn, welchen die Waare abwerfen kann, versichert. Verunglückt die Waare, so ist der erwartete Gewinn durch die Assecuranz realisirt. Nicht alle Gesetze gestatten diese Art von Versicherung.

Versicherung von Bodmereigeldern darf nur von Seiten des Bodmereigebers, nicht aber von Seiten des Bodmereinehmers ausgehen. Unter Bodmereigeber versteht man Denjenigen, welcher Gelder darleiht, für welche Sachen verpfändet werden, die auf seine Gefahr über See gehen (also Schiffe, Ladung ꝛc.) d. h. der Gläubiger übernimmt hier die Gefahr des Geldes so, daß alle Zufälle, die den verpfändeten Gegenstand treffen, bis er an den Bestimmungsort gelangt ist, für seine, des Gläubigers, Rechnung sind, und er verliert also allen Anspruch an die Person seines Schuldners, wenn und so weit das Schiff oder die Waare untergeht. Derjenige, welcher Gelder gegen eine solche Verpfändung des Schiffes oder der Ladung aufnimmt, ist der Bodmereinehmer. Unter Bodmerei versteht man daher den Contrakt, durch welchen

1) der Besitzer oder Erbauer eines Schiffes zu dessen Ausrüstung oder Erbauung Gelder in der Art aufnimmt, daß er zur Zurückzahlung derselben nur in dem Falle verpflichtet ist, wenn das Schiff wohlbehalten ankommt; ferner den Contrakt, durch welchen

2) der Schiffer in einem Nothhafen Gelder aufnimmt, und dagegen Schiff oder Ladung so verpfändet, daß der Darleiher die Gefahren der Reise trägt. Gegenstand der Bodmerei kann alles seyn, was der Seegefahr ausgesetzt wird, und was als Unterpfand dienen kann. Dahin gehören

1) das Schiff, ganz oder theilweise; letzteres z. B. wenn das Schiffgeräth, d. h. alle nicht unzertrennlich mit dem Rumpfe des Schiffes verbundene Werkzeuge, verbodmet werden;

2) die Fracht; denn selbst nach einigen Gesetzen wird die Fracht als ein Theil des Schiffes angesehen;

3) die Ladung, ganz oder theilweise;

4) mehrere dieser Gegenstände zugleich.

Weil der Darleiher das dargeliehene Geld nur in dem Falle zurückerhält, wenn der verpfändete Gegenstand wohlbehalten ankommt, oder nur um so viel davon zurückerhält, als der Boden des Schiffes davon mitbringt, so dürfen die Zinsen höher als in andern Fällen stipulirt werden. Wenn daher der Bodmereigeber den verpfändeten Gegenstand versichern läßt, so sollte er gehalten seyn, sich nicht mehr wie übliche Zinsen und die Assecuranzprämie von dem Entlehner bezahlen zu lassen. Der Bodmereinehmer hingegen hat keine Veranlassung den verbodmeten Gegenstand bis zum Belauf der Bodmerei versichern zu lassen. Denn kommt letzterer wohlbehalten an, so verliert er ihn bis zum betreffenden Betrage, weil er dem Bodmereigeber diesen Betrag davon zahlen muß; geht aber der verbodmete Gegenstand unter, so wird er von dieser Zahlung frei, und durch die darauf aufgenommenen Gelder ist er schon im Voraus entschädigt worden. Er hat also, in so weit der Gegenstand mit Bodmerei beschwert ist, kein versicherbares Interesse, und es kann ihm nur gestattet seyn, so viel versichern zu lassen, als der Werth des verpfändeten Gegenstands mehr als das darauf dargeliehene Kapital beträgt.

Nach den meisten Gesetzen kann der Betrag der Prämie, und nach einigen selbst die Prämie von der Prämie auf den Werth des versicherten Gegenstandes geschlagen werden.*)

Taxirte und offene Police der Seeassecuranz.

220. Die Summe, auf welche die Police, d. h. der Assecuranzvertrag lautet, kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden. Es wird nämlich entweder der versicherte Gegenstand geschätzt, d. h. der Versicherte kommt mit dem Versicherer überein,

*) Wenn die Versicherung in der Weise geschlossen werden soll, daß den Versicherten im Falle eines totalen Verlusts auch die gezahlte Prämie nicht verloren gehn, so muß die Prämie zum versicherten Werth geschlagen, und von dieser Prämie, als Versicherungsbetrag, ebenfalls eine Prämie entrichtet werden, und so fort, bis der Betrag der noch zu zahlenden Prämie so unbedeutend ist, daß er nicht weiter in Betracht kommt. Ist z. B. die versicherte Summe $= w$, und beträgt die Prämie 1 von c, so hat der Versicherer zu entrichten $\frac{w}{c}$; von dieser Prämie, als theilweisem Versicherungsbetrag muß wieder eine Prämie entrichtet werden im Betrage von $\frac{w}{c^2}$; von dieser Prämie, als Versicherungsbetrag, muß wieder eine Prämie entrichtet werden im Betrage von $\frac{w}{c^3}$, u. s. w. Die Summe der hiernach zu zahlenden Prämien ist

daß der versicherte Gegenstand zu einem gewissen Werthe angenommen werden soll, oder es wird schlechtweg die Summe benannt, für welche der Versicherer zu haften hat. Im ersten Falle nennt man die Police eine taxirte, im andern eine offene. Ist der Gegenstand der Versicherung in der Police taxirt, so ist der Versicherer in der Regel nicht berechtigt, die Beweisführung über den wahren Werth des versicherten Gegenstandes zu fordern, womit indessen nicht gesagt ist, daß der Versicherte berechtigt ist, den Werth willkührlich anzusetzen, und daß der Versicherer in jedem Falle an die Taxe in der Police gebunden sey. *) Die Taxe soll eigentlich dem Versicherten ein Mittel an die Hand geben, der Schwierigkeit der Beweisführung in Betreff des wahren Werths zu entgehen, weßhalb taxirte Policen gewöhnlich da vorkommen, wo Schiffe oder solche Gegenstände, die keinen eigentlichen Marktpreis haben, versichert werden, während bei Waaren, deren Werth sich nach einem Marktpreise bestimmen läßt, gewöhnlich die offenen Policen vorkommen. Bei letztern hingegen ist im Schadensfalle der Versicherer befugt, von dem Versicherten eine Nachweisung über den Werth des versicherten Gegenstandes zu fordern. Die Nachweisung geschieht durch solche Documente, welche gewöhnlich über den versicherten Gegenstand vorhanden sind. Bei der Versicherung auf Waaren läßt man gewöhnlich die Facturen als Beweismittel zu; doch steht dem Versicherer das Recht zu, sich die angesetzten Preise nicht gefallen zu lassen, wenn die Waare allzuhoch facturirt wäre.

Wenn die Ladung bedeutend ist, so kommt es auch vor, daß sie der Eigenthümer in einzelnen Parthien, die durch Nummern und auf sonstige Weise gehörig bezeichnet sind, versichern läßt. Die jeder Parthie entsprechende Versicherungssumme nennt man Taxe. Dieß kommt besonders in dem Falle vor, wenn der

---

$$w\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^3}+\ldots\ldots\right)=\frac{w}{c-1}$$

Ist z. B. $w=10000$ und $c=100$, so ist die Summe der Prämien $=\frac{10000}{99}=101{,}010101\ldots$, und die versicherte Summe ist $=10101{,}0101\ldots$. Geht nun der versicherte Gegenstand zu Grunde, so erhält der Versicherte $10000+101{,}010101\ldots$, also den Werth des versicherten Gegenstandes und den Betrag der gezahlten Prämien.

*) Pöhl's Assecuranzrecht §. 591.

Kaufmann Waaren erwartet, deren einzelne Theile er noch nicht kennt, wie z. B. bei Retouren (§. 219). Die Versicherung kann nun in der Weise stattfinden, daß der Versicherte unter Vorbehalt genauerer Bestimmung die Versicherungssumme beiläufig angiebt, oder aber die Versicherungssumme definitiv ansetzt, und es sich vorbehält, sie späterhin in Taxen zu theilen.

Bestimmung des vom Versicherer zu ersetzenden Seeschadens.

221. Was die Bestimmung des vom Versicherer zu ersetzenden Schadens betrifft, so kommt es sowohl bei der großen als particulären Havarie darauf an, ob der Schaden ein totaler oder partieller (§. 213) ist.

Jede zufällige Beschädigung fällt natürlicherweise demjenigen zur Last, an dessen Eigenthum sie sich ereignet. Dahin gehören also derjenige Schaden, der an dem Schiffe oder an der Ladung durch die Gewalt der Elemente, Räuber ꝛc. verursacht wird, so wie derjenige Schade, der nicht in der Beschädigung des Schiffes oder der Ladung besteht, sondern durch die Unkosten herbeigeführt wird, welche auf die Rettung des Schiffes oder der Ladung verwendet werden. Der entsprechende Verlust gehört zur particulären Havarie. Wenn dagegen zur Erhaltung des Ganzen absichtliche Beschädigungen mit dem Schiffe oder mit der Ladung vorgenommen, oder außerordentliche Unkosten bestritten werden müssen, so haben die Interessenten den Verlust oder Aufwand nach Verhältniß des Werths ihres dabei betheiligten Eigenthums zu tragen, und dieser Verlust gehört zur großen Havarie. Zum Bereiche derselben gehört z. B. der Seewurf, wenn nämlich zur Erleichterung des in Noth befindlichen, oder von einem Feinde verfolgten Schiffes, oder um dasselbe flott zu machen, Schiffsgeräthschaften, Schiffsvorräthe oder Gegenstände der Ladung über Bord geworfen werden müssen, ferner die dem Schiffe absichtlich zugefügte Beschädigung zu diesem Zwecke, z. B. durch Einhauen von Löchern ꝛc.; der Schade, der dem Schiffe und der Ladung durch Vertheidigung gegen Räuber oder Feinde zugefügt wurde ꝛc.

Die Vertheilung der großen Havarie geschieht auf folgende Weise. Angenommen, der Werth des Schiffes betrage 80000 Thl. der Gesammtbetrag der Frachtgebühren sey 2000 Thlr.; der anfängliche Werth der Waaren des Befrachters A sey 10000 Thlr., und derjenige der Waaren des B 8000 Thlr.; es betrage ferner der Verlust des A 500 Thlr., der des B 4000 Thlr. und

der Schaden am Schiff 500 Thlr.; und es ist also die Frage, wie viel jeder Interessent verlieren müsse. — Der Schiffseigenthümer und die Befrachter sind zusammen für die Summe von 100000 Thl. an Kapital und für den Verlust von 5000 Thlr. bei der Havarie betheiligt Wenn nun an 100000 Thlr. 5000 Thlr. verloren gehen, so entspricht

dem Kapital 80000 ein Verlust von 4000 Thlr.
" " 2000 " " " 100 "
" " 10000 " " " 500 "
" " 8000 " " " 400 "

Derjenige, welcher die Schadensvertheilung besorgt, hat demnach, wenn Schiff, Ladung und Fracht versichert sind, zu empfangen vom Versicherer des Schiffers für das Schiff 4000 Thl. und für die Fracht 100 Thlr.; vom Versicherer des A 500 Thlr. und vom Versicherer des B 400 Thlr. Dagegen erhält der Schiffer 500 Thlr., der A 500 Thlr. und der B 4000 Thlr.

Die gegebenen und berechneten Größen lassen sich folgenderweise zusammenstellen:

Interessenten.	Kapital.	Verlust.	Antheil am Verlust.
Schiffer für das Schiff	80000	500	4000
" " die Fracht	2000	—	100
A	10000	500	500
B	8000	4000	400
	100000	5000	5000

Bei der particulären Havarie findet entweder ein totaler oder partieller Verlust statt. Im ersten Falle, mit oder ohne Abandon *),

*) Unter Abandon versteht man die Handlung, durch welche der Versicherte dem Versicherer anzeigt, daß er die versicherte Summe in Anspruch nehme, und ihm dagegen den Gegenstand der Versicherung mit allem ihm dem Versicherten zustehenden Rechte überlasse; so z. B. in dem Falle, in

hat die Bestimmung der vom Versicherer zu ersetzenden Summe nichts Besonderes; der Versicherer bezahlt nämlich die Taxe in der Police oder die gezeichnete Summe. Bei der Berechnung des partiellen Schadens hingegen muß eine Berechnung angestellt werden, welche nicht einzig und allein in der Natur der Sache, sondern auch in der Uebereinkunft der Partheien und der dabei zu berücksichtigenden gesetzlichen Bestimmungen und Usancen begründet ist. Wenn mehrere Versicherer gezeichnet haben, so muß der Schade überhaupt nach Verhältniß der gezeichneten Summen vertheilt werden. Die Berechnung zerfällt also überhaupt in die Berechnung des Schadens, ohne Rücksicht auf die verhältnißmäßige Vertheilung, und in diese Vertheilung. Hierbei haben wir insbesondere die Versicherungen des Schiffs, der Fracht, der Ladung und des imaginären Gewinns in Betrachtung zu ziehen.

Ist das Schiff beschädigt und in einem Nothhafen oder im Bestimmungshafen reparirt worden, so wäre der Kostenaufwand der Reparatur vom Versicherer zu vergüten. Weil aber der Versicherte durch die Reparatur den ausgebesserten Theil des Schiffes neu erhält, und es somit geschehen kann, daß das Schiff nach der Reparatur mehr als vor der Beschädigung werth ist, so muß von den wirklichen Kosten der Reparatur oder von der taxirten Summe, wenn eine Schätzung des Schadens stattgefunden hat, ein angemessener Abzug für die Werthszunahme des versicherten Gegenstandes gemacht werden. Da indessen diese Zunahme nicht genau bestimmt werden kann, so hat man ziemlich allgemein die Regel angenommen, daß überhaupt, ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit des Schiffes, ein fester Abzug für den Unterschied zwischen alt und neu gemacht werde, der fast überall auf ein Drittheil*) des Betrags der Reparatur festgesetzt worden ist, obwohl auch mitunter ein Un-

---

welchem eine Beschädigung am Schiffe so groß ist, daß das Schiff, um hergestellt zu werden, ein neues Schiff werden müßte, oder die Kosten der Reparatur des Schiffes den Werth des Schiffes übersteigen oder erreichen würden; ferner wenn die Waare so beschädigt ist, daß mit Sicherheit oder hohem Grade von Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, daß sie bei einer weitern Verschiffung gänzlich verderben werde u. s. w.

*) Pöhls, Assecuranzrecht, §. 683.

terschied gemacht wird, und Gegenstände, die langsamer abnutzen, wie Kupferbeschlag, Eisen, Ketten ꝛc. anders behandelt werden.

Ein particulärer Schade an der Fracht entsteht in den Fällen, in welchen der Schiffer nicht die ganze Fracht erhält, z. B. dann, wenn das Schiff, nachdem es einen Theil der Reise zurückgelegt hat, unfähig wird, sie fortzusetzen, oder wenn das Schiff nur einen Theil seiner Ladung am Bestimmungsorte abliefert, weil der übrige Theil zu Grunde gegangen oder überhaupt in Folge einer vom Versicherer übernommenen Gefahr nicht mehr vorhanden ist. Wenn aber überhaupt ein Schaden an der Fracht entsteht, welcher vom Versicherer zu vergüten ist, so fällt diesem gleichwohl nicht immer der ganze Betrag des Schadens zur Last; z. B. wenn gewisse Ausgaben, die der Versicherte nur in dem Falle einer glücklich beendigten Reise hat, wegfallen, so müssen sie dem Versicherer vergütet werden, d. h. von der Summe des zu leistenden Schadenersatzes abgezogen werden. Hierzu folgendes Beispiel.

Die Bruttofracht ist versichert mit		20000
Bei glücklicher Ankunft der Güter hat der Schiffer zu bezahlen:		
Gage an das Schiffsvolk	6000	
Hafenunkosten	1000	
Loots- und Tonnengeld	300	
Courtage und Provision	500	
	7800	
Die, die Fracht treffenden, ähnlichen Unkosten im Nothhafen mit Einschluß der zu bezahlenden Gage, und das Schiffsvolk nach Hause zu schaffen, sind	5200	
wird erspart		2600
	bleibt	17400
Die Fracht nach Verhältniß des zurückgelegten Theils der Reise betrage		7000
daher vom Versicherer zu vergüten . . .		10400

Verwickelter ist die Berechnung der particulären Havarie bei partieller Beschädigung der Ladung. Kommt nämlich die Waare

beschädigt an dem Bestimmungsort an, so muß der Versicherte eine gerechte Entschädigung, d. h. weder zu viel noch zu wenig erhalten, so daß also auch, in Beziehung auf den Verkauf der beschädigten Waare, die vom Versicherer zu vergütende Summe unabhängig von den Schwankungen des Marktpreises ist.

Nehmen wir z. B. an, eine Waare sey für den Einkaufswerth mit allen Kosten bis an Bord für 10000 versichert; bei der Ankunft im Bestimmungshafen betrage die Beschädigung 25 Procent, und der Werth der Waare sey im Bestimmungsort gerade der, zu dem die Waare versichert worden ist.

Wird nun die beschädigte Waare mit 25 Procent im Verhältniß zu ihrem Werthe verkauft, so beträgt der Erlös 25 Procent von 10000; mithin 7500; der Versicherer hat also zu vergüten:

$$10000 - 7500 = 2500.$$

Wenn aber die Waare im Bestimmungsort im Preise gestiegen ist, z. B. um 30 Proc., so ist unter übrigens gleichen Umständen, und wenn wie vorher der Schaden 25 Proc. beträgt, der Erlös der verkauften Waare 75 Proc. von $\frac{10000 \times 130}{100}$ oder 13000, mithin 9750; wenn nun dieser größere Erlös bei der Vergütung in Anschlag gebracht würde, so hätte der Versicherer zu vergüten:

$$10000 - 9750 = 250.$$

Wenn hingegen die Waare im Bestimmungsort im Preise gefallen ist, z. B. um 30 Proc., so ist, unter übrigens gleichen Umständen, und wenn, wie vorher, der Schaden 25 Proc. beträgt, der Erlös der verkauften Waare 75 Proc. von $\frac{10000 \times 70}{100}$ oder 7000, mithin 5250; wenn nun dieser kleinere Erlös bei der Vergütung in Anschlag gebracht würde, so hätte der Versicherer zu vergüten:

$$10000 - 5250 = 4750.$$

Der Unterschied in den obigen Resultaten ist bedeutend; der Versicherer zahlt nach obiger Rechnungsweise 250, wenn die Waare um 30 Proc. gestiegen ist, dagegen 4750, wenn sie um eben so viel gefallen ist, und nur 2500, wenn der Werth im Bestimmungsort mit dem versicherten Werthe übereinstimmt. Aber nur die letztere Entschädigungssumme entspricht dem Ver-

sicherungsvertrage, denn der Versicherer hat lediglich die Gefahr des Transports übernommen, und die Schwankungen im Preise der Waaren dürfen ihn nicht berühren. Die Berechnung des Betrags der Vergütung muß demnach in der Weise stattfinden, daß beim Steigen und Fallen der Preise eben so viel für die Vergütung herauskommt, als wenn, unter übrigens gleichen Umständen, der Werth der Waare am Bestimmungsort mit der versicherten Summe in Uebereinstimmung wäre.

Hierzu gelangt man, wenn man den Schaden, der sich nach der Annahme des Werths der Waare an dem Bestimmungsort herausstellt, mit dem Verhältniß des versicherten Werths zum wirklichen, der Nichtbeschädigung entsprechenden Werthe multiplicirt.

Ist, in Beziehung auf den ersten Fall des obigen Beispiels, die Waare, welche für 10000 versichert worden ist, um 30 Proc. gestiegen, so wäre sie im nichtbeschädigten Zustande $\frac{10000 \times 130}{100}$ oder 13000 werth; beträgt der Schaden 25 Proc., so beträgt der Erlös 75 Proc. von 13000, also 9750; der Schaden beträgt mithin 13000 — 9750 = 3250, und der Versicherer hat so viel zu vergüten, als aus der Proportion folgt:

$$13000 : 3250 = 10000 : x = \frac{10000}{13000} \times 3250 = 2500$$

in Uebereinstimmung mit der Annahme, daß der Werth der Waare am Bestimmungsort mit dem versicherten Werthe übereinstimmt.

Ist, in Beziehung auf den zweiten Fall des obigen Beispiels, die Waare, welche für 10000 versichert worden ist, um 30 Proc. gefallen, so wäre sie im nichtbeschädigten Zustande $\frac{10000 \times 70}{100}$ oder 7000 werth; beträgt der Schaden 25 Proc., so beträgt der Erlös 75 Proc. von 7000, also 5250; der Schaden beträgt mithin 7000 — 5250 = 1750, und der Versicherer hat so viel zu vergüten als aus der Proportion folgt:

$$7000 : 1750 = 10000 : x = \frac{10000}{7000} \times 1750 = 2500,$$

also wieder in Uebereinstimmung mit der Annahme, daß der Werth der Waare am Bestimmungsort mit dem versicherten Werthe übereinstimmt.

Es sey überhaupt der versicherte Werth $= w$; die Beschädigung betrage m Procent, und die Waare sey nun n Procent im Werthe gestiegen oder gefallen. Der Werth der Waare am Bestimmungsort ist dann $= \frac{w\,(100 \pm n)}{100}$, der Erlös des Verkaufs beträgt $\frac{w\,(100 \pm n)}{100} \times \frac{100 - m}{100}$; der Schaden beträgt mithin

$$\frac{w\,(100 \pm n)}{100} - \frac{w\,(100 \pm n)}{100} \times \frac{100 - m}{100} = \frac{w(100 \pm n)}{100} \times \frac{m}{100}$$

und der Versicherer hat so viel zu vergüten als aus der Proportion folgt:

$$\frac{w\,(100 \pm n)}{100} : \frac{w\,(100 \pm n)}{100} \times \frac{m}{100} = w : x = \frac{m\,w}{100}$$

in Uebereinstimmung mit der Annahme, daß der, dem unbeschädigten Zustande der Waare entsprechende Werth am Bestimmungsort mit dem versicherten Werthe übereinstimmt, wonach, wenn der Schaden m Procent beträgt, der Versicherer $\frac{m\,w}{100}$ zu vergüten hat.

Im Obigen ist zur Ermittlung des Schadens angenommen worden, daß die beschädigte Waare verkauft werde; der Werth der beschädigten Waare kann aber auch durch Schätzung bestimmt werden. Die Kosten des Verkaufs und der Schätzung fallen dem Versicherer zur Last; dagegen muß der Versicherte dasjenige vergüten, was er zu zahlen gehabt hätte, wenn die Waare ganz unbeschädigt ihren Bestimmungsort erreicht hätte, und was er in Folge des Verlusts nicht zahlt; denn um den Betrag dieser Kosten ist die Waare weniger werth, wenn sie ohne Verlust oder Beschädigung ankommt; dahin gehört z. B. bei dem Verlust eines Theils der Waare der Zoll, und bei einer Beschädigung der Waare der Nachlaß am Zoll.

Es kann indessen auch geschehen, daß die Waare nicht dahin gelangt, wo sie der Eigenthümer für die bedungene Fracht haben wollte. Hier sind aber folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Es wird die Fracht nach Verhältniß des zurückgelegten Wegs bezahlt. Ist es dann möglich, die Waare in einem andern Schiffe an den Bestimmungsort zu liefern, so ist die bisherige Fracht nicht verloren, sondern es kann nur die höhere

Fracht in Betracht kommen, die für den noch übrigen Theil des Wegs zu bezahlen ist. Diese fällt aber von Rechtswegen dem Schiffer zur Last.

2) Die Waare wird im Nothhafen verkauft. Erhält der Versicherte die versicherte Summe oder noch mehr für die ganze Ladung oder für den verkauften Theil derselben, so kann er vom Versicherer nichts verlangen. Wird dagegen die Waare unter dem versicherten Werthe verkauft, so hat der Versicherte Verlust an der Fracht. Hier kann nun entweder der Abandon stattfinden oder es muß der Versicherte für den betreffenden Frachtverlust vom Versicherer entschädigt werden.

Sind endlich in einer Police mehrere Artikel versichert, so hängt es von der Art, wie die Versicherung geschlossen worden ist, ab, ob jede Parthie für sich zu reguliren ist, oder ob sämmtliche versicherte Waaren als ein Ganzes zu betrachten sind.

Wir haben nun noch den Schadenersatz für die Versicherung auf verhofften Gewinn zu bestimmen. Diese Versicherung besteht darin, daß im Falle eines totalen Schadens der Versicherte um das entschädigt wird, was er nach dem wirklichen Preise der nicht beschädigten Waare am Bestimmungsort, nach Abzug der Verkaufsunkosten, Fracht, Zölle u. s. w. mehr für dieselbe erhalten haben würde, als ihm dieselbe am Abgangsorte mit allen Kosten bis an Bord zu stehen kommt.

Geht ein Theil der Waare total verloren, so ergiebt sich aus dem Werth der unbeschädigten Waare, wie viel für die verlorene Waare am Gewinn verloren geht.

Kommt die Waare beschädigt an, so muß der Versicherer des verhofften Gewinnes eben so viel Procente vergüten, wie der Versicherer der Waare, wenn man sich, zur Verdeutlichung der Sache, denkt, daß die Waare und der verhoffte Gewinn nicht von einer und derselben Person seyen. Nur darf der eine und andere Ersatz mit dem Erlöß der verkauften oder mit dem Werth der angekommenen Waare nicht mehr betragen, als der Versicherte im Falle glücklicher Ankunft für dieselbe erhalten kann, und es muß der Berechnung des Schadenersatzes der Gewinn zum Grunde gelegt werden, welchen die Waare im Falle glücklicher Ankunft wirklich gehabt hätte, und also nicht der versicherte Betrag des verhofften Gewinns.

Angenommen, die Waare sey versichert für 1000, der verhoffte Gewinn für 400, die Waare sey gestiegen um 20 Proc., und sey also im unbeschädigten Zustande 1200 werth, und es betrage der Schade 25 Proc.

Hiernach beträgt die beschädigte Waare 75 Proc. von 1200; also 900

der Versichrer der Waare hat zu vergüten $\frac{1000 \times 300}{1200}$ oder 250

Wenn aber der Versicherer des verhofften Gewinns vergütet $\frac{400 \times 300}{1200}$ oder 100

so erhält der Versicherte 1250

also 50 mehr als die Waare werth ist und als ihm gebührt.

Ist aber die Waare für 1000 versichert worden und wäre sie im Falle glücklicher Ankunft 1200 werth, so würde der Gewinn 200 betragen, und nach diesem Betrage muß der Versicherer des verhofften Gewinnes die Vergütung ermessen. Hiernach stellt sich die Rechnung wie folgt:

Betrag der beschädigten Waare 75 Procent von 1200 . 900

Ersatz vom Versicherer der Waare $\frac{1000 \times 300}{1200} =$ 250

Ersatz vom Versicherer des verhofften Gewinns $\frac{200 \times 300}{1200} =$ 50

der Versicherte erhält also 1200

in Uebereinstimmung mit dem Werthe, welchen die Waare im Falle glücklicher Ankunft gehabt haben würde.

Es sey überhaupt der versicherte Werth der Waare $= w$, die Beschädigung betrage m Proc., und die Waare sey um n Proc. im Werthe gestiegen. Der Werth der Waare, im Falle glücklicher Ankunft, ist daher $= w\left(\frac{100 + n}{100}\right)$; der Erlös des Verkaufs ist $= w\left(\frac{100 + n}{100}\right) \times \frac{100 - m}{100}$; der Schadenersatz für die Waare ist $= \frac{m w}{100}$; der Gewinn im Falle glücklicher Ankunft ist $= \frac{n w}{100}$, und der Ersatz zu m Proc. von $\frac{n w}{100}$ ist $= \frac{m n w}{100^2}$. Die Summe dieser Werthe ist

$$w\left(\frac{100+n}{100}\right)\times\frac{100-m}{100}+\frac{mw}{100}+\frac{mnw}{100^2}=w\left(\frac{100+n}{100}\right)$$

Es steht sich mithin der Versicherte eben so, als wenn die Waare den Bestimmungsort wohlbehalten erreicht hätte.

Im Obigen ist nachgewiesen worden, daß nur der wirklich an der Waare, im Falle glücklicher Ankunft derselben, zu machende Gewinn, und nicht der versicherte Betrag des verhofften Gewinns bei der Berechnung der Vergütung maßgebend ist. Der verhoffte Gewinn muß indessen im Versicherungsvertrag beiläufig ausgeworfen werden, weil sich ja die Bezahlung der Prämie nach dem Betrage der versicherten Summe richtet. Wenn nun der Gewinn kleiner ausgefallen ist, als der dafür im Versicherungsvertrag ausgeworfene Betrag, so muß die dem Überschuß entsprechende Prämie dem Versicherten zurückerstattet werden, und es wird ihm die ganze Prämie, die er für den verhofften Gewinn gezahlt hat, zurückerstattet, wenn gar kein Gewinn stattgefunden hat. Die Versicherung des verhofften Gewinns soll demnach den Versicherten so stellen, wie er gestellt wäre, wenn er die Waare zu ihrem Werth im Bestimmungsort versichert hätte.

Die Bestimmung des Gewinns unterliegt indessen Schwierigkeiten, wenn die Waare gänzlich untergegangen oder in einem Nothhafen verkauft worden ist. Geben Facturen, Ordrebriefe u. dgl. über die Qualität der Waare keine genügende Nachweisung, so muß der Versicherte in dieser Beziehung den ordentlichen Beweis führen*). Noch größer ist die Schwierigkeit, wenn von dem Gegenstande der Assecuranz überhaupt alle Nachrichten fehlen, und dieser deßhalb für verloren zu halten ist. Nach Pöhl's**) wäre hier folgende die juristisch richtigste Rechnung: Man nimmt die Zeit, in der ein Schiff die Reise nach dem Bestimmungsort gewöhnlich vollendet, und zwar, wo gesetzliche Fristen dafür existiren, diese an, und der Gewinn, der zu irgend einer Zeit, von dem Ende dieser Frist, bis zur Zeit, zu welcher der Versicherer zahlen muß, statt hatte, ist der Regulirung des Schadens zum Grunde zu legen. Wenn aber dieser Gewinn die versicherte Summe des verhofften Ge-

*) Pöhl's Assecuranzrecht, §. 686.
**) Assecuranzrecht, §. 686.

winns übersteigt, so trägt der Versicherte für den Ueberschuß selbst die Gefahr und er kann dafür den Versicherer nicht in Anspruch nehmen.

Vertragsgemäße Befreiungen von der Gefahr.

222. Für den Schaden, der an Waaren durch ihre natürliche Beschaffenheit entsteht, sind die Versicherer indessen immer frei. Da aber bei einem Seeunfall nicht immer ausgemittelt werden kann, wie viel dem innern Verderb zuzuschreiben ist, so ist es gekommen, daß man je nach der Gattung der Waare Abstufungen angenommen, und diejenige Beschädigung, die durch ihren innern Verderb verursacht werden kann, für jede einzelne Waare nach Procenten zu bestimmen gesucht hat. Hiernach zahlen die Versicherer im Falle einer Beschädigung entweder nur so viel, als dieselbe die Procente, von denen sie frei sind, nicht übersteigt, wie z. B. die Versicherungscompagnien in Bremen u. a., oder es wird, wenn die Beschädigung an den Versicherer kommt, dieselbe zum Vollen bezahlt, wie z. B. in New-York und andern Plätzen. Auch bei andern Gegenständen der Seeassecuranz kommen vertraggemäße Befreiungen vor, so wie es auch gesetzliche Beschränkungen der vom Versicherer übernommenen Gefahr giebt. Im Zweifel wird angenommen, daß der Assecuranzvertrag nach den bestehenden Gesetzen geschlossen sey, und wenn die Parthien davon abweichen wollen, so müssen sie dieß ausdrücklich stipuliren *).

Assecuranz gegen Feuerschaden.

223. Gegenstände der Assecuranz gegen Brandschaden sind Gebäulichkeiten und bewegliche Dinge (Mobilien, Maschinen, Waaren). Unter letztern sind aber diejenigen Gegenstände gewöhnlich ausgeschlossen, welche leicht verschleppt werden können (wie z. B. Gold, Precioſen ꝛc.), weil man sie, wenn sie gerettet worden sind, leicht verheimlichen kann, um einen größern Schadenersatz zu erlangen; ferner solche Sachen, welche keinen nach allgemeinem Maßstabe schätzbaren, jedoch hohen Werth haben, z. B. Kunstsachen, Raritäten ꝛc.

Die Mobiliarversicherung geht in der Regel von Actien-Versicherungsanstalten aus; für die Versicherung von Gebäulichkeiten gegen Brandschaden hingegen giebt es sowohl Actien- als gegenseitige Versicherungsanstalten. Letztere sind theils Privatversicherungsanstalten, und theils Landesversicherungsanstal-

*) Vergl. Pöhl's Assecuranzrecht, §§. 612—619.

ten, zu deren Beitritt die Hausbesitzer gewöhnlich gezwungen sind. Zur Rechtfertigung dieses Zwangs wird die Sicherung der hypothekarischen Gläubiger und der Umstand geltend gemacht, daß bei voller Freiheit der Eigenthümer massiver Häuser durch eine etwas billigere Prämie zur Theilnahme an Privatanstalten bewogen werden könnten, und nach deren Austritt die Besitzer anderer, der Feuersgefahr stärker ausgesetzten Gebäude zu große Beiträge zu geben hätten.

224. Wegen der verschiedenen Abstufungen der Feuersgefahr müssen die Gebäulichkeiten in dieser Beziehung classificirt werden. Werden die Beiträge zum Voraus entrichtet, so richten sich die Versicherungspreise oder Prämien nach dem Grade der Gefahr, welcher die versicherten Gebäulichkeiten ausgesetzt sind. Werden dagegen die Beiträge erst nach erfolgtem Brandschaden eingezahlt, so geschieht die Vertheilung des Schadens im zusammengesetzten Verhältniß der versicherten Summe und der in Zahlen ausgedrückten Größe der Gefahr. (§. 215) Zur Bestimmung der Prämien müssen daher die absoluten Werthe der Feuersgefahr bekannt seyn, während zur Bestimmung der nach erfolgtem Brandschaden zu leistenden Beiträge nur die relativen Werthe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten erforderlich sind. Es giebt übrigens Landesversicherungsanstalten, wo man sich zu Gunsten der Besitzer von Gebäulichkeiten, welche größerer Gefahr ausgesetzt sind (Häuser der Landleute, Gewerbtreibenden ꝛc.) nicht so genau an diese relativen Werthe hält, und wo also die Beiträge der verschiedenen Klassen nicht völlig so ungleich als die Grade der Feuersgefahr sind, damit die Last für die Besitzer leichtverbrennlicher Gebäude nicht allzuschwer werde. In Baiern z. B. hat man nach dem Gesetz vom 1ten Juli 1834 folgende Classification der Gebäude nach den Abstufungen der Feuersgefahr aufgestellt:

1) massiv mit Dach von Stein oder Metall,
2) Fachwerk mit Dach wie Nr. 1,
3) massiv mit Dach von Holz oder Stroh,
4) nicht massiv mit Dach wie Nr. 3.

Die Beitragspflicht dieser Klassen soll nach Verhältniß der Zahlen 1, $1\frac{1}{9}$, $1\frac{2}{9}$ und $1\frac{3}{9}$ oder 9, 10, 11 und 12 berechnet werden, und die beiden letztern Sätze sind, der Erfahrung zufolge, kleiner als die den Graden der Gefahr entsprechenden

Verhältnißzahlen. Aber nicht aus diesem Grunde, sondern überhaupt, weil die Landesversicherungsanstalten weniger Abstufungen annehmen, als es die Beschaffenheit der Sache mit sich bringt, und häufig auch wegen des beschränkten Kreises ihrer Wirksamkeit und der Anhäufung des Risicos in schlecht gebauten Dörfern und Landstädten erscheinen die Prämien der seitherigen Actien-Versicherungsanstalten im Vergleich mit den Beiträgen der Landesversicherungsanstalten nicht zu hoch, und es dürften daher die gegenseitigen Privatversicherungsanstalten den Landesversicherungsanstalten vorzuziehen seyn, wenn sie, wie dieß bei der Gothaer Feuerversicherungsbank für Deutschland der Fall ist, zweckmäßig eingerichtet sind, und ein großes Gebiet umfassen. Denn je größer die Anzahl der Versicherten, je umfassender der Wirkungskreis einer solchen Anstalt, desto mehr nähert sich der jährliche Schadenbetrag einem Durchschnittssatze, desto sicherer kann auf das Bestehen der Anstalt gerechnet werden, und desto unwahrscheinlicher wird die Unzulänglichkeit von gewissen Durchschnittsprämen *). Weil aber den gegenseitigen Privatversicherungsanstalten die Mittel abgehen, welche den Staatsbehörden zur Beitreibung der Brandsteuern zu Gebot stehen, so müssen solche Versicherungsanstalten die Vorausbezahlung der Prämien bedingen. Die nach Vergütung der vorgefallenen Brandschaden und nach Bestreitung der Verwaltungskosten verbleibenden Ueberreste der Einlagen sind den Interessenten zurück zu zahlen, so wie solche dagegen auch bei Unzulänglichkeit der Einlagen verpflichtet sind, den erforderlichen Nachschuß zu leisten.

Was die Entschädigungsfestsetzung betrifft, so besteht bei totalem Schaden der Gebäulichkeiten die zu leistende Entschädigung im Betrage der Versicherungssumme; bei partiellen Beschädigungen hingegen hängt die Größe des Schadenersatzes von besondern Bedingnissen hierüber ab. Darf, wie dieß bei manchen Landesversicherungsanstalten der Fall ist, nur ein gewisser Theil des Häuserwerths versichert werden, so ist der zu leistende Schadenersatz der ebenso vielste Theil der versicherten Summe, als der Schaden von dem vollen Werthe des Gebäudes. Ist dagegen der volle Werth versicherbar, so bringt es die Beschaf-

*) Vergl. Darstellung des Wesens und Wirkens der Feuerversicherungsbank für Deutchland ꝛc. (Gotha, 1834)

fenheit der Sache mit sich, daß sich der zu leistende Entschädigungsbetrag zur Versicherungssumme verhält, wie sich der zur Wiederherstellung des abgebrannten Theils erforderliche Betrag zum Kostenaufwande verhält, der erforderlich wäre, um das ganze Gebäude in seiner bishirigen Einrichtung von Grund aus neu aufzuführen. Dieses Verhältniß ist im Schadensfalle durch Sachverständige zu ermitteln.

Assecuranz gegen Hagelschaden.

225. Obgleich Felderzeugnisse durch Zufälle verschiedener Art leiden können, so beschränkt sich doch die Versicherung derselben auf diejenige gegen Hagelschaden, weil die übrigen Zufälle, welche solche Erzeugnisse treffen können, (z. B. Ueberschwemmung, Mäusefraß, Mißwachs ꝛc) theils wegen der großen Ungleichheit der Gefahr, und theils wegen der großen Verbreitung, in welcher solche stattfinden, der Versicherung zu große Schwierigkeiten in den Weg legen.

Wegen der großen Ungleichförmigkeit im Eintreffen der Beschädigung durch Hagel, können überdem nur gegenseitige Versicherungen dafür stattfinden.

Weil nicht alle Gewächse in gleichem Grade vom Hagel leiden, so müssen diejenigen, welche gleicher Gefahr ausgesetzt sind, in Beziehung auf ihre Versicherung in besondere Klassen eingetheilt werden. So hat man z. B. bei dem im Jahr 1834 im Großh. Baden gestifteten Hagelversicherungsverein folgende Klassen angenommen:

1) Hanf, Flachs, Tabak und Hopfen,
2) Reben, Obst, Reps und Mohn,
3) Halm- und Hülsenfrüchte,
4) Alle Arten Knollen- Wurzel- Küchen- und Futtergewächse.

Es versteht sich übrigens von selbst, daß bei gegenseitiger Versicherung der zu versichernde Erndtewerth nicht allzu klein seyn darf, und daß in dieser Beziehung ein Minimum festzusetzen ist. In den Statuten oben erwähnten Versicherungsvereins darf der Anschlag nicht weniger als 100 fl. betragen. Diejenigen Bewohner eines und desselben Orts, welche weniger zu versichern haben, können sich aber vereinigen, um jenen Erndtenwerth zusammenzubringen, und sich durch einen unter ihnen als Gewährsmann vertreten lassen.

Eben so ist wegen der Schwierigkeit der Abschätzung unbedeutender Schaden und wegen der unverhältnißmäßigen Kosten

der Abschätzung in Beziehung auf die Entschädigung ein Minimum festzusetzen, in der Weise, daß eine Entschädigung nur dann stattfindet, wenn der Schaden mehr als jenes Minimum beträgt. (Nach den Statuten des badischen Hagelversicherungsvereins z. B. ein Zehntheil des Werths eines versicherten Gegenstandes.)

Bei der gegenseitigen Versicherung ist auch die Dauer des Beitritts in Beziehung auf Versicherungsbedingnisse zu berücksichtigen.

Nach den Statuten des badischen Vereins z. B. kann der Beitritt auf 1, oder auf 5, 10 Jahre und auf Lebens- oder Besitzthumszeit geschehen. Wer nur auf 1 Jahr seine Erzeugnisse versichern lassen will, hat seine Anmeldung längstens bis Ende April einzureichen, bei späterer Anmeldung hat der zu Versichernde auf wenigstens 5 Jahre unwiderruflich der Anstalt beizutreten, oder für das einzelne Jahr die doppelte Prämie zu entrichten. Mehrjährig versicherte Mitglieder haben aber im folgenden Jahre etwaige Saat- oder Gutsveränderungen auch unaufgefordert bis Ende April und auf dem Hochgebirg bis Ende Mai einzusenden, andernfalls aber den Prämienbetrag nach bestehender Fassion zu bezahlen.

Wegen der Ungleichförmigkeit im Eintreten der Beschädigung durch Hagel, lassen sich die Grade der Gefahr nicht wohl in Zahlen ausdrücken, und es muß daher bei gegenseitiger Versicherung der jeweils eintretende Schaden auf die Mitglieder des Vereins nach Verhältniß ihrer versicherten Summen ausgeschlagen werden. Aber eben wegen dieser Ungleichförmigkeit im Eintreten von Hagelschaden, und weil auch das Gebiet, auf welche sich die Versicherung erstreckt, nicht immer einen solchen Umfang hat, daß sich der Schaden auf eine sehr große Anzahl von Interessenten vertheilt, so haben manche Versicherungvereine die Bestimmung aufgenommen, daß der in jedem Jahre zu entrichtende Beitrag einen gewissen Belauf nicht übersteigen darf. In diesem Falle kann der Beitrag der Versicherten zum Voraus festgesetzt und entrichtet werden.

So beträgt z. B. nach den Statuten des badischen Vereins die Einlage für die

1te Klasse	2 fl. — kr.	von 100 fl. Rohertrag.
2„ „	1 „ 15 „	
3„ „	— „ 50 „	
4„ „	— „ 25 „	

In minder gefährlichen Gegenden des Inlandes, da wo eine Gemarkung, worin die zu versichernden Güter liegen, in den verflossenen 10 Jahren von der Aufnahme an, erweislich keinen oder nur einmal Steuernachlaß oder Entschädigungen vom Versicherungsverein erhalten hat, beträgt die Einlage für die

1te Klasse	1 fl. 45 kr.	von 100 Rohertrag.*)
2te „	1 „ — „	
3te „	— „ 40 „	
4te „	— „ 20 „	

Was die Bestimmung des Schadenersatzes betrifft, so ist solche analog mit derjenigen bei der Seeversicherung von Waaren. Für Felderzeugnisse ist der muthmaßliche Naturalertrag der versicherbare Werth, und es ist derselbe nach den zur Zeit der Versicherung bestehenden Preisen in Geld anzusetzen. Nun können aber zur Erndtezeit die Preise gefallen oder gestiegen seyn, und es muß alsdann (ebenso wie bei Waaren,

*) Hierzu als praktischer Beleg die Resultate der seitherigen Rechnungsabschlüsse des badischen Versicherungsvereins, welcher seine Wirksamkeit am 22. April 1834 begonnen hat.

Jahr.	Versicherungswerth.	Einlage mit Zurechnung der Zinsen und nach Abzug der Unkosten.	Schaden.
1834	245700 fl.	1390 fl. 48 kr.	4504 fl. 20 kr.
35	550486 „	3723 „ 10 „	1591 „ 3 „
36	481314 „	3351 „ 32 „	9507 „ 53 „
37	549744 „	3857 „ 38 „	16627 „ 47 „
38	581921 „	4089 „ 18 „	8070 „ 59 „
39	739050 „	5291 „ 48 „	13340 „ 37 „
40	903399 „	6518 „ 29 „	25562 „ 41 „
41	869825 „	6475 „ 37 „	31847 „ 19 „
42	874474 „	6520 „ — „	8150 „ — „
43	1008388 „	7758 „ 1 „	18922 „ 2 „
44	1044540 „	8397 „ — „	14731 „ 35 „

welche Havarie gemacht haben) die Entschädigung für den durch Hagelschlag verursachten Schaden in der Weise stattfinden, daß die Schwankungen im Preise keinen Einfluß auf die Entschädigung haben.

Die Entschädigungen werden aus den Einlagen, welche gegen gehörige Sicherheit unterdessen verzinslich unterzubringen sind, bestritten. Wenn daher in besonders unglücklichen Jahren die ganze Summe der Jahreseinlagen nicht hinreichen sollten, um nach Abzug der Kosten sämmtliche Entschädigungen daraus zu bestreiten, so muß die vorhandene Summe unter sämmtliche Beschädigte verhältnißmäßig ausgetheilt werden. Ergiebt sich dagegen ein Ueberschuß in der Jahreseinnahme, so ist derselbe zur Bildung eines Reservefonds zu verwenden. Besteht einmal ein solcher Fonds, so haben neu eintretende Mitglieder außer den Einlagen noch ein Eintrittsgeld, als Einkauf in den Reservefonds, zu entrichten. Dieses Eintrittsgeld richtet sich nach dem Verhältniß, in welchem der Reservefonds nach dem zuletzt bestehenden Etat zu dem Gesammtwerthe der versicherten Gegenstände steht. Wenn z. B. der Reservefonds ½ Proc. des Gesammtversicherungswerths beträgt, so muß ein neu Eintretender ebenfalls ½ Proc. von der versicherten Summe als Eintrittsgeld entrichten.

Der Reservefonds ist, als solcher, bis zu einem gewissen Belaufe, zur Aufbesserung des Entschädigungsbetrags zu verwen-

---

Die Verhältnisse des Schadens zum versicherten Werth und der Einlagen zum Schaden sind demnach in Procenten ausgedrückt wie folgt:

Jahr.	Verhältniß des Schadens zum versicherten Werth.	Verhältniß der Einlage zum Schaden.
1834	1,86	30,87
35	0,28	100+23,4 Überschuß
36	1,97	35,25
37	3,03	23,20
38	1,38	50,66
39	1,80	39,66
40	2,82	25,50
41	3,66	20,33
42	0,93	80
43	1,87	41
44	1,41	57

den, wenn die Einlagen eines Jahres zur Deckung des Schadens nicht hinreichen. Hat der Reservefonds eine angemessene Höhe erreicht, so können die Interessen desselben mit zur Bestreitung der Entschädigungen und zur Herabsetzung der jährlichen Einlagen dienen.

Assecuranz des Viehstandes.

226. Die Versicherung des Viehstandes ist zur Zeit auf diejenige des Rindviehs und der Pferde beschränkt, und es kommt selbst die Versicherung von letztern nur wenig vor. Wie bei der Versicherung gegen Hagelschaden ist auch hier die gegenseitige Versicherung am geeignetsten, namentlich, wenn sie unter Controlle der Regierung steht, wenn die Geschäftsführung durch Beamte derselben besorgt wird, wenn Thierärzte aufgestellt werden, um den Gesundheitszustand der in die Versicherung aufzunehmenden Thiere und alles was krankmachend auf diese einwirken kann, zu überwachen, um bei vorkommenden Thierkrankheiten schnelle Hülfe zu leisten, und wenn diese nicht möglich ist, die Krankheit zu bezeichnen, durch welche ein versichertes Thier gefallen ist oder wegen welcher dasselbe geschlachtet werden mußte, und um über die Frage zu entscheiden, ob der Eigenthümer an dem Verunglücken des Thiers keine Schuld trage. Je größer das Gebiet ist, auf welche sich die Versicherung erstreckt, desto weniger hat man den eintretenden Schaden von Seuchen, die doch in der Regel nur einzelne Ortschaften heimsuchen, zu befürchten; die Versicherung kann alsdann auch auf Seuchen ausgedehnt werden, während sie nur für sporadische Krankheiten stattfinden kann, wenn, wie dieß häufig der der Falle ist, die Versicherungen nur für einzelne Gemeinden bestehen.

Weil eine Versicherung nach dem vollen Werthe zur nachläßigen Behandlung der Thiere verleiten könnte, so darf nur ein, zum voraus zu bestimmender, angemessener Theil jenes Werths im Schadensfalle vergütet werden.

Auch giebt es Fälle, in welchen die Versicherung unstatthaft ist; so muß z. B. in Beziehung auf die Rindviehassecuranz von der Versicherung ausgeschlossen bleiben: krankes Vieh, alles Stall- und Halbvieh, das Vieh Derjenigen, welche Handel damit treiben, und welche ihr Vieh mißhandeln oder vernachläßigen.

Sodann ist zur Verhütung von Betrügereien erforderlich,

daß der dem Verein Beitretende alles zur Versicherung geeignete Vieh, das er im Stalle hat, versichern lasse. Ferner ist aber auch auf den Umstand Rücksicht zu nehmen, daß der Besitzer des Viehs sich veranlaßt finden kann, dasselbe zu veräußern. Hier kann nun zwar, wenn die Gefahr schon begonnen hat, der bereits gezahlte Beitrag nicht zurückgegeben werden, dagegen ist die Bestimmung zu treffen, daß wenn für das verkaufte Stück Vieh ein anderes eingestellt wird, solches nach abgelaufener Gewährzeit in die Assecuranz aufgenommen werden dürfe. Beläuft sich hierbei die Taxe höher als die des verkauften Stücks betragen hat, so muß der Beitrag von dem Mehrbetrag nachgezahlt werden. Hiernach kann auch auswärts aufgekauftes, oder von unversicherten Einwohnern des Vereinsgebiets gekaufts Vieh erst dann in die Versicherung aufgenommen werden, wenn die Gewährzeit vorüber ist. Verkauft endlich ein Versicherter ein Stück Vieh, so muß der Verein für die gesetzliche Gewährzeit, wo solche stattfindet, dem Käufer verbindlich bleiben.

Endlich ist auch noch des Falles zu gedenken, der mit dem Abandon (§. 221) analog ist. Muß nämlich ein versichertes Stück Vieh wegen eines Unfalls oder wegen Krankheit geschlachtet werden, und kann davon das Fleisch nach bestehendem Gesetz noch benutzt werden, so hat der Verein das Stück Vieh selbst zu verwerthen, und der Versicherte erhält dagegen aus der Vereinskasse die statutenmäßige Vergütung.

Damit aber zur alsbaldigen Entschädigung der Betheiligten jederzeit ein angemessener Kassenfonds vorhanden ist, so müssen die Beiträge nach einem muthmaßlichen Minimum im Beginn des Versicherungsjahres entweder auf einmal, oder terminweise, z. B. quartaliter, vorausbezahlt werden. Ist aber, wenn ungewöhnliche Unglücksfälle eintreten, der Kassenvorrath zur Deckung der Entschädigungssummen unzulänglich, so muß dieselbe nach Verhältniß der Versicherungssummen auf die einzelnen Mitglieder vertheilt werden. Ist ein solcher allgemeiner Ausschlag erforderlich, so muß in diesem Falle jedesmal die Rechnung des Vereins abgeschlossen werden.

VIII.

Creditanstalten.

227. Wir haben hier insbesondere diejenigen Creditanstalten in Betrachtung zu ziehen, bei welchen Darleihen auf Annuitäten vorkommen. Dergleichen, durch Pfandverschreibung gesicherte Darleihen werden durch jährliche gleiche Zahlungen auf Zins und Kapital nach Umlauf einer bestimmten Reihe von Jahren getilgt Die Darleihen gehen theils von der Regierung und theils von Privatvereinen, sogenannten Creditvereinen aus. Aber auch andere Anstalten, welche bedeutende Kapitalien zu ihrer Verfügung haben, wie z. B. Rentenanstalten, können sich mit Darleihen auf Annuitäten befassen. Die Darleihen werden theils ohne Rücksicht auf eine gewisse Verwendung, und theils zu speciellen Zwecken gemacht. Zu letzterer Art von Darleihen gehören z. B. diejenigen, welche zum Behufe der Zehntablösung von der Regierung gemacht werden, diejenigen, welche von landwirthschaftlichen Creditvereinen ausgehen ꝛc. Endlich kann auch ein zu einem speciellen Zweck errichteter Creditverein, z. B. ein landwirthschaftlicher, jede andere Klasse von Leuten, welche gehörige Sicherheit leisten können, in seinen Verein aufnehmen.

Der Zweck socher Vereine besteht überhaupt darin, Kapitalschulden in Rentenschulden zu verwandeln, denn die Aufkündbarkeit der Kapitalien gereicht häufig den Schuldnern zum Verderben, während ihnen, wenn sie nicht ganz herunter gekommen sind, die allmählige Tilgung vermittelst Entrichtung einer den Zinsenbetrag nicht bedeutend übersteigenden Rente nicht beschwerlich wird.

Jedes Vereinsmitglied hat für seinen Antheil an dem gemeinschaftlich aufgenommenen Kapital hypothekarische Sicherheit zu leisten. Weil aber die Vereinsmitglieder nicht darauf eingehen können, solidarisch für das ganze gemeinschaftliche Kapital zu haften, so muß ein Reservefonds gebildet werden, um durch denselben die bei einzelnen Mitgliedern sich etwa ergebenden Ausfälle, deren Einbringung nicht mehr möglich ist, zu decken. Uebrigens muß die Theilnahme an dem gemeinschaftlichen Anlehen auf ein gewisses Minimum beschränkt werden, damit die Verwaltung weder mit einer allzugroßen Geschäftsmenge überladen, noch in dem regelmäßigen Gange ihrer Operationen gehindert werde.

Die vom Vereine für das gemeinschaftlich gemachte Anlehen aufzubringenden Zinszahlungen müssen nicht nur durch die von den Mitgliedern zu zahlenden Renten gedeckt werden, sondern es müssen solche noch einen Ueberschuß geben, mit welchem der im Obigen erwähnte Reservefonds gebildet wird, und die ersten Einrichtungskosten, so wie der Verwaltungsaufwand bestritten werden können. So werden z. B. nach den Statuten des würtembergischen Creditvereins als Ersatz für die mit Anschaffung der Gelder verbundenen Kosten, als Beitrag zu den ersten Einrichtungskosten und als erster Beitrag zum Reservefonds je von 100 fl. Anlehen 4 fl. abgezogen; mithin blos 96 fl. baar ausgezahlt. Nach der Wahl der Entlehner können jedoch, diese 4 fl. auch zu der Anlehenssumme geschlagen, und nach und nach unter der Rente gezahlt werden. Dieß hat alsdann zur Folge, daß der Schuldner, für baar empfangene 100 fl. den Betrag von 104⅙ fl. schuldig wird. Die ordentliche Rentendauer ist auf 50 Jahre festgesetzt, die Tilgung kann jedoch, nach der Wahl der Schuldner, auch in kürzerer Zeit, bis auf 10 Jahre abwärts, erfolgen. Die Renten gründen sich auf den Zinsfuß von 3½ Proc. und enthalten neben dem Zins und der Kapitaltilgungsrente noch weiter einen Beitrag zu den Verwaltungskosten und Ausfällen mit jährlichen 26 kr. von 100 fl. ursprünglichem Anlehenskapital (also von baar empfangenen 96 fl.). Während jeder Schuldner verbunden ist, diesen unter den Renten begriffenen Verwaltungskosten-Beitrag so lange zu entrichten, bis seine Schuld entweder durch die kontrahirten Renten oder durch Ablösung getilgt ist, kann dagegen ein höherer

Betrag als 26 kr. von 100 fl. ursprünglichem Anlehenskapital, oder eine längere Fortentrichtung nicht von ihm verlangt werden. Die jährliche Aufrechnung dieser Kosten richtet sich nach dem wirklichen Erforderniß, und darf das unter den Renten berechnete Maximum in keinem Falle übersteigen; sie kann jedoch weniger betragen, wenn sich der Aufwand auf eine größere Summe vertheilt, oder wenn sich die Kosten ermäßigen lassen. Die einzelnen Rentenschuldner haben übrigens ihre contrahirten Renten unverändert fortzuentrichten, auch wenn die wirkliche Kostenaufrechnung das festgesetzte Maximum nicht erreicht; dagegen wird dasjenige, was hienach unter den Renten mehr gezahlt wird, am Kapital abgeschrieben, so daß also bei der letzten Rentenzahlung oder bei der Ablösung verhältnißmäßig weniger entrichtet werden darf. Außerdem wird jedem Vereinsmitgliede, welches seine Rentenschuld getilgt hat, sein Antheil an dem nach der letzten Rechnung vorhandenen Reservefonds berechnet, und eine oder mehrere Promessen dafür eingehändigt, welche zu einem Zinsfuße verzinslich sind, der um ½ Procent niedriger ist, als der Zinsfuß aus den niedrigst zinsenden Vereins-Passivobligationen. Der Zins wird jedoch nicht alljährlich baar bezahlt, sondern mit Zinseszinsen zum Kapital geschrieben, welches vor Ablauf der ordentlichen Rentendauer von 50 Jahren nicht aufkündbar ist, bis dorthin aber aus den Mitteln des Reservefonds bezahlt wird, insoweit diese im Verhältniß zu den Ansprüchen der übrigen Vereinsmitglieder zureichen.

Die Statuten derartiger Creditanstalten müssen nicht nur die verschiedenen Tilgungszeiten entsprechenden Annuitäten, sondern auch die nach Jahresstufen berechneten Abkaufssummen der verschiedenen, nach der Dauer der Tilgung benannten Annuitäten enthalten.

Z. B. nach der Ordnung über Darlehen auf Annuitäten der badischen Rentenversorgungsanstalt beträgt die kleinste Annuität 6 vom Hundert. Zahlt der Schuldner diese kleinste Annuität, so wird die ganze Schuld nach 35 Jahren, nachdem also die Annuität 35 mal bezahlt ist, getilgt; nach 34 Jahren ist die Schuld getilgt, wenn der Schuldner für 100 fl.

				eine Annuität	von	6 fl.	4,7 kr.	bezahlt
nach	33	Jahren	bei	einer	„	„ 6 „	9,8 „	„
„	32	„	„	„	„	„ 6 „	15,2 „	„

nach 31 Jahren bei einer Annuität von 6 fl. 20,9 kr. bezahlt

⋮

„ 4 „ „ „ „ „ 28 „ 28,1 „ „

Bei obigem Zeitrententarif ist zwar ein landesüblicher Zinsfuß von 4½ Proc. angenommen, aber für Verluste an Zwischenzinsen, im Falle die Wiederanlage der eingehenden Gelder nicht sogleich geschehen kann, und für den vermehrten Verwaltungsaufwand ein Zuschlag von durchschnittlich ½ Procent für jedes Jahr der ganzen Reihe, in welcher die Schuld getilgt werden soll, gemacht worden, d. h. es ist ein Gewinn über den landesüblichen Zins angenommen, der durch die Anzahl der Jahre getheilt, jährlich ungefähr ½ Procent beträgt.

Ist also die Anzahl der Jahre $= n$, die Schuld nach Ablauf des $n$ten Jahres $= p$ und die Annuität $= p + x$, so muß $\frac{x}{n} = \frac{1}{2}$ oder $x = \frac{n}{2}$ seyn. Wird nun der Werth der Annuität a durch w, der Zinsfuß durch r und die Anzahl der Jahre durch n bezeichnet, so ist (§. 90)

$$w\,(1+r)^n - a\left\{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots 1\right\} = -\frac{n}{2}$$

$$\text{woraus } a = \frac{w\,(1+r)^n + \frac{n}{2}}{(1+r^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots 1}$$

$$= \frac{w + \frac{n}{2\,(1+r)^n}}{\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots \frac{1}{(1+r)^n}}$$

welcher Ausdruck absichtlich nicht weiter vereinfacht wird.

Ist z. B. $w = 100$, $r = \frac{9}{200}$ (also 4½ Proc.), $n = 4$, so ist $\frac{1}{(1+r)^4} = 0{,}8385$, $\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+p)^4} = 3{,}5873$ und $a = \frac{100 + 2 \times 0{,}8385}{3{,}5873} = 28{,}34$.

Ist nun die Annuität in Betreff des Zuschlags von ½ Proc. richtig berechnet, so muß bei der letzten Rentenzahlung ein Rest bleiben, welcher durch die Anzahl der Jahre, also 4, dividirt, ½ giebt. Dieß wird durch folgende Berechnung nachgewiesen.

Kapital	100
Hiezu 4½ Proc. Zinsen	4,50
Summe	104,50
ab die 1te Annuität . .	28,34
Restschuld	76,16
Hiezu 4½ Proc. Zinsen	3,42
Summe	79,58
ab die 2te Annuität . .	28,34
Restschuld	51,24
Hiezu 4½ Proc. Zinsen	2,30
Summe	53,54
ab die 3te Annuität . .	28,34
Restschuld	25,20
Hiezu 4½ Proc. Zinsen	1,14
Summe	26,34
ab die 4te Annuität . .	28,34
Ueberschuß	2

Was die nach Jahresstufen zu berechnenden Abkaufssummen der verschiedenen, nach der Dauer der Tilgung benannten Annuitäten betrifft, so besteht die letzte Zahlung aus der, der Tilgungszeit entsprechenden, Rente, und aus der Summe der gegenwärtigen Werthe sämmtlicher, noch zu entrichtenden Renten. So ist z. B. bei der badischen Versorgungsanstalt der Betrag der 35-jährigen Annuität 6 fl.; wird nun im 33ten Jahre die Schuld getilgt, so hat, weil der angenommene Zinsfuß 4½ ist, der Schuldner zu zahlen

für das 33te Jahr		6 fl.	— kr.
„ „ 34te „	$6\left(\frac{104\frac{1}{2}}{100}\right) = 5$	„ 44	„
„ „ 35te „	$6\left(\frac{104\frac{1}{2}}{100}\right)^2 = 5$	„ 30	„
zusammen		17 fl.	14 kr.

Der Tarif für die Abkaufssummen muß also die Abkaufssummen der 35-jährigen, 34-jährigen, 33-jährigen, 32-jährigen ꝛc. Annuitäten für die ganzen Jahresreihen derselben enthalten.

228. Wenn eine Creditkasse ein Anlehen zu einem kleinern Zinsfuße macht, als zu welchem die von derselben gemachten Darleihen verzinslich sind, so kann die Frage aufgeworfen werden, in welcher Zeit das Anlehen getilgt wird, wenn die er-

übrigten Zinsen jährlich zum Tilgungsfonds geschlagen werden.

Wird das Kapital durch k, der Zinsfuß des Anlehens durch p, derjenige der Darleihen der Creditkasse durch p', und der jährliche Tilgungsfonds durch a bezeichnet, so läßt sich die zur Tilgung des Anlehens erforderliche Zeit n auf folgende Art bestimmen.

Nach dem 1ten Jahre wird gezahlt $pk + a + (p' - p)k$; setzt man $p' - p = q$, so ist die Schuld reducirt auf $k - a - qk = (1-q)k - a = A$. Nach dem zweiten Jahre wird gezahlt $pA + a + q\{(1-q)k - a\} = pA + (1-q)a + q \times (1-q)k$; vom Kapital bleibt demnach übrig $(1-q)k - a - (1-q)a - q(1-q)k = (1 - 2q + q^2) \times k - (2-q)a = B$. Nach dem 3ten Jahre wird gezahlt $pB + a + q\{(1 - 2q + q^2)k - (2-q)a\} = pB + (q - 2q^2 + q^3)k - (2q - q^2 - 1)a$; vom Kapital bleibt demnach übrig $(1 - 2q + q^2)k - (2-q)a - (q - 2q^2 + q^3)k + (2q - q^2 - 1)a = (1 - 3q + 3q^2 - q^3)k - (3 - 3q + q^2)a = C$.

Nach dem 4ten Jahre wird gezahlt $pC + a + q\{(1 - 3q + 3q^2 - q^3)k - (3 - 3q + q^3)a\} = pC + (q - 3q^2 + 3q^3 - q^4)k - (3q - 3q^2 + q^3 - 1)a$; vom Kapital bleibt demnach übrig $(1 + 3q + 3q^2 - q^3)k - (3 - 3q + q^2)a - (q + 3q^2 + 3q^3 - q^4)k + (3q - 3q^2 + q^3 - 1)a = (1 - 4q + 6q^2 - 4q^3 + q^4)k - (4 - 6q + 4q^2 - q^3)a$.

Vergleicht man die im Obigen hergeleiteten Reste, so ergiebt sich für das $n$te Jahr der Rest:

$$(1-q)^n k - a\left(n - \frac{n(n-1)}{1.2}q + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}q^2 \ldots \pm q^{n-1}\right)$$

Multiplicirt man die Reihe, welche mit a im Product ist, mit $-q$, und addirt man 1 zum Product, so ist die Summe $= 1 - q)^n$; die Reihe ist also $= -\frac{(1-q^n)-1}{q}$; nun soll der letzte Rest $= 0$ seyn; daher

$$(1-q)^n k = -a\frac{(1-q^n-1}{q} \text{ und } n = \frac{log.\frac{a}{qk+a}}{log.(1-q)}$$

Soll der Tilgungsfonds nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten und der anfängliche Tilgungsfonds a jährlich um g von 1 (also um $100\,g$ Procent) zunehmen, so ist der Tilgungsfonds im 1ten Jahre $= a$, im 2ten Jahre $= a(1+g)$, im 3ten Jahre $= a(1+g)^2$ u. s. w.

Nun wird nach dem 1ten Jahre gezahlt $pk + a + qk$; die Schuld ist also reducirt auf $k - a - qk = (1-q)k - a = A$. Nach dem 2ten Jahre wird gezahlt

$$pA + a(1+g) + q\{(1-q)k - a\} = pA + a(1+g) + qk - q^2k - qa;$$

vom Kapital bleibt also übrig

$$(1 - 2q + q^2)k - (1-q)a - a(1+g) = B.$$

Nach dem 3ten Jahre wird gezahlt

$$pB + a(1+g)^2 + q\{(1-2q+q^2)k - (1-q)a - a(1+g)\} =$$
$$pB + a(1+g)^2 + (q - 2q^2 + q^3)k - (q - q^2)a - qa(1+g);$$

vom Kapital bleibt also übrig

$$(1 - 3q + 3q^2 - q^3)k - (1-2q+q^2)a - (1-q)a(1+g) - a(1+g)^2 = C.$$

Nach dem 4ten Jahre wird gezahlt

$$pC + a(1+g)^3 + (q - 3q^2 + 3q^3 - q^4)k - (q - 2q^2 + q^3)a - (q - q^2)a(1+g) - qa(1+g)^2$$

Vom Kapital bleibt also übrig

$$(1 - 4q + 6q^2 - 4q^3 + q^4)k - (1 - 3q + 3q^3 - q^3)a - (1 - 2q + q^2)a(1+g) - (1-q)a(1+g)^2 - (1-g)^0 a(1+g)^3$$

u. s. w.

Die Kapitalreste sind also zu Ende des

1ten Jahres $= (1-q)k - a$

2ten „ $= (1-q)^2 k - (1-q)a - a(1+g)$

3ten „ $= (1-q)^3 k - (1-q)^2 a - (1-q)a(1+g) - a(1+g)^2$

4ten „ $= (1-q)^4 k - (1-q)^3 a - (1-q)^2 a(1+q) - (1-q)a(1+g)^2 - (1-q)^0 a(1+g)$

. . .

nten „ $= (1-q)^n k - (1-q)^{n-1} a - (1-q)^{n-2} a(1+g) - (1-q)^{n-3} a(1+g)^2 \ldots (1-q)^0 a(1+g)^{n-1}$

Daher, wenn die Schuld getilgt ist,

$$(1-q)^n k = a\left\{(1-q)^{n-1}+(1-q)^{n-2}(1+g)+(1-q)^{n-3}\times\right.$$
$$\left.(1+g)^2+\ldots(1+g)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{a}{1+g}\left\{(1-q)^{n-1}(1+g)+(1-q)^{n-2}(1+g)^2+\right.$$
$$\left.(1-q)^{n-3}(1+g)^3+\ldots(1+g)^n\right\}$$
$$\text{und } k=\frac{a}{1+g}\left\{\frac{1+g}{1-q}+\left(\frac{1+g}{1-q}\right)^2+\left(\frac{1+g}{1-q}\right)^3+\ldots\left(\frac{1+g}{1-q}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{a}{1+g}\times\frac{\frac{1+g}{1-q}\left\{\left(\frac{1+g}{1-q}\right)^n-1\right\}}{g+p}$$
$$\text{woraus } n=\frac{log.\frac{(g+q)(1-q)(1+g)k+a(1+g)}{a(1+g)}}{log.\frac{1+g}{1-q}}$$

Werden die Zinſen des Anlehens und der Darleihen halbjährlich entrichtet, ſo erfolgt unter obiger Vorausſetzung die Tilgung noch ſchneller, wenn die erübrigten Zinſen vom erſten Semeſter jedes Jahres ſelbſt wieder während des zweiten Semeſters verzinst werden, und der Zinsertrag ebenfalls zur Amortiſirung verwendet wird.

IX.

Sparkaſſen.

229. Sparkaſſen ſetzen die Theilnehmer derſelben in den Stand, die Erſparniſſe, welche ſie von Zeit zu Zeit machen, ſicher und zinstragend anzulegen, was im gemeinen Leben bei kleinen Summen entweder überhaupt nicht, oder wenigſtens nur mit großer Unſicherheit geſchehen kann.

Die Errichtung von Sparkaſſen hat entweder den ſpeciellen Zweck der Abwehr des Verarmens durch Darbietung einer Gelegenheit zur allmähligen Erſparung eines kleinen Kapitals, oder aber ſie hat den Zweck, ihren Theilnehmern zur zinstragenden Aufbewahrung und allmählichen Vermehrung bereits gemachter Erſparniſſe eine ſichere Gelegenheit darzubieten. Letztere Art von Sparkaſſen unterſcheidet ſich außerdem auch durch das geſellſchaftliche Verhältniß der Einleger von den für die ärmern Klaſſen errichteten Sparkaſſen, bei welchen jeder Theilnehmer einzeln und ohne nähere Verbindung mit den andern Theilnehmern der Anſtalt gegenüben ſteht.

Die weſentlichen Punkte, welche bei der Gründung von Sparkaſſen der letztern Art in Betracht kommen, ſind folgende:

1) Niedere Feſtſetzung des Betrags einer Einlage, und Beſtimmung des größten zuläßigen Betrags einer Einlage; letzteres zur Abwehr des Mißbrauchs dieſer Anſtalten durch die bemitteltern Klaſſen, indem ſolche die Sparkaſſe zur einſtweiligen Unterbringung ihrer zufällig müßig liegenden Kapitalien, oder wegen des Genuſſes höherer Zinſen benutzen könnten.

2) Sichere und möglichſt vortheilhafte Anlegung der Sparkaſſengelder.

3) Angemessene Verzinsung der Einlagen, und Gestattung des Zuschlags der Zinsen zum Kapital, jedoch ohne Zwang und ohne Beschränkung der Befugniß, sie nach Verlangen erheben zu können.

4) Die Befugniß der Einleger, über ihre Ersparnisse in kürzester Frist verfügen zu können.

5) Wenn die Verwaltungskosten der Sparkasse nicht aus der Gemeindekasse oder milden Stiftungen ꝛc. bestritten werden können, so sind die dazu erforderlichen Mittel zum Theil durch Beschränkung des Zinsengenusses der Einleger aufzubringen, und zwar in der Weise, daß die Verzinsung erst nach Ablauf einer gewissen Frist, oder überhaupt nicht gleich mit dem Tage der Einzahlung beginnt, und daß sie nicht mit dem Tage der Zurücknahme, sondern früher endigt, wonach die in der Zwischenzeit durch Anlegung der Sparkassengelder erübrigten Zinsen zu dem in Rede stehenden Zweck verwendet werden können. Z. B. bei vielen Sparkassen*) beginnt der Lauf der Verzinsung von dem 1ten Tage des auf die erfolgte Einlage folgenden Monats, und endigt mit dem letzten Tage desjenigen Monats, welcher der Zurücknahme vorhergeht. Zur Deckung der Verwaltungskosten können ferner die Zinsüberschüsse der ausgeliehenen Sparkassengelder beitragen.

6) Verwendung der Verwaltungsüberschüsse zur Bildung eines Reservefonds, durch welchen mögliche Verluste zu decken sind, und Verwendung der hierzu nicht weiter erforderlichen Gelder im Interesse der Einleger.

7) Befugniß der Einleger, über ihre Ersparnisse zu jeder Zeit verfügen zu können, und Festsetzung kurzer Kündigungsfristen für Summen, welche einen gewissen, zum voraus bestimmten Betrag überschreiten. Zu dem Ende muß die Kasse einen durch Erfahrung zu bestimmenden Theil der Sparkassengelder in der Weise anlegen, welche eine sofortige Verfügung über dieselben möglich macht.

In Beziehung auf Sparvereine modificiren sich obige Bestim-

*) S. Malchus, die Sparkassen in Europa. Darstellung der statutenmäßigen Einrichtungen der großen Mehrzahl von solchen in Europa, mit einer Nachweise des Betrags der in denselben aufgesammelten Ersparnisse (Heidelberg und Leipzig, 1838).

mungen dahin, daß die Mitglieder zu regelmäßigen Zahlungen, welche sie etwa jeden Monat zu machen haben, verbindlich zu machen sind. Hierbei muß ebenfalls ein Minimum und Maximum festgesetzt werden, wobei zur Vereinfachung der Verrechnung weiter verfügt werden kann, daß alle Einlagen, welche weniger als das Minimum betragen, durch letztern ohne Rest theilbar seyn müssen. Ferner ist zur Bestreitung der ersten Einrichtungskosten und als Beitrag zu den Verwaltungskosten den Mitgliedern die Entrichtung eines Eintrittsgeldes aufzuerlegen. Weitere Zuschüsse können durch die Verfügung erübrigt werden, daß die Zinsen von Summen, die weniger als eine als Minimum festgesetzte Zahl betragen, den Einlegern nicht ausgezahlt werden; hierzu dient endlich auch der Bruchkreuzerfonds, welcher aus dem Nichtanrechnen der Zinsen die weniger als ein Kreuzer, Groschen ꝛc. betragen, entsteht. Was endlich die Reservefondsüberschüsse betrifft, so sind solche periodisch nur auf diejenigen Mitglieder nach Verhältniß ihrer Guthaben zu vertheilen, welche schon vor längerer, nach Jahren zu bestimmenden, Zeit dem Vereine begetreten sind.

Tabellen.

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 2.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0200000	35	1.9998895	69	3.9211355
2	1.0404000	36	2.0398873	70	3.9995582
3	1.0612080	37	2.0806850	71	4.0795493
4	1.0824321	38	2.1222987	72	4.1611403
5	1.1040808	39	2.1647447	73	4.2443631
6	1.1261624	40	2.2080396	74	4.3292504
7	1.1486856	41	2.2522004	75	4.4158354
8	1.1716593	42	2.2972444	76	4.5041521
9	1.1950925	43	2.3431893	77	4.5942352
10	1.2189944	44	2.3900531	78	4.6861199
11	1.2433743	45	2.4378542	79	4.7798423
12	1.2682417	46	2.4866112	80	4.8754391
13	1.2936066	47	2.5363435	81	4.9729479
14	1.3194787	48	2.5870703	82	5.0724068
15	1.3458683	49	2.6388117	83	5.1738550
16	1.3727857	50	2.6915880	84	5.2773321
17	1.4002414	51	2.7454197	85	5.3828787
18	1.4282462	52	2.8003281	86	5.4905363
19	1.4568111	53	2.8563347	87	5.6003470
20	1.4859473	54	2.9134614	88	5.7123540
21	1.5156663	55	2.9717306	89	5.8266011
22	1.5459796	56	3.0311652	90	5.9431331
23	1.5768992	57	3.0917885	91	6.0619957
24	1.6084372	58	3.1536243	92	6.1832357
25	1.6406059	59	3.2166968	93	6.3069004
26	1.6734181	60	3.2810307	94	6.4330384
27	1.7068864	61	3.3466514	95	6.5616991
28	1.7410242	62	3.4135844	96	6.6929331
29	1.7758446	63	3.4818561	97	6.8267918
30	1.8113615	64	3.5514932	98	6.9633276
31	1.8475888	65	3.6225231	99	7.1025942
32	1.8845405	66	3.6949735	100	7.2446461
33	1.9222314	67	3.7688730		
34	1.9606760	68	3.8442505		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 2½.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0250000	35	2.3732051	69	5.4947344
2	1.0506250	36	2.4325353	70	5.6321028
3	1.0768906	37	2.4933486	71	5.7729054
4	1.1038128	38	2.5556824	72	5.9172280
5	1.1314082	39	2.6195744	73	6.0651587
6	1.1596934	40	2.6850638	74	6.2167877
7	1.1886857	41	2.7521904	75	6.3722074
8	1.2184028	42	2.8209951	76	6.5315126
9	1.2488629	43	2.8915200	77	6.6948004
10	1.2800845	44	2.9638080	78	6.8621704
11	1.3120866	45	3.0379032	79	7.0337246
12	1.3448888	46	3.1138508	80	7.2095678
13	1.3785110	47	3.1916971	81	7.3898070
14	1.4129738	48	3.2714895	82	7.5745521
15	1.4482981	49	3.3532768	83	7.7639159
16	1.4845056	50	3.4371087	84	7.9580138
17	1.5216182	51	3.5230364	85	8.1569642
18	1.5596587	52	3.6111123	86	8.3608883
19	1.5986501	53	3.7013901	87	8.5699105
20	1.6386164	54	3.7939249	88	8.7841583
21	1.6795818	55	3.8887730	89	9.0037622
22	1.7215713	56	3.9859923	90	9.2288563
23	1.7646106	57	4.0856421	91	9.4595777
24	1.8087259	58	4.1877832	92	9.6960671
25	1.8539440	59	4.2924778	93	9.9384688
26	1.9002927	60	4.3997897	94	10.1869305
27	1.9478000	61	4.5097844	95	10.4416038
28	1.9964950	62	4.6225291	96	10.7026439
29	2.0464073	63	4.7380923	97	10.9702100
30	2.0975675	64	4.8565446	98	11.2444652
31	2.1500067	65	4.9779582	99	11.5255769
32	2.2037569	66	5.1024072	100	11.8137163
33	2.2588508	67	5.2299673		
34	2.3153221	68	5.3607165		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 3.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0300000	35	2.8138624	69	7.6872057
2	1.0609000	36	2.8982783	70	7.9178219
3	1.0927270	37	2.9852266	71	8.1553565
4	1.1255088	38	3.0747834	72	8.4000172
5	1.1592740	39	3.1670269	73	8.6520177
6	1.1940522	40	3.2620377	74	8.9115783
7	1.2298738	41	3.3598989	75	9.1789256
8	1.2667700	42	3.4606958	76	9.4542934
9	1.3047731	43	3.5645167	77	9.7379222
10	1.3439163	44	3.6714522	78	10.0300599
11	1.3842338	45	3.7815958	79	10.3309617
12	1.4257608	46	3.8950437	80	10.6408905
13	1.4685337	47	4.0118950	81	10.9601172
14	1.5125897	48	4.1322518	82	11.2889207
15	1.5579674	49	4.2562194	83	11.6275884
16	1.6047064	50	4.3839060	84	11.9764160
17	1.6528476	51	4.5154231	85	12.3357085
18	1.7024330	52	4.6508858	86	12.7057798
19	1.7535060	53	4.7904124	87	13.0869532
20	1.8061112	54	4.9341248	88	13.4795617
21	1.8602945	55	5.0821485	89	13.8839486
22	1.9161034	56	5.2346130	90	14.3004671
23	1.9735865	57	5.3916514	91	14.7294811
24	2.0327941	58	5.5534009	92	15.1713655
25	2.0937779	59	5.7200030	93	15.6265065
26	2.1565912	60	5.8916031	94	16.0953017
27	2.2212890	61	6.0683511	95	16.5781607
28	2.2879276	62	6.2504017	96	17.0755055
29	2.3565655	63	6.4379137	97	17.5877707
30	2.4272624	64	6.6310511	98	18.1154038
31	2.5000803	65	6.8299827	99	18.6588660
32	2.5750827	66	7.0348822	100	19.2186319
33	2.6523352	67	7.2459286		
34	2.7319052	68	7.4633065		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 3½.

Jahre.	Werth.	Jahre	Werth.	Jahre.	Werth
1	1.0350000	35	3.3335904	69	10.737029?
2	1.0712250	36	3.4502661	70	11.1128252
3	1.1087178	37	3.5710254	71	11.5017741
4	1.1475230	38	3.6960113	72	11.9043362
5	1.1876863	39	3.8253717	73	12.3209880
6	1.2292553	40	3.9592597	74	12.7522225
7	1.2722792	41	4.0978338	75	13.1985503
8	1.3168090	42	4.2412579	76	13.6604996
9	1.3628973	43	4.3897020	77	14.1386171
10	1.4105087	44	4.5433415	78	14.6334687
11	1.4599697	45	4.7023585	79	15.1456401
12	1.5110686	46	4.8669411	80	15.6757375
13	1.5639560	47	5.0372810	81	16.2243883
14	1.6186945	48	5.2135889	82	16.7922419
15	1.6753488	49	5.3960645	83	17.3799704
16	1.7339860	50	5.5849268	84	17.9882693
17	1.7946755	51	5.7803992	85	18.6178588
18	1.8574891	52	5.9827132	86	19.2694838
19	1.9225013	53	6.1921082	87	19.9439158
20	1.9897888	54	6.4088320	88	20.6419528
21	2.0594314	55	6.6331411	89	21.3644212
22	2.1315115	56	6.8653010	90	22.1121759
23	2.2061144	57	7.1055866	91	22.8861021
24	2.2833284	58	7.3542821	92	23.6871156
25	2.3632449	59	7.6116820	93	24.5161647
26	2.4459585	60	7.8780909	94	25.3742304
27	2.5315671	61	8.1538240	95	26.2623285
28	2.6201719	62	8.4392079	96	27.1815100
29	2.7118779	63	8.7345802	97	28.1328629
30	2.8067937	64	9.0402905	98	29.1175131
31	2.9050314	65	9.3567006	99	30.1366260
32	3.0067075	66	9.6841852	100	31.1914079
33	3.1119423	67	10.0231316		
34	3.2208603	68	10.3739412		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 4.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0400000	35	3.9460889	69	14.9727099
2	1.0816000	36	4.1039325	70	15.5716183
3	1.1248640	37	4.2680898	71	16.1944830
4	1.1698585	38	4.4388134	72	16.8422624
5	1.2166529	39	4.6163659	73	17.5159529
6	1.2653190	40	4.8010206	74	18.2165910
7	1.3159317	41	4.9930614	75	18.9452546
8	1.3685690	42	5.1927839	76	19.7030648
9	1.4233118	43	5.4004952	77	20.4911874
10	1.4802442	44	5.6165150	78	21.3108349
11	1.5394540	45	5.8411756	79	22.1632683
12	1.6010322	46	6.0748227	80	23.0497990
13	1.6650735	47	6.3178156	81	23.9717910
14	1.7316764	48	6.5705282	82	24.9306626
15	1.8009435	49	6.8333493	83	25.9278891
16	1.8729812	50	7.1066833	84	26.9650047
17	1.9479004	51	7.3909506	85	28.0436049
18	2.0258165	52	7.6865887	86	29.1653491
19	2.1068491	53	7.9940522	87	30.3319631
20	2.1911231	54	8.3138143	88	31.5452416
21	2.2787680	55	8.6463669	89	32.8070512
22	2.3699187	56	8.9922215	90	34.1193333
23	2.4647155	57	9.3519104	91	35.4841066
24	2.5633041	58	9.7259868	92	36.9034709
25	2.6658363	59	10.1150263	93	38.3796097
26	2.7724697	60	10.5196274	94	39.9147941
27	2.8833685	61	10.9404125	95	41.5113856
28	2.9987033	62	11.3780290	96	43.1718413
29	3.1186514	63	11.8331501	97	44.8987150
30	3.2433975	64	12.3064761	98	46.6946636
31	3.3731334	65	12.7987352	99	48.5624501
32	3.5080587	66	13.3106846	100	50.5049481
33	3.6483810	67	13.8431120		
34	3.7943163	68	14.3968364		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zuſammengeſetzten Zinſen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 4½.

Jahre.	Werth.	Jahre	Werth.	Jahre	Werth.
1	1.0450000	35	4.6673478	69	20.8460627
2	1.0920250	36	4.8773784	70	21.7841355
3	1.1411661	37	5.0968604	71	22.7644216
4	1.1925186	38	5.3262192	72	23.7888206
5	1.2461819	39	5.5658990	73	24.8593175
6	1.3022601	40	5.8163645	74	25.9779868
7	1.3608618	41	6.0781009	75	27.1469962
8	1.4221006	42	6.3516154	76	28.3686111
9	1.4860951	43	6.6374381	77	29.6451986
10	1.5529694	44	6.9361228	78	30.9792325
11	1.6228530	45	7.2482484	79	32.3732980
12	1.6958814	46	7.5744196	80	33.8300964
13	1.7721960	47	7.9152684	81	35.3524507
14	1.8519449	48	8.2714555	82	36.9433110
15	1.9352824	49	8.6436710	83	38.6057600
16	2.0223701	50	9.0326362	84	40.3430192
17	2.1133768	51	9.4391049	85	42.1584551
18	2.2084787	52	9.8638646	86	44.0555856
19	2.3078603	53	10.3077385	87	46.0380869
20	2.4117140	54	10.7715867	88	48.1098008
21	2.5202411	55	11.2563081	89	50.2747419
22	2.6336520	56	11.7628420	90	52.5371052
23	2.7521663	57	12.2921699	91	54.9012750
24	2.8760138	58	12.8453175	92	57.3718324
25	3.0054344	59	13.4233568	93	59.9535648
26	3.1406790	60	14.0274079	94	62.6514752
27	3.2820095	61	14.6586412	95	65.4707916
28	3.4296999	62	15.3182801	96	68.4169772
29	3.5840364	63	16.0076027	97	71.4957412
30	3.7453181	64	16.7279448	98	74.7130496
31	3.9138574	65	17.4807023	99	78.0751368
32	4.0899810	66	18.2673340	100	81.5885180
33	4.2740301	67	19.0893640		
34	4.4663615	68	19.9483854		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 5.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0500000	35	5.5160153	69	28.9775481
2	1.1025000	36	5.7918161	70	30.4264255
3	1.1576250	37	6.0814069	71	31.9477468
4	1.2155062	38	6.3854772	72	33.5451341
5	1.2762815	39	6.7047511	73	35.2223908
6	1.3400956	40	7.0399887	74	36.9835104
7	1.4071004	41	7.3919881	75	38.8326859
8	1.4774554	42	7.7615875	76	40.7743202
9	1.5513282	43	8.1496669	77	42.8130362
10	1.6288946	44	8.5571502	78	44.9536880
11	1.7103393	45	8.9850077	79	47.2013724
12	1.7958563	46	9.4342581	80	49.5614410
13	1.8856491	47	9.9059710	81	52.0395131
14	1.9799315	48	10.4012696	82	54.6414887
15	2.0789281	49	10.9213331	83	57.3735632
16	2.1828745	50	11.4673997	84	60.2422413
17	2.2920183	51	12.0407697	85	63.2543534
18	2.4066192	52	12.6428082	86	66.4170711
19	2.5269501	53	13.2749486	87	69.7379246
20	2.6532977	54	13.9386961	88	73.2248209
21	2.7859625	55	14.6356309	89	76.8860619
22	2.9252607	56	15.3674124	90	80.7303650
23	3.0715237	57	16.1357830	91	84.7668833
24	3.2250999	58	16.9425722	92	89.0052274
25	3.3863549	59	17.7897008	93	93.4554888
26	3.5556726	60	18.6791858	94	98.1282632
27	3.7334563	61	19.6131451	95	103.0346764
28	3.9201291	62	20.5938024	96	108.1864102
29	4.1161355	63	21.6234925	97	113.5957307
30	4.3219423	64	22.7046671	98	119.2755173
31	4.5380394	65	23.8399005	99	125.2392931
32	4.7649414	66	25.0318955	100	131.5012578
33	5.0031885	67	26.2834903		
34	5.2533479	68	27.5976648		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 5½.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0550000	35	6.5138250	69	40.2179300
2	1.1130250	36	6.8720853	70	42.4299162
3	1.1742413	37	7.2500500	71	44.7635616
4	1.2388246	38	7.6488028	72	47.2255575
5	1.3069600	39	8.0694869	73	49.8229631
6	1.3788428	40	8.5133087	74	52.5632261
7	1.4546791	41	8.9815407	75	55.4542035
8	1.5346865	42	9.4755254	76	58.5041847
9	1.6190942	43	9.9966794	77	61.7219149
10	1.7081444	44	10.5464967	78	65.1166202
11	1.8020924	45	11.1265540	79	68.6980343
12	1.9012074	46	11.7385145	80	72.4764262
13	2.0057738	47	12.3841328	81	76.4626297
14	2.1160914	48	13.0652601	82	80.6680743
15	2.2324764	49	13.7838494	83	85.1048184
16	2.3552626	50	14.5419612	84	89.7855834
17	2.4848021	51	15.3417690	85	94.7237905
18	2.6214662	52	16.1855663	86	99.9335990
19	2.7656469	53	17.0757725	87	105.4299469
20	2.9177574	54	18.0149400	88	111.2285940
21	3.0782341	55	19.0057617	89	117.3461667
22	3.2475370	56	20.0510786	90	123.8002059
23	3.4261515	57	21.1538879	91	130.6092172
24	3.6145899	58	22.3173517	92	137.7927241
25	3.8133923	59	23.5448061	93	145.3713240
26	4.0231289	60	24.8397704	94	153.3667468
27	4.2444010	61	26.2059578	95	161.8019179
28	4.4778430	62	27.6472855	96	170.7010233
29	4.7241244	63	29.1678862	97	180.0895796
30	4.9839512	64	30.7721199	98	189.9945065
31	5.2580686	65	32.4645865	99	200.4442044
32	5.5472623	66	34.2501388	100	211.4686356
33	5.8523618	67	36.1338964		
34	6.1742417	68	38.1212607		

I.

Künftiger Werth vom Kapital 1 bei zusammengesetzten Zinsen nach 1, 2, 3, 4 . . . . . 100 Jahren zum Zinsfuß 6.

Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.	Jahre.	Werth.
1	1.0600000	35	7.6860867	69	55.7320096
2	1.1236000	36	8.1472520	70	59.0759301
3	1.1910160	37	8.6360871	71	62.6204859
4	1.2624769	38	9.1542523	72	66.3777151
5	1.3382255	39	9.7035074	73	70.3603780
6	1.4185191	40	10.2857179	74	74.5820007
7	1.5036302	41	10.9028610	75	79.0569207
8	1.5938480	42	11.5570326	76	83.8003360
9	1.6894789	43	12,2504546	77	88.8283561
10	1.7908476	44	12.9854819	78	94.1580575
11	1.8982985	45	13.7646108	79	99.8075410
12	2.0121964	46	14.5904874	80	105.7959934
13	2.1329282	47	15.4659167	81	112.1437530
14	2.2609039	48	16.3938717	82	118.8723782
15	2.3965581	49	17.3775040	83	126.0047209
16	2.5403516	50	18.4201542	84	133.5650042
17	2.6927727	51	19.5253635	85	141.5789044
18	2.8543391	52	20.6968853	86	150.0736387
19	3.0255995	53	21.9386984	87	159.0780570
20	3.2071354	54	23.2550203	88	168.6227405
21	3.3995636	55	24.6503215	89	178.7401049
22	3.6035374	56	26.1293408	90	189.4645112
23	3.8197496	57	27.6971013	91	200.8323819
24	4.0489346	58	29,3589274	92	212.8823248
25	4.2918707	59	31.1204630	93	225.6552643
26	4.5493829	60	32.9876908	94	239.1945801
27	4.8223459	61	34.9669523	95	253.5462549
28	5.1116866	62	37.0649694	96	268.7590302
29	5.4183878	63	39.2888676	97	284.8845720
30	5.7434911	64	41.6461996	98	301.9776464
31	6.0881006	65	44.1449716	99	320.0963052
32	6.4533866	66	46.7936699	100	339.3020835
33	6.8405898	67	49.6012901		
34	7.2510252	68	52.5773675		

II.

Gegenwärtiger Werth der Rente 1 auf 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahre.

Jahre.	Zu 3 Proc.	Zu 4 Proc.	Zu 5 Proc.	Zu 6 Proc.
1	0.9708737	0.9615384	0.9523809	0.9433962
2	1.9134696	1.8860946	1.8594104	1.8333926
3	2.8286113	2.7750910	2.7232480	2.6730119
4	3.7170984	3.6298952	3.5459505	3.4651056
5	4.5797071	4.4518223	4.3294766	4.2123637
6	5.4171914	5.2421368	5.0756920	4.9173243
7	6.2302829	6.0020546	5.7863733	5.5823814
8	7.0196921	6.7327448	6.4632127	6.2097938
9	7.7861089	7.4353316	7.1078216	6.8016922
10	8.5302028	8.1108957	7.7217349	7.3600870
11	9.2526241	8.7604767	8.3064142	7.8868745
12	9.9540039	9.3850737	8.8632516	8.3838439
13	10.6349553	9.9856478	9.3935729	8.8526829
14	11.2960731	10.5631229	9.8986409	9.2949839
15	11.9379350	11.1183874	10.3796580	9.7122489
16	12.5611020	11.6522956	10.8377695	10.1058952
17	13.1661184	12.1656688	11.2740662	10.4772596
18	13.7535130	12.6592969	11.6895869	10.8276034
19	14.3237991	13.1339393	12.0853208	11.1581164
20	14.8774748	13.5903263	12.4622103	11.4699212
21	15.4150241	14.0291599	12.8211527	11.7640766
22	15.9369166	14.4511153	13.1630025	12.0415817
23	16.4436083	14.8568416	13.4885738	12.3033789
24	16.9355421	15.2469631	13.7986417	12.5503575
25	17.4131476	15.6220799	14.0939145	12.7833561
26	17.8768424	15.9827691	14.3751853	13.0031661
27	18.3270314	16.3295857	14.6430336	13.2105341
28	18.7641082	16.6630632	14.8981272	13.4061642
29	19.1884545	16.9837146	15.1410735	13.5907210
30	19.6004413	17.2920333	15.3724510	13.7648311
31	20.0004284	17.5884935	15.5928105	13.9290859
32	20.3887655	17.8735514	15.8026766	14.0840433
33	20.7657917	18.1476456	16.0025492	14.2302296
34	21.1318366	18.4111977	16.1929040	13.3681411

II.

Gegenwärtiger Werth der Rente 1 auf 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahre.

Jahre.	Zu 3 Proc.	Zu 4 Proc.	Zu 5 Proc.	Zu 6 Proc.
35	21.4872200	18.6646132	16.3741942	14.4982463
36	21.8322524	18.9082819	16.5468517	14.6209871
37	22.1672354	19.1425788	16.7112873	14.7367803
38	22.4924614	19.3678642	16.8678927	14.8460191
39	22.8082151	19.5844848	17.0170406	14.9490746
40	23.1147719	19.7927738	17.1590863	15.0462968
41	23.4123999	19.9930518	17.2943679	15.1380159
42	23.7013591	20.1856267	17.4232075	15.2245433
43	23.9819021	20.3707949	17.5459119	15.3061729
44	24.2542739	20.5488412	17.6627733	15.3831820
45	24.5187125	20.7200397	17.7740698	15.4558320
46	24.7754490	20.8846535	17.8800664	15.5243699
47	25.0247078	21 0429361	17.9810157	15.5890282
48	25.2667066	21.1951308	18.0771578	15.6500266
49	25 5016569	21.3414720	18.1687217	15.7075722
50	25.7297640	21 4821846	18.2559254	15.7618606
51	25.9512271	21.6174852	18.3389766	15.8130760
52	26.1662399	21 7475819	18.4180729	15.8613925
53	26.3749902	21.8726749	18.4934028	15.9069740
54	26.5776604	21.9929566	18.5651455	15.9499755
55	26.7744276	22.1086121	18.6334719	15.9905429
56	26.9654637	22.2198194	18.6985447	16.0288141
57	27.1509356	22.3267494	18 7605187	16.0649189
58	27.3310054	22.4295667	18.8195417	16 0989801
59	27.5058305	22.5284295	18.8757540	16.1311133
60	27 6755636	22.6234899	18.9292895	16 1614277
61	27.8403530	22.7148942	18.9802757	16.1900261
62	28.0003427	22.8027828	19.0288340	16.2170057
63	28 1556726	22.8872912	19.0750800	16.2424582
64	28.3064782	22 9685492	19.1191238	16 2664700
65	28.4528915	23.0466819	19.1610703	16.2891227
66	28.5950403	23.1218096	19.3010193	16 3104931
67	28.7330488	23 1940476	19.2390660	16.3306539
68	28.8670377	23 2635074	19.2753010	16.3496734

II.

Gegenwärtiger Werth der Rente 1 auf 1, 2, 3, 4 . . . . 100 Jahre.

Jahre.	Zu 3 Proc.	Zu 4 Proc.	Zu 5 Proc.	Zu 6 Proc.
69	28.9971239	23.3302955	19.3098104	16.3676165
70	29.1234213	23.3945149	19.3426766	16 3815438
71	29 2460401	23,4562644	19.3739777	16.4005130
72	29.3650875	23.5156388	19.4037883	16.4155783
73	29.4806674	23.5727296	19.4321793	16.4297909
74	29.5928810	23 6276246	19.4592184	16.4431989
75	29.7018262	23.6804083	19.4849699	16.4558181
76	29.8075983	23.7311618	19.5094951	16.4677812
77	29.9102896	23.7799633	19.5328525	16.4790388
78	30.0099899	23.8268878	19.5550976	16.4896593
79	30 1067863	23.8720075	19.5762835	16.4996786
80	30.2007634	23.9153918	19.5964604	16.5091307
81	30.2920033	23.9571075	19.6156766	16.5180478
82	30 3805857	23.9972187	19.6339777	16.5264602
83	30.4665881	24.0357873	19.6514073	16.5343964
84	30.5500855	24.0728724	19.6680070	16.5418834
85	30 6311510	24.1085311	19.6838162	16.5489466
86	30.7098553	24.1428184	19.6988725	16.5556100
87	30.7862673	24.1757869	19.7132119	16.5618962
88	30.8604537	24.2074874	19.7268685	16 5678266
89	30 9324793	24.2379686	19.7398748	16.5734214
90	31.0024071	24.2672775	19.7522617	16 5786994
91	31.0702981	24 2954592	19.7640588	16.5836787
92	31.1362118	24.3225569	19.7752940	16.5883761
93	31 2002056	24.3486124	19.7859943	16.5928076
94	31.2623356	24.3736658	19.7961851	16.5969883
95	31.3226559	24.3977555	19.8058905	16.6009324
96	31 3812193	24.4209188	19.8151338	16.6046532
97	31.4380770	24.4431911	19.8239370	16 6081634
98	31.4932786	24.4646069	19.8323209	16.6114749
99	31 5468724	24.4851989	19.8403057	16.6145990
100	31.5989053	24.5049989	19.8479102	16.6175462

III.

Geſetz der Sterblichkeit nach den Beobachtungen der Equitable-Geſellſchaft in London.

Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.
10	6460	25	40	5117	62	70	2487	109
11	6435	26	41	5055	62	71	2378	109
12	6409	28	42	4993	62	72	2269	110
13	6381	30	43	4931	62	73	2159	110
14	6351	31	44	4869	63	74	2049	111
15	6320	32	45	4806	64	75	1938	111
16	6288	33	46	4742	67	76	1827	112
17	6255	34	47	4675	70	77	1715	115
18	6221	35	48	4605	73	78	1600	119
19	6186	36	49	4532	77	79	1481	124
20	6150	37	50	4455	80	80	1357	138
21	6113	38	51	4375	82	81	1219	150
22	6075	40	52	4293	85	82	1069	146
23	6035	42	53	4208	88	83	923	140
24	5993	44	54	4120	90	84	783	132
25	5949	46	55	4030	93	85	651	124
26	5903	48	56	3937	96	86	527	114
27	5855	50	57	3841	98	87	413	98
28	5805	51	58	3743	100	88	315	80
29	5754	52	59	3643	101	89	235	65
30	5702	53	60	3542	102	90	170	50
31	5649	54	61	3440	103	91	120	36
32	5595	55	62	3337	103	92	84	28
33	5540	57	63	3234	104	93	56	24
34	5483	59	64	3130	106	94	35	15
35	5424	60	65	3024	106	95	20	10
36	5364	61	66	2918	107	96	10	6
37	5303	62	67	2811	107	97	4	3
38	5241	62	68	2704	108	98	1	1
39	5179	62	69	2596	109	99	0	

IV.

Geſetz der Sterblichkeit nach den Beobachtungen von Deparcieux.

Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.
3	1000	30	34	702	8	65	395	15
4	970	22	35	694	8	66	380	16
5	948	18	36	686	8	67	364	17
6	930	15	37	678	7	68	347	18
7	915	13	38	671	7	69	329	19
8	902	12	39	664	7	70	310	19
9	890	10	40	657	7	71	291	20
10	880	8	41	650	7	72	271	20
11	872	6	42	643	7	73	251	20
12	866	6	43	636	7	74	231	20
13	860	6	44	629	7	75	211	19
14	854	6	45	622	7	76	192	19
15	848	6	46	615	8	77	173	19
16	842	7	47	607	8	78	154	18
17	835	7	48	599	9	79	136	18
18	828	7	49	590	9	80	118	17
19	821	7	50	581	10	81	101	16
20	814	8	51	571	11	82	85	14
21	806	8	52	560	11	83	71	12
22	798	8	53	549	11	84	59	11
23	790	8	54	538	12	85	48	10
24	782	8	55	526	12	86	38	9
25	774	8	56	514	12	87	29	7
26	766	8	57	502	13	88	22	6
27	758	8	58	489	13	89	16	5
28	750	8	59	476	13	90	11	4
29	742	8	60	463	13	91	7	3
30	734	8	61	450	13	92	4	2
31	726	8	62	437	14	93	2	1
32	718	8	63	423	14	94	1	1
33	710	8	64	409	14			

V.

Gesetz der Sterblichkeit nach den Beobachtungen von Kerseboom.

Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.
0	1400	275	32	687	12	64	329	14
1	1125	50	33	675	10	65	315	14
2	1075	45	34	665	10	66	301	14
3	1030	37	35	655	10	67	287	14
4	993	29	36	645	10	68	273	14
5	964	17	37	635	10	69	259	14
6	947	17	38	625	10	70	245	14
7	930	17	39	615	10	71	231	14
8	913	9	40	605	9	72	217	14
9	904	9	41	596	9	73	203	14
10	895	9	42	587	9	74	189	14
11	886	8	43	578	9	75	175	15
12	878	8	44	569	9	76	160	15
13	870	7	45	560	10	77	145	15
14	863	7	46	550	10	78	130	15
15	856	7	47	540	10	79	115	15
16	849	7	48	530	12	80	100	13
17	842	7	49	518	11	81	87	12
18	835	9	50	507	12	82	75	11
19	826	9	51	495	13	83	64	9
20	817	9	52	482	12	84	55	10
21	808	8	53	470	12	85	45	9
22	800	8	54	458	12	86	36	8
23	792	9	55	446	12	87	28	7
24	783	11	56	434	13	88	21	6
25	772	12	57	421	13	89	15	5
26	760	13	58	408	13	90	10	3
27	747	12	59	395	13	91	7	2
28	735	12	60	382	13	92	5	2
29	723	12	61	369	13	93	3	1
30	711	12	92	356	13	94	2	1
31	699	12	63	343	14	95	1	1

VI.

Geſetz der Sterblichkeit nach den Beobachtungen von Finlaiſon.

Alter.	Lebende männlichen Geſchlechts.	Lebende weiblichen Geſchlechts.	Alter.	Lebende männlichen Geſchlechts.	Lebende weiblichen Geſchlechts.	Alter.	Lebende männlichen Geſchlechts.	Lebende weiblichen Geſchlechts.
0	1000	1000	34	696	748	68	322	443
1	981	981	35	687	740	69	305	428
2	963	967	36	679	732	70	288	412
3	949	955	37	670	724	71	270	395
4	937	945	38	662	716	72	253	377
5	927	935	39	653	708	73	235	358
6	919	926	40	644	700	74	218	339
7	912	919	41	636	693	75	202	319
8	906	913	42	627	685	76	185	298
9	901	908	43	619	677	77	171	277
10	896	903	44	610	669	78	156	255
11	891	899	45	602	661	79	141	233
12	886	895	46	594	654	80	125	210
13	881	892	47	586	646	81	110	189
14	876	887	48	578	638	82	95	168
15	872	883	49	570	631	83	81	149
16	866	876	50	561	623	84	68	132
17	860	870	51	552	616	85	56	117
18	854	863	52	542	608	86	44	103
19	846	856	53	531	601	87	34	89
20	837	848	54	520	593	88	24	76
21	827	841	55	508	585	89	17	64
22	816	834	56	495	576	90	11	52
23	804	827	57	482	568	91	7	41
24	793	820	58	468	559	92	4	30
25	782	813	59	454	549	93	3	21
26	771	805	60	440	539	94	1	14
27	761	798	61	426	529	95		8
28	751	791	62	413	519	96		5
29	742	784	63	399	508	97		2
30	732	777	64	385	496	98		1
31	723	770	65	370	484			
32	714	763	66	355	471			
33	705	755	67	339	457			

VII.

Kritters Sterblichkeitstabelle für beide Geschlechter nebst Angabe der mittleren Lebensdauer.

Für Ehemänner.				Für Ehefrauen u. Wittwen.		
Alter.	Lebende im Anfang des Jahres.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.	Lebende im Anfang des Jahres.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.
20	496	5	36	496	5	37,3
21	491	5	35,4	491	5	36,6
22	486	5	34,7	486	5	35,9
23	481	5	34,1	481	5	35,3
24	476	5	33,4	476	5	34,7
25	471	5	32,8	471	5	34,1
26	466	5	32,1	466	5	33,4
27	461	5	31,5	461	5	32,7
28	456	5	30,8	456	5	32,1
29	451	5	30,1	451	5	31,5
30	446	6	29,4	446	6	30,8
31	440	6	28,8	440	6	30,2
32	434	6	28,2	434	6	29,6
33	428	6	27,6	428	6	29
34	422	6	27	422	6	28,4
35	416	6	26,4	416	6	27,8
36	410	6	25,8	410	6	27,2
37	404	6	25,2	404	6	26,6
38	398	6	24,6	398	6	26
39	392	7	24	392	7	25,4
40	385	7	23,3	385	7	24,9
41	378	7	22,7	378	7	24,3
42	371	7	22,1	371	7	23,7
43	364	7	21,5	364	7	23,1
44	357	7	20,9	357	7	22,5
45	350	8	20,3	350	7	22
46	342	8	19,7	343	7	21,4
47	334	8	19,1	336	7	20,8

VII.

Kritters Sterblichkeitstabelle für beide Geschlechter nebst Angabe der mittleren Lebensdauer.

Für Ehemänner.				Für Ehefrauen u. Wittwen.		
Alter.	Lebende im Anfang des Jahres.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.	Lebende im Anfang des Jahres.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.
48	326	8	18,6	329	7	20,3
49	318	8	18	322	7	19,7
50	310	9	17,5	315	7	19,1
51	301	9	16,9	308	7	18,5
52	292	9	16,4	301	7	17,9
53	283	9	15,9	294	7	17,3
54	274	9	15,4	287	7	16,7
55	265	10	14,9	280	8	16,2
56	255	10	14,4	272	8	15,6
57	245	10	14	264	8	15
58	235	10	13,5	256	8	14,5
59	225	10	13,1	248	8	14
60	215	10	12,7	240	9	13,4
61	205	10	12,2	231	10	12,9
62	195	10	11,8	221	10	12,4
63	185	10	11,4	211	10	11,9
64	175	9	11	201	10	11,4
65	166	9	10,6	191	10	11
66	157	9	10,1	181	10	10,5
67	148	9	9,7	171	10	10,1
68	139	9	9,2	161	10	9,7
69	130	9	8,8	151	10	9,3
70	121	9	8,4	141	10	8,9
71	112	9	8	131	9	8,4
72	103	8	7,4	122	9	7,9
73	95	8	7	113	9	7,5
74	87	8	6,6	104	9	7,1
75	79	8	6,2	95	9	6,7

VII.

Kritters Sterblichkeitstabelle für beide Geschlechter nebst Angabe der mittleren Lebensdauer.

Für Ehemänner.				Für Ehefrauen u. Wittwen.		
Alter.	Lebende im Anfang des Jhares.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.	Lebende im Anfang des Jahres.	Gestorbene.	Mittlere Lebensdauer.
76	71	8	6	86	9	6,3
77	63	8	5,7	77	9	6
78	55	8	5,4	68	9	5,8
79	47	8	5,1	59	9	5,4
80	39	7	4,8	50	8	5
81	32	6	4,7	42	8	5
82	26	5	4,5	34	7	5
83	21	4	4,3	27	6	5
84	17	3	4,2	21	5	5
85	14	3	3,9	16	4	5
86	11	2	3,6	12	3	5,3
87	9	2	3,2	9	2	6
88	7	2	2,9	7	1	6
89	5	2	2,6	6	1	6
90	3	1	2,6	5	0	6
91	2	1	2,5	5	0	5
92	1	0	3	5	0	4
93	1	0	2	5	1	3
94	1	1	1	4	1	2,5
95				3	1	2
96				2	1	1,5
97				1	1	1
98				0	0	

VIII.

Gesetz der Sterblichkeit nach den Erfahrungen über Frauen der preuß. allgemeinen Wittwen-Verpflegungsanstalt.

Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.
15	10809	181	49	6974	105	83	693	126
16	10628	171	50	6869	107	84	567	114
17	10457	161	51	6762	110	85	453	97
18	10296	152	52	6652	115	86	356	79
19	10144	144	53	6537	121	87	277	62
20	10000	137	54	6416	127	88	215	49
21	9863	131	55	6389	134	89	166	39
22	9732	125	56	6155	141	90	127	31
23	9607	119	57	6014	149	91	96	24
24	9488	114	58	5865	157	92	72	19
25	9374	110	59	5708	165	93	53	15
26	9264	106	60	5543	173	94	38	12
27	9158	103	61	5370	181	95	26	9
28	9055	101	62	5189	189	96	17	7
29	8954	100	63	5000	197	97	10	5
30	8854	100	64	4803	205	98	5	3
31	8754	100	65	4598	213	99	2	
32	8654	100	66	4385	222			
33	8554	100	67	4163	231			
34	8454	99	68	3932	238			
35	8355	99	69	3694	242			
36	8256	98	70	3452	244			
37	8158	98	71	3208	245			
38	8060	98	72	2963	246			
39	7962	97	73	2717	246			
40	7865	97	74	2471	245			
41	7768	97	75	2226	242			
42	7671	98	76	1984	236			
43	7573	98	77	1748	224			
44	7475	98	78	1524	206			
45	7377	99	79	1318	184			
46	7278	100	80	1134	162			
47	7178	101	81	972	145			
48	7077	103	82	827	134			

IX.

Gesetz der Sterblichkeit nach den zu Northampton gemachten Beobachtungen.

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	11650	26	4685	55	2448	84	234
3 M.	10310	27	4610	56	2366	85	186
6	9756	28	4535	57	2284	86	145
9	9203	29	4460	58	2202	87	111
1 J.	8650	30	4385	59	2120	88	83
2	7283	31	4310	60	2038	89	62
3	6781	32	4235	61	1956	90	46
4	6446	33	4160	62	1874	91	34
5	6249	34	4085	63	1793	92	24
6	6065	35	4010	64	1712	93	16
7	5925	36	3935	65	1632	94	9
8	5815	37	3860	66	1552	95	4
9	5735	38	3785	67	1472	96	1
10	5675	39	3710	68	1392		
11	5623	40	3635	69	1312		
12	5573	41	3559	70	1232		
13	5523	42	3482	71	1152		
14	5473	43	3404	72	1072		
15	5423	44	3326	73	992		
16	5373	45	3248	74	912		
17	5320	46	3170	75	832		
18	5262	47	3092	76	752		
19	5199	48	3014	77	675		
20	5132	49	2936	78	602		
21	5060	50	2857	79	544		
22	4985	51	2776	80	469		
23	4910	52	2694	81	406		
24	4835	53	2612	82	346		
25	4760	54	2530	83	289		

X.

Simpson's Sterblichkeitstabelle für London.

Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.
0	1000	320	40	229	7
1	680	133	41	222	8
2	547	51	42	214	8
3	496	27	43	206	7
4	469	17	44	199	7
5	452	12	45	192	7
6	440	10	46	185	7
7	430	8	47	178	7
8	422	7	48	171	6
9	415	5	49	165	6
10	410	5	50	159	6
11	405	5	51	153	6
12	400	5	52	147	6
13	395	5	53	141	6
14	390	5	54	135	6
15	385	5	55	129	6
16	380	5	56	123	6
17	375	5	57	117	5
18	370	5	58	112	5
19	365	5	59	107	5
20	360	5	60	102	5
21	355	5	61	97	5
22	350	5	62	92	5
23	345	6	63	87	5
24	339	6	64	82	5
25	333	6	65	77	5
26	327	6	66	72	5
27	321	6	67	67	5
28	315	7	68	62	4
29	308	7	69	58	4
30	301	7	70	54	4
31	294	7	71	50	4
32	287	7	72	46	4
33	280	7	73	42	3
34	273	7	74	39	3
35	266	7	75	36	3
36	259	7	76	33	3
37	252	7	77	30	3
38	245	8	78	27	2
39	237	8	79	25	

XI.

Heysham's Sterblichkeitstabelle nach den zu Carlisle gemachten Beobachtungen.

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	10000	26	5836	57	3924	88	232
1 M.	9467	27	5793	58	3842	89	181
2	9313	28	5748	59	3749	90	142
3	9226	29	5698	60	3643	91	105
6	8970	30	5642	61	3521	92	75
9	8715	31	5585	62	3395	93	54
1 J.	8461	32	5528	63	3268	94	40
2	7779	33	5472	64	3143	95	30
3	7274	34	5417	65	3018	96	23
4	6998	35	5362	66	2894	97	18
5	6797	36	5307	67	2771	98	14
6	6676	37	5251	68	2648	99	11
7	6594	38	5194	69	2525	100	9
8	6536	39	5136	70	2401	101	7
9	6493	40	5075	71	2277	102	5
10	6460	41	5009	72	2143	103	3
11	6431	42	4940	73	1997	104	1
12	6400	43	4869	74	1841		
13	6368	44	4798	75	1675		
14	6335	45	4727	76	1515		
15	6300	46	4657	77	1359		
16	6261	47	4588	78	1213		
17	6219	48	4521	79	1081		
18	6176	49	4458	80	953		
19	6133	50	4397	81	837		
20	6090	51	4338	82	725		
21	6047	52	4276	83	623		
22	6005	53	4211	84	529		
23	5963	54	4143	85	445		
24	5921	55	4073	86	367		
25	5879	56	4000	87	296		

XII.

Baumann's Sterblichkeitstabelle nach Beobachtungen aus der Churmark.

Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.
0	1000		34	428	6	68	135	11
1	759	241	35	422	6	69	124	11
2	689	70	36	415	7	70	113	11
3	651	38	37	408	7	71	103	10
4	625	26	38	401	7	72	93	10
5	603	22	39	394	7	73	83	10
6	584	19	40	387	7	74	73	10
7	570	14	41	380	7	75	64	9
8	560	10	42	373	7	76	56	8
9	552	8	43	366	7	77	49	7
10	547	5	44	359	7	78	43	6
11	543	4	45	352	7	79	37	6
12	539	4	46	345	7	80	32	5
13	535	4	47	338	7	81	27	5
14	531	4	48	331	7	82	23	4
15	527	4	49	324	7	83	19	4
16	523	4	50	317	7	84	16	3
17	519	4	51	309	8	85	13	3
18	515	4	52	301	8	86	11	2
19	511	4	53	293	8	87	9	2
20	507	4	54	284	9	88	7	2
21	502	5	55	275	9	89	6	1
22	497	5	56	265	10	90	5	1
23	492	5	57	255	10	91	4	
24	487	5	58	245	10	92	4	
25	482	5	59	234	11	93	3	
26	476	6	60	223	11	94	3	
27	470	6	61	212	11	95	2	
28	464	6	62	201	11	96	2	
29	458	6	63	190	11	97	2	
30	452	6	64	179	11	98	2	
31	446	6	65	168	11	99	2	
32	440	6	66	157	11	10	1	
33	434	6	67	146	11			

XIII.

Gesetz der Sterblichkeit nach den im Canton Waadt gemachten Beobachtungen.

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	1000	32	553	64	262
1	811	33	548	65	250
2	765	34	544	66	236
3	733	35	539	67	220
4	715	36	533	68	202
5	701	37	527	69	184
6	688	38	520	70	168
7	677	39	513	71	153
8	667	40	506	72	140
9	659	41	500	73	129
10	653	42	494	74	119
11	648	43	488	75	109
12	643	44	482	76	98
13	639	45	476	77	85
14	635	46	469	78	71
15	631	47	461	79	58
16	626	48	451	80	46
17	622	49	441	81	36
18	618	50	431	82	29
19	614	51	422	83	24
20	610	52	414	84	20
21	606	53	406	85	17
22	602	54	397	86	14
23	597	55	388	87	11
24	592	56	377	88	9
25	587	57	364	89	7
26	582	58	348	90	5
27	577	59	331	91	4
28	572	60	314	92	3
29	567	61	299	93	2
30	563	62	286	94	1
31	558	63	274		

XIV

Duvillard's Sterblichkeitstabelle für Frankreich.

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	1000000	29	444932	58	231488	87	7165
1	767525	30	438183	59	222605	88	5670
2	671834	31	431398	60	213567	89	4686
3	624668	32	424583	61	204380	90	3830
4	598713	33	417744	62	195054	91	3093
5	583151	34	410886	63	185600	92	2466
6	573025	35	404012	64	176035	93	1938
7	565838	36	397123	65	166377	94	1499
8	560245	37	390219	66	156651	95	1140
9	555486	38	383300	67	146882	96	850
10	551122	39	376363	68	137102	97	621
11	546888	40	369404	69	127347	98	442
12	542630	41	362419	70	117656	99	307
13	538255	42	355400	71	108070	100	207
14	533711	43	348342	72	98637	101	135
15	528969	44	341235	73	89404	102	84
16	524020	45	334072	74	80423	103	51
17	518863	46	326843	75	71745	104	29
18	513502	47	319539	76	63424	105	16
19	507949	48	312148	77	55511	106	8
20	502216	49	304662	78	48057	107	4
21	496317	50	297070	79	41107	108	2
22	490267	51	289361	80	34705	109	1
23	484083	52	281527	81	28886	110	
24	477777	53	273560	82	23680		
25	471366	54	265450	83	19106		
26	464863	55	257193	84	15175		
27	458282	56	248782	85	11886		
28	451635	57	240214	86	9224		

XV.

Wargentin's Sterblichkeitstabelle für Schweden.

Männl. Geschlechts.			Weibl. Geschl.		Beiderlei Geschl.	
Alter.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.
0	10000	2300	10000	2090	10000	2195
1	7700	500	7910	518	7805	501
2	7200	337	7392	350	7296	344
3	6863	240	7042	250	6952	245
4	6623	150	6792	135	6707	143
5	6473	125	6657	120	6564	122
6	6348	105	6537	105	6442	105
7	6243	90	6432	85	6337	87
8	6153	75	6347	70	6250	73
9	6078	65	6277	60	6177	62
10	6013	55	6217	52	6115	54
11	5958	45	6165	46	6061	45
12	5913	45	6119	40	6016	42
13	5868	40	6079	35	5974	38
14	5828	40	6044	35	5936	37
15	5788	39	6009	35	5899	37
16	5749	39	5974	40	5862	40
17	5710	39	5934	40	5822	40
18	5671	44	5894	42	5782	42
19	5627	44	5852	43	5740	43
20	5583	50	5809	43	5697	47
21	5533	50	5766	43	5650	47
22	5483	50	5623	43	5603	48
23	5433	55	5680	44	5555	48
24	5378	55	5636	45	5507	50
25	5323	55	5591	45	5457	50
26	5268	55	5546	50	5407	52
27	5213	55	5496	52	5355	54
28	5158	55	5444	55	5301	55
29	5103	56	5389	55	5246	55
30	5047	59	5334	60	5191	59
31	4988	60	5274	60	5132	60

XV.

Wargentin's Sterblichkeitstabelle für Schweden.

Männl. Geschlechts.			Weibl. Geschl.		Beiderlei Geschl.	
Alter.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.
32	4928	60	5214	65	5072	62
33	4868	60	5149	65	5010	63
34	4808	60	5084	65	4947	63
35	4748	60	5019	60	4884	59
36	4688	60	4959	56	4825	58
37	4628	60	4903	56	4767	58
38	4568	60	4847	56	4709	58
39	4508	60	4791	58	4651	60
40	4448	65	4733	65	4591	65
41	4383	72	4668	75	4526	73
42	4311	80	4593	76	4453	78
43	4231	80	4517	76	4375	78
44	4151	80	4441	75	4297	78
45	4071	80	4366	72	4219	76
46	3991	80	4294	67	4143	74
47	3911	80	4227	65	4069	72
48	3831	80	4162	65	3997	73
49	3751	85	4097	70	3924	78
50	3666	95	4027	75	3846	85
51	3571	95	3952	80	3761	87
52	3476	95	3872	85	3674	90
53	3381	95	3787	85	3581	90
54	3286	95	3702	85	3491	91
55	3191	95	3617	85	3403	91
56	3096	95	3532	85	3312	92
57	3001	100	3447	90	3220	95
58	2901	100	3357	90	3125	95
59	2801	100	3267	100	3030	100
60	2701	105	3167	110	2930	108
61	2596	110	3057	118	2822	114
62	2486	115	3939	120	2708	118
63	2371	115	2819	120	2590	118
64	2256	115	2699	120	2472	118
65	2141	115	2579	120	2354	118

XV.

Wargentin's Sterblichkeitstabelle für Schweden.

Männl. Geschlechts.			Weibl. Geschl.		Beiderlei Geschl.	
Alter.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.	Lebende.	Gest.
66	2026	115	2459	120	2236	118
67	1911	120	2339	120	2118	121
68	1791	125	2219	120	1997	124
69	1666	125	2099	120	1873	124
70	1541	125	1979	130	1749	127
71	1416	125	1849	140	1622	133
72	1291	120	1709	150	1489	135
73	1171	120	1559	160	1354	140
74	1051	110	1399	150	1214	130
75	941	105	1249	140	1084	121
76	836	100	1109	130	963	115
77	736	90	979	120	848	105
78	646	85	859	110	743	95
79	561	80	749	100	648	90
80	481	75	649	95	558	90
81	406	70	554	90	468	84
82	336	65	464	85	384	75
83	271	60	379	80	309	65
84	211	50	299	75	244	55
85	161	40	224	55	189	45
86	121	30	169	40	144	35
87	91	22	129	30	109	27
88	69	17	99	23	82	20
89	52	14	76	18	62	15
90	38	12	58	15	47	14
91	26	9	43	12	33	12
92	17	7	31	10	21	10
93	10	6	21	8	11	6
94	4	3	13	6	5	3
85	1	1	7	4	2	1
96	0	0	3	2	1	1
97	0	0	1	1	0	0

XVI.

Süßmilch-Baumann'sche Sterblichkeitstabelle.

Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.	Alter.	Lebende.	Gest.
0	1000	250	33	421	6	66	152	10
1	750	89	34	415	6	67	142	10
2	661	43	35	409	7	68	132	10
3	618	25	36	402	7	69	122	10
4	593	14	37	395	7	70	112	9
5	579	12	38	388	7	71	103	9
6	567	11	39	381	7	72	94	9
7	556	9	40	374	7	73	85	9
8	547	8	41	367	7	74	77	8
9	539	7	42	360	7	75	69	7
10	532	5	43	353	7	76	62	7
11	527	4	44	346	7	77	55	6
12	523	4	45	339	7	78	49	6
13	519	4	46	332	8	79	43	6
14	515	4	47	324	8	80	37	5
15	511	4	48	316	8	81	32	4
16	507	4	49	308	8	82	28	4
17	503	4	50	300	9	83	24	4
18	499	4	51	291	9	84	20	3
19	495	4	52	282	9	85	17	3
20	491	5	53	273	9	86	14	2
21	486	5	54	264	9	87	12	2
22	481	5	55	255	9	88	10	2
23	476	5	56	246	9	89	8	2
24	471	5	57	237	9	90	6	1
25	466	5	58	228	9	91	5	1
26	461	5	59	219	9	92	4	1
27	456	5	60	210	9	93	3	1
28	451	6	61	201	9	94	2	1
29	445	6	62	192	10	95	1	1
30	439	6	63	182	10	96	0	
31	433	6	64	172	10			
32	427	6	65	162	10			

XVII.

Tabelle zur Volkszählung nach Altersklassen, nach Duvillard's Sterblichkeitstabelle für eine Million jährlicher Geburten berechnet (§. 118).

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	28763192	29	12937526	58	2998285	87	30660
1	27879430	30	12495969	59	2771238	88	24243
2	27159750	31	12061178	60	2553152	89	19065
3	26511490	32	11633188	61	2344179	90	14807
4	25899808	33	11212024	62	2144462	91	11345
5	25308876	34	10797709	63	1954134	92	8565
6	24730788	35	10390261	64	1773317	93	6363
7	24161357	36	9989694	65	1602110	94	4644
8	23598315	37	9596023	66	1440596	95	3325
9	23040450	38	9209263	67	1288830	96	2330
10	22487146	39	8829431	68	1146837	97	1594
11	21938141	40	8456548	69	1014613	98	1063
12	21393382	41	8090636	70	892111	99	688
13	20852939	42	7731727	71	779248	100	431
14	20316957	43	7379857	72	675895	101	260
15	19785617	44	7035068	73	581875	102	151
16	19259122	45	6697415	74	496962	103	83
17	18737680	46	6366957	75	420877	104	44
18	18221498	47	6043766	76	353293	105	22
19	17710772	48	5727922	77	293825	106	10
20	17205690	49	5419517	78	242041	107	4
21	16706423	50	5118652	79	197459	108	2
22	16213131	51	4825436	80	159553	109	1
23	15725956	52	4539992	81	127758	110	0
24	15245026	53	4262449	82	101475		
25	14770455	54	3992943	83	80081		
26	14302340	55	3731622	84	62941		
27	13840767	56	3478634	85	49410		
28	13385809	57	3234136	86	38855		

XVIII.

Tabelle zur Volkszählung nach Altersklassen, nach Duvillard's Sterblichkeitstabelle für 10 Millionen Einwohner berechnet (§. 118).

Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.	Alter.	Lebende.
0	10000000	29	4497945	58	1042403	87	10660
1	9692745	30	4344430	59	963467	88	8428
2	9442537	31	4193268	60	887646	89	6628
3	9217162	32	4044470	61	814993	90	5148
4	9004497	33	3898046	62	745558	91	3944
5	8799050	34	3754003	63	679387	92	2978
6	8598068	35	3612346	64	616523	93	2212
7	8400096	36	3473082	65	557000	94	1615
8	8204345	37	3336216	66	500847	95	1156
9	8010394	38	3201753	67	448083	96	810
10	7818029	39	3069698	68	398717	97	554
11	7627158	40	2940059	69	352747	98	369
12	7437763	41	2812844	70	310157	99	239
13	7249870	42	2688063	71	270919	100	150
14	7063526	43	2563729	72	234986	101	90
15	6878797	44	2445858	73	202298	102	52
16	6695753	45	2328471	74	172777	103	29
17	6514465	46	2213581	75	146325	104	15
18	6335005	47	2101215	76	122829	105	8
19	6157443	48	1991407	77	102153	106	3
20	5981843	49	1884185	78	84150	107	1
21	5808267	50	1779584	79	68650	108	1
22	5636764	51	1677643	80	55471	109	0
23	5467390	52	1578403	81	44417	110	0
24	5300186	53	1481911	82	35279		
25	5135193	54	1388213	83	27841		
26	4972445	55	1297360	84	21883		
27	4811972	56	1209405	85	17179		
28	4653798	57	1124401	86	13509		

XIX.

Werth einer Leibrente für eine Person nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Alter	3 Proc.	3½ Proc.	4 Proc.	4½ Proc.	5 Proc.
3	22,028	19,980	18,242	16,756	15,475
4	22,390	20,319	18,559	17,052	15,752
5	22,597	20,518	18,749	17,233	15,923
6	22,726	20,647	18,877	17,357	16,043
7	22,791	20,720	18,953	17,435	16,121
8	22,813	20,754	18,996	17,482	16,171
9	22,815	20,770	19,022	17,515	16,209
10	22,766	20,742	19,008	17,512	16,213
11	22,664	20,665	18,949	17,468	16,179
12	22,506	20,536	18,844	17,380	16,106
13	22,343	20,403	18,734	17,289	16,029
14	22,175	20,266	18,620	17,194	15,949
15	22,002	20,123	18,502	17,095	15,865
16	21,823	19,976	18,380	16,991	15,777
17	21,666	19,849	18,275	16,905	15,705
18	21,505	19,717	18,167	16,815	15,629
19	21,339	19,581	18,054	16,721	15,551
20	21,168	19,441	17,938	16,624	15,469
21	21,020	19,321	17,841	16,544	15,403
22	20,867	19,197	17,740	16,462	15,336
23	20,711	19,071	17,637	16,377	15,265
24	20,550	18,940	17,530	16,289	15,193
25	20,386	18,805	17,420	16,198	15,117
26	20,217	18,667	17,306	16,104	15,039
27	20,043	18 524	17,188	16,006	14,957
28	19,864	18,377	17,066	15,905	14,873
29	19,681	18,225	16,940	15,800	14,785
30	19,492	18,069	16,810	15,691	14,693
31	19,298	17,907	16,675	15,578	14,598
32	19,099	17,741	16,535	15,460	14,499
33	18,893	17,568	16,390	15,338	14,395
34	18,682	17,390	16,240	15,211	14,287
35	18,464	17,207	16,084	15,078	14,175
36	18,240	17,017	15,922	14.941	14,057
37	18,009	16,820	15,755	14,797	13,934
38	17,742	16,590	15,556	14,624	13,783

XIX.

Werth einer Leibrente für eine Person nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Alter.	3 Proc.	3½ Proc.	4 Proc.	4½ Proc	5 Proc.
39	17 467	16,352	15,349	14,444	13,625
40	17,183	16,105	15,133	14,254	13,459
41	16,889	15,848	14,907	14,056	13,284
42	16,585	15,581	14,673	13,849	13,100
43	16,271	15,304	14,427	13,631	12,906
44	15,946	15,016	14,171	13,403	12,702
45	15,609	14,716	13,904	13,164	12,487
46	15,260	14,405	13,625	12,913	12,261
47	14,925	14,105	13,357	12,672	12,044
48	14,578	13,794	13,076	12,419	11,815
49	14,244	13,494	12,807	12,176	11,595
50	13,899	13,183	12,526	11,921	11,363
51	13,567	12,883	12,255	11,675	11,140
52	13,248	12,596	11,995	11,440	10,927
53	12,919	12,298	11,725	11,195	10,703
54	12,579	11,989	11,443	10,938	10,468
55	12,252	11,692	11,173	10,691	10,242
56	11,914	11,383	10,891	10,433	10,006
57	11,565	11,063	10,597	10,163	9,757
58	11,228	10,755	10,314	9,902	9,517
59	10,881	10,436	10,020	9,631	9,266
60	10,522	10,104	9,713	9,346	9,003
61	10,151	9,760	9,393	9,049	8,726
62	9,766	9,402	9,060	8,738	8,435
63	9,392	9,053	8,734	8,433	8,150
64	9,005	8,691	8,394	8,114	7,850
65	8,604	8,314	8,039	7,780	7,535
66	8,212	7,944	7,691	7,451	7,224
67	7,830	7,584	7,350	7,129	6,918
68	7,460	7,234	7,019	6,814	6,620
69	7,104	6,896	6,699	6,511	6,331
70	6,766	6,575	6,394	6,221	6,055
71	6,424	6,250	6,084	5,925	5,773
72	6,105	5,946	5,794	5,648	5,505
73	5,789	5,644	5,506	5,373	5,246
74	5,479	5,348	5,222	5,101	4,985

XIX.

Werth einer Leibrente für eine Person nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Alter.	3 Proc.	3½ Proc.	4 Proc.	4½ Proc.	5 Proc.
75	5,178	5,060	4,945	4,836	4,730
76	4,862	4,755	4,652	4,553	4,458
77	4,557	4,462	4,370	4,281	4,195
78	4,273	4,188	4,105	4,025	3,948
79	3,984	3,908	3,834	3,763	3,694
80	3,730	3,662	3,596	3,533	3,471
81	3,448	3,428	3,370	3,313	3,258
82	3,269	3,216	3,164	3,114	3,065
83	3,031	2,984	2,939	2,895	2,853
84	2,757	2,717	2,679	2,641	2,604
85	2,490	2,457	2,424	2,392	2,361
86	2,240	2,212	2,185	2,158	2,132
87	2,023	2,000	1,977	1,955	1,933
88	1,747	1,728	1,711	1,693	1,675
89	1,474	1,460	1,446	1,433	1,418
90	1,208	1,198	1,187	1,178	1,166
91	0,955	0,948	0,941	0,934	0,924
92	0,721	0,716	0,712	0,707	0,703
93	0,485	0,483	0,481	0,478	0,476

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 0 Jahre.

Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.
3	15,758	13,571	34	14,172	12,660	65	5,700	5,423
4	16,364	14, 72	35	14,008	12,536	66	5,374	5,123
5	16,732	44,396	36	13,839	12,408	67	5,062	4,835
8	16,994	14,632	37	13,663	12,274	68	4,765	4,560
7	17,171	14,796	38	13,438	12,095	69	4,486	4,300
8	17,287	14,910	39	13,203	11,907	70	4,230	4,062
9	17,378	15,004	40	12,958	11,710	71	3 968	3,871
10	17,398	15,038	41	12,702	11,502	72	3,735	3,599
11	17,338	15,004	42	12,434	11,282	73	3-507	3,384
12	17,195	14,897	43	12,154	11,051	74	3,285	3,176
13	17,046	14,786	44	11,861	11,807	75	3.075	2,977
14	16,891	14,669	45	11,554	10,549	76	2,844	2,758
15	16,731	14,547	46	11,232	10,276	77	2,625	2,549
16	16,564	14,419	47	10,934	10,023	78	2,429	2,362
17	16,432	14,321	48	10,621	9,756	79	2,224	2,165
18	16,296	14,220	49	10,331	9,508	80	2,057	2,005
19	16,155	14,114	50	10,026	9,246	81	1,906	1,860
20	16,010	14,004	51	9,743	9.004	82	1,786	1,745
21	15,901	13,926	52	9,485	8,782	83	1,649	1,614
22	15,789	13,846	53	9,214	8,549	84	1,472	1,442
23	15,674	13,764	54	8,930	8,303	85	1,301	1,276
24	15,556	13,679	55	8,669	8,077	86	1,149	1,128
25	15,435	13,591	56	8,397	7,839	87	1,042	1,024
26	15,311	13,501	57	8,111	7,588	88	0,873	0,860
27	15,183	13,408	58	7,847	7,357	89	0,709	0,699
28	15,051	13,312	59	7,572	7,114	90	0,552	0,545
29	14,916	13,213	60	7,283	6,857	91	0,410	0,405
30	14,776	13,110	61	6,979	6,585	92	0,300	0,296
31	14,632	13,004	62	6,660	6,297	93	0,242	0,239
32	14,484	12,893	63	6,357	6,024			
33	14,331	12,779	64	6,037	5,733			

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 5 Jahre.

Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.
3— 8	16,510	14,219	34—39	13,644	12,252	65—70	4,858	4,647
4— 9	16,854	14,525	35—40	13,436	12,089	66—71	4,568	4,377
5—10	17,052	14,708	36—41	13,220	11,918	67—72	4,300	4,128
6—11	17,155	14,811	37—42	12,995	11,739	68—73	4,040	3,885
7—12	17,172	14,840	38—43	12,740	11,531	69—74	3,792	3,653
8—13	17,154	14,841	39—44	12,473	11,313	70—75	3,561	3,436
9—14	17,121	14,828	40—45	12,194	11,082	71—76	3,314	3,203
10—15	17,048	14,783	41—46	11,902	10,839	72—77	3,088	2,989
11—16	16,934	14,701	42—47	11,617	10,601	73—78	2,877	2,788
12—17	16,796	14,598	43—48	11,318	10,349	74—79	2,663	2,585
13—18	16,653	14,491	44—49	11,025	10,102	75—80	2,478	2,409
14—19	16,505	14,380	45—50	10,718	9,841	76—81	2,293	2,232
15—20	16,351	14,264	46—51	10,416	9,583	77—82	2,130	2,076
16—21	16,213	14,161	47—52	10,137	9,345	78—83	1,964	1,917
17—22	16,091	14,071	48—53	9,845	9,095	79—84	1,770	1,730
18—23	15,965	13,979	49—54	9,557	8,846	80—85	1,596	1,562
19—24	15,835	13,884	50—55	9,274	8,602	81—86	1,437	1,408
20—25	15,701	13,784	51—56	8,994	8,360	82—87	1,316	1,292
21—26	15,583	13,699	52—57	8,719	8,120	83—88	1,150	1,130
22—27	15,462	13,612	53—58	8,449	7,886	84—89	0,969	0,954
23—28	15,338	13,522	54—59	8,168	7,639	85—90	0,793	0,782
24—29	15,210	13,429	55—60	7,889	7,394	86—91	0,630	0,621
25—30	15,079	13,333	56—61	7,597	7,136	87—92	0,495	0,489
26—31	14 943	13,233	57—62	7,291	6,862	88—93	0,351	0,348
27—32	14,804	13,131	58—63	7,003	6,605			
28—33	14,660	13,024	59—64	6,701	6,333			
29—34	14,511	12,914	60—65	6,383	6,045			
30—35	14,358	12,799	61—66	6,065	5,757			
31—36	14,199	12,680	62—67	5,749	5,467			
32—37	14,035	12,556	63—68	5,448	5,191			
33—38	13,843	12,408	64—69	5,151	4,917			

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 10 Jahre.

Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.
3—13	16,366	13,535	34—44	12,818	11,587	65—75	3,999	3,848
4—14	16,586	14,345	35—45	12,571	11,385	66—76	3,728	3,594
5—15	16,689	14,446	36—46	12,312	11,174	67—77	3,471	3,351
6—16	16,733	14,498	37—47	12,063	10,970	68—78	3,233	3,126
7—17	16,750	14,528	38—48	11,784	10,738	69—79	2,996	2,902
8—18	16,734	14,531	39—49	11,513	10,512	70—80	2,793	2,709
9—19	16,703	14,521	40—50	11,230	10,274	71—81	2,598	2,524
10—20	16,635	14,479	41—51	10,954	10,042	72—82	2,431	2,365
11—21	16,547	14,421	42—52	10,686	9,817	73—83	2,253	2,195
12—22	16,418	14,326	43—53	10,406	9,579	74—84	2,049	1,999
13—23	16,285	14,228	44—54	10,112	9,329	75—85	1,853	1,811
14—24	16,147	14,126	45—55	9,825	9,083	76—86	1,663	1,627
15—25	16,004	14,020	46—56	9,525	8,824	77—87	1,503	1,473
16—26	15,856	13,909	47—57	9,227	8,566	78—88	1,303	1,279
17—27	15,724	13,811	48—58	8,935	8,312	79—89	1,100	1,082
18—28	15,586	13,710	49—59	8,645	8,060	80—90	0,909	0,895
19—29	15,445	13,605	50—60	8,342	7,793	81—91	0,727	0,717
20—30	15,299	13,496	51—61	8,039	7,526	82—92	0,566	0,559
21—31	15,168	13,400	52—62	7,736	7,257	83—93	0,401	0,398
22—32	15,032	13,301	53—63	7,437	6,992			
23—33	14,893	13,199	54—64	7,124	6,711			
24—34	14,750	13,092	55—65	6,809	6,428			
25—35	14,601	12,982	56—66	6,496	6,145			
26—36	14,448	12,868	57—67	6,187	5,864			
27—37	14,290	12,749	58—68	5,895	5,598			
28—38	14,104	12,606	59—69	5,611	5,339			
29—39	13,911	12,455	60—70	5,337	5,088			
30—40	13 710	12,298	61—71	5,054	4,828			
31—41	13,500	12,133	62—72	4,784	4,578			
32—42	13,282	11,960	63—73	4,523	4,337			
33—43	13,055	11,778	64—74	4,261	4,093			

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 20 Jahre.

Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.
3—23	15 560	13,566	34—54	10,663	9,794	65—85	2,173	2,120
4—24	15,773	13,765	35—55	10,418	9,589	66—86	1,954	1,909
5—25	15,876	13,870	36—56	10,163	9,374	67—87	1,766	1,729
6—26	15,925	13,929	37—57	9,897	9,148	68—88	1,528	1,498
7—27	15,929	13,951	38—58	9,625	8,916	69—89	1,293	1,270
8—28	15,903	13.946	39—59	9,342	8,673	70—90	1,066	1,049
9—29	15,861	13,929	40—60	9, 46	8,417	71—91	0,846	0,834
10—30	15,784	13,882	41—61	8,737	8,147	72—92	0,646	0,638
11—31	15,668	13,801	42—62	8,413	7,862	73—93	0,445	0,440
12—32	15,511	13,684	43—63	8,095	7,582			
13—33	15,348	13,562	44—64	7,762	7,285			
14—34	15,179	13,434	45—65	7,412	6,972			
15—35	15,004	13,301	46—66	7,065	6,659			
16—36	14,822	13,162	47—67	6,734	6,360			
17—37	14,652	13,033	48—68	6,409	6,065			
18—38	14,452	12,878	49—69	6,103	5,787			
19—39	14,245	12,716	50—70	5,807	5,517			
20—40	14,028	12,545	51—71	5,515	5,250			
21—41	13,821	12,382	52—72	5,250	5,007			
22—42	13,606	12,211	53—73	4,984	4,762			
23—43	13,381	12,032	54—74	4,720	4,518			
24—44	13,147	11,843	55—75	4,470	4,286			
25—45	12,902	11,645	56—76	4,203	4,037			
26—46	12,647	11,436	57—77	3,943	3,794			
27—47	12,402	11,236	58—78	3,706	3,573			
28—48	12,146	11,025	59—79	3,463	3,343			
29—49	11,901	10,823	60—80	3,246	3,140			
30—50	11,645	10,611	61—81	3,039	2,944			
31—51	11,398	10,407	62—82	2,849	2,764			
32—52	11,163	10,212	63—83	2,647	2,573			
33—53	10,918	10,008	64—84	2,409	2,346			

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 30 Jahre.

Alter.	3½ Proc.	4½ Proc.	Alter.	3½ Proc.	4½ Proc.
3—33	14,605	12,893	34—64	8,005	7,499
4—34	14,761	13,048	35—65	7,678	7,207
5—35	14,813	13,112	36—66	7,357	6,920
6—36	14,810	13,130	37—67	7,043	6,639
7—37	14,764	13,111	38—68	6,726	6,353
8—38	14,662	13,043	39—69	6,420	6,076
9—39	14,542	12,960	40—70	6,127	5,811
10—40	14,381	12,843	41—71	5,828	5,538
11—41	14,186	12,690	42—72	5,548	5,282
12—42	13,946	12,498	43—73	5,268	5,025
13—43	13,691	12,296	44—74	4,990	4,770
14—44	13,432	12,084	45—75	4,718	4,518
15—45	13,158	11,860	46—76	4,427	4,248
16—46	12,872	11,624	47—77	4,152	3,991
17—47	12,611	11,410	48—78	3,892	3,748
18—48	12,339	11,185	49—79	3,632	3,503
19—49	12,076	10,968	50—80	3,399	3,284
20—50	11,801	10,739	51—81	3,182	3,080
21—51	11,551	10,532	52—82	2,991	2,899
22—52	11,313	10,335	53—83	2,780	2,700
23—53	11,064	10,128	54—84	2,533	2,461
24—54	10,805	9,911	55—85	2,296	2,238
25—55	10,557	9,702	56—86	2,072	2,023
26—56	10,298	9 484	57—87	1,877	1,836
27—57	10,029	9,255	58—88	1,629	1,596
28—58	9,769	9,034	59—89	1,381	1,356
29—59	9,499	8,803	60—90	1,138	1,119
30—60	9,218	8,561	61—91	0,904	0 891
31—61	8,924	8,306	62—92	0 686	0,677
32—62	8,617	8,038	63—93	0'467	0,463
33—63	8,318	7,775			

XX.

Werth einer Leibrente für zwei verbundene Personen nach der Sterblichkeitstabelle von Deparcieux.

Altersunterschied = 40 Jahre.

Alter.	3½ Prc.	4½ Prc.	Alter.	3½ Prc	4½ Prc
3—43	12,996	11,665	34—74	5,062	4,835
4—44	13,021	11,706	35—75	4,802	4,595
5—45	12,914	11,658	36—76	4,525	4,338
6—46	12,812	11,560	37—77	4,259	4,091
7—47	12,656	11,440	38—78	4,004	3 852
8—48	12,465	11,289	39—79	3,742	3,607
9—49	12,275	11,138	40—80	3,511	3,390
10—50	12,048	10,954	41—81	3,292	3,184
11—51	11,804	10,754	42—82	3,092	2,996
12—52	11,543	10,538	43—83	2,874	2,790
13—53	11,272	10,311	44—84	2,619	2,547
14—54	10,989	10,073	45—85	2,370	2,309
15—55	10,715	9,843	46—86	2,133	2,082
16—56	10,430	9,601	47—87	1,931	1,838
17—57	10,145	9,359	48—88	1,670	1,636
18—58	9,871	9,125	49—89	1,413	1,387
19—59	9,585	8,876	50—90	1,160	1,141
20—60	9,287	8,621	51—91	0,919	0,906
21—61	8,987	8,362	52—92	0,698	0,689
22—62	8,675	8,088	53—93	0,473	0,169
23—63	8,369	7,820			
24—64	8,050	7,538			
25—65	7 717	7,241			
26—66	7,389	6,948			
27—67	7,068	6,659			
28—68	6,755	6,278			
39—69	6,454	6,105			
30—70	6,166	5,845			
31—71	5,874	5,578			
32—72	5,601	5,329			
33—73	5,329	5,081			

XXI.

Sterblichkeitstabelle von Deparcieux nach der Bearbeitung von Florencourt.

Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.	Alter.	Lebende.	Geſt.
0	10000	2550	34	4792	52	68	2336	113
1	7450	362	35	4740	52	69	2223	114
2	7088	265	36	4688	51	70	2109	116
3	6823	205	37	4637	50	71	1993	119
4	6618	150	38	4587	49	72	1874	125
5	6468	123	39	4538	48	73	1749	132
6	6345	102	40	4490	49	73	1616	138
7	6243	89	41	4441	49	75	1479	142
8	6154	81	42	4392	50	76	1337	139
9	6073	69	43	4342	51	77	1198	134
10	6004	58	44	4291	52	78	1064	128
11	5946	49	45	4239	53	79	936	122
12	5897	43	46	4186	54	80	812	115
13	5854	39	47	4132	55	81	697	107
14	5815	37	48	4077	56	82	590	98
15	5778	38	49	4021	57	83	492	88
16	5740	41	50	3964	59	84	404	77
17	5699	44	51	3905	62	85	327	66
18	5655	47	52	3843	66	86	261	55
19	5608	50	53	3777	70	87	206	47
20	5558	52	54	3707	76	88	159	42
21	5506	53	55	3631	81	89	117	37
22	5453	54	56	3550	85	90	80	30
23	5399	55	57	3465	88	91	50	22
24	5344	56	58	3377	91	92	28	14
25	5288	57	59	3286	95	93	14	8
26	5231	58	60	3191	99	94	6	3
27	5173	57	61	3092	102	95	3	2
28	5116	56	62	2990	105	96	1	1
29	5060	55	63	2885	107			
30	5005	54	64	2778	109			
31	4951	54	65	2669	110			
32	4897	53	66	2559	111			
33	4844	52	67	2448	112			

XXII.

Sterblichkeitstabelle nach Deparcieux für zwölf fünfgliedrige Altersklassen einer Rentenanstalt.

Erste Klasse von 0 — 5 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gest.	Jahre.	Lebende.	Gest.	Jahre.	Lebende.	Gest.
1	37979	3532	34	23701	257	67	11675	566
2	34447	1105	35	23444	254	68	11109	574
3	33342	845	36	23190	250	69	10535	587
4	32497	669	37	22940	247	70	9948	607
5	31828	545	38	22693	245	71	9341	630
6	31283	464	39	22448	245	72	8711	656
7	30819	399	40	22203	247	73	8055	676
8	30420	346	41	21956	251	74	7379	685
9	30074	300	42	21705	255	75	6694	680
10	29774	258	43	21450	260	76	6014	667
11	29516	226	44	21190	265	77	5347	640
12	29290	206	45	20925	270	78	4707	608
13	29084	198	46	20655	275	79	4099	572
14	28886	199	47	20380	281	80	3527	532
15	28687	207	48	20099	289	81	2995	485
16	28480	220	49	19810	300	82	2510	436
17	28260	234	50	19510	314	83	2074	384
18	28026	246	51	19196	333	84	1690	333
19	27780	256	52	18863	355	85	1357	287
20	27524	264	53	18508	378	86	1070	247
21	27260	270	54	18130	400	87	823	211
22	26990	275	55	17730	421	88	612	178
23	26715	280	56	17309	440	89	434	145
24	26435	283	57	16869	458	90	289	111
25	26152	284	58	16411	475	91	178	77
26	25868	283	59	15936	492	92	101	49
27	25585	280	60	15444	508	93	52	28
28	25305	276	61	14936	522	94	24	14
29	25029	272	62	14414	533	95	10	6
30	24757	268	63	13881	542	96	4	3
31	24489	265	64	13339	549	97	1	1
32	24224	263	65	12790	555	98	0	
33	23961	260	66	12235	560			

XXII.

Zweite Klasse von 5 — 10 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	31285	464
2	30821	399
3	30422	348
4	30074	300
5	29774	258

u. s. w.
wie in der 1. Klasse vom 11. Jahre an.

Dritte Klasse von 10 — 15 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	29516	226
2	29290	206

u. s. w.
wie in der 1. Klasse vom 13. Jahre an.

Vierte Klasse von 15 — 20 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	28480	220
2	28260	234

u. s. w.
wie in der 1. Klasse vom 18. Jahre an.

Fünfte Klasse von 20 — 25 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	27260	270
2	26990	275

u. s. w.
wie in der 1. Klasse vom 23. Jahre an.

XXII.

Sechste Klasse von 25 — 30 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	25868	283
2	25585	280

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 28. Jahre an.

Siebente Klasse von 30 — 35 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	24489	265
2	24224	263

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 33. Jahre an.

Achte Klasse von 35 — 40 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	23190	250
2	22940	247

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 38. Jahre an.

Neunte Klasse von 40 — 45 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	21956	251
2	21705	255

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 43. Jahre an.

Zehnte Klasse von 45 — 50 Jahre.

Jahre	Lebende.	Gestorben.
1	20655	275
2	20380	281

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 48. Jahre an.

XXII.

Elfte Klasse von 50 — 55 Jahre.

Jahre,	Lebende.	Gestorben.
1	19196	333
2	18863	355

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 53. Jahre an.

Zwölfte Klasse von 55 — 60 Jahre.

Jahre.	Lebende.	Gestorben.
1	17309	440
2	16869	458

u. s. w.

wie in der 1. Klasse vom 58. Jahre an.